Übungsskript zur Mathematik 1.1 für Lehrämter

Carsten Erdmann

carsten.erdmann@uni-rostock.de

Universität Rostock

3. März 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

1.1 Wiederholung - Theorie: Aussagenlogik

1.1.1 Aussagen

Eine **Aussage** ist die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts in Form eines Satzes einer natürlichen oder künstlichen Sprache. Jede Aussage ist entweder **wahr** oder **falsch**: Prinzip der Zweiwertigkeit. Man nennt „wahr“ bzw. „falsch“ den **Wahrheitswert** der Aussage und bezeichnet ihn mit w (oder 1) bzw. f (oder 0). Die Wahrheitswerte werden auch als aussagenlosgische Konstanten bezeichnet.

1.1.2 Aussagenverbindungen

Die Aussagenlogik untersucht den Wahrheitswert von Aussagenverbindungen in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen. Dabei werden ausschließlich extensionale Aussagenverbindungen betrachtet, d.h., der Wahrheitswert der Aussagenverbindung hängt nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen und den verbindenden **Junktoren** ab. Dabei wird der Wahrheitswert der Verbindung durch die klassischen Junktoren

$$\begin{array}{rl}
\text{„nicht } A\text{“} & (\neg A), \\
\text{„}A\text{ und }B\text{“} & (A \wedge B), \\
\text{„}A\text{ oder }B\text{“} & (A \vee B), \\
\text{„wenn }A\text{, dann }B\text{“} & (A \Rightarrow B), \\
\text{„}A\text{ genau dann, wenn }B\text{“} & (A \Leftrightarrow B)
\end{array}$$

bestimmt. Dabei ist das „logische oder“ immer als „einschließendes oder“ zu verstehen. Im Falle der Implikation sind für $A \Rightarrow B$ auch die folgenden Sprechweisen üblich:

- A impliziert B,
- B ist notwendig für A sowie
- A ist hinreichend für B.

1.1.3 Wahrheitstafeln

Fasst man A und B als Variable auf, die nur die Werte f und w annehmen können (Aussagenvariable), so beschreiben die folgenden **Wahrheitstafeln** die den Junktoren entsprechenden Wahrheitsfunktionen:

Negation

A	$\neg A$
f	w
w	f

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

1.1.4 Ausdrücke der Aussagenlogik

Mit diesen einstelligen (Negation) und zweistelligen (Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz) Verknüpfungen können aus gegebenen Aussagenvariablen kompliziertere Ausdrücke der Aussagenlogik aufgebaut werden. Diese Ausdrücke werden induktiv definiert:

(a) Konstanten und Variable sind Ausdrücke.

(b) Sind A und B Ausdrücke, so sind es auch $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ und $(A \Leftrightarrow B)$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise solcher Ausdrücke werden Außenklammern weggelassen und Vorrangregeln (Prioritäten) festgelegt: In der folgenden Reihenfolge bindet jeder Junktor stärker als der folgende:

$$\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \Rightarrow, \ \Leftrightarrow .$$

Häufig wird anstelle von „ $\neg A$ “ auch $\overline{A}$ geschrieben und der Junktor $\wedge$ ganz weggelassen. Durch diese Einsparungen kann man zum Beispiel den Ausdruck

$$((A \vee (\neg B)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee C)) \qquad \text{kürzer so notieren:} \qquad A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C.$$

1.1.5 Wahrheitsfunktionen

Ordnet man jeder Aussagenvariablen eines Ausdrucks einen Wahrheitswert zu, so spricht man von einer **Belegung** der Variablen. Mit Hilfe der Wahrheitstafeln für die Junktoren kann man einem Ausdruck für jede Belegung einen Wahrheitswert zuordnen. Der untenstehende Ausduck repräsentiert somit eine dreistellige (drei Eingangsvariablen A, B und C) Wahrheitsfunktion.

A	B	C	$A \vee \overline{B}$	$AB \vee C$	$A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C$
f	f	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w
w	w	w	w	w	w

Jeder aussagenlogische Ausdruck repräsentiert auf diese Weise ein n-stellige Wahrheitsfunktion, d.h., eine Funktion, die jedem n-Tupel von Wahrheitswerten wieder einen Wahrheitswert zuordnet. Es gibt 2^{2^n} n-stellige Wahrheitsfunktionen, insbesondere 16 zweistellige.

1.1.6 Grundgesetze der Aussagenlogik

Zwei aussagenlogische Ausdrücke A und B heißen logisch äquivalent oder wertverlaufsgleich, in Zeichen: $A = B$, wenn sie die gleiche Wahrheitsfunktion repräsentieren. Folglich kann man mit Hilfe von Wahrheitstafeln die logische Äquivalenz aussagenlogischer Ausdrücke überprüfen. So gilt zum Beispiel

$$A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C = B \vee C,$$

d.h., der Ausdruck $A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C$ hängt von A explizit nicht ab, was man schon an der obigen Wahrheitstafel erkennt.
Insbesondere gelten folgende **Grundgesetze der Aussagenlogik:**

(a) **Assoziativgesetze**

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C),\\ (A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C).\end{aligned}$$

(b) **Kommutativgesetze**

$$\begin{aligned}A \wedge B &= B \wedge A,\\ A \vee B &= B \vee A.\end{aligned}$$

(c) **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C),\\ A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C).\end{aligned}$$

(d) **Absorptionsgesetze**

$$\begin{aligned}A \wedge (A \vee C) &= A,\\ A \vee (A \wedge B) &= A.\end{aligned}$$

(e) **Idempotenzgesetze**

$$\begin{aligned}A \wedge A &= A,\\ A \vee A &= A.\end{aligned}$$

(f) **ausgeschlossener Dritter**

$$\begin{aligned}A \wedge \overline{A} &= f,\\ A \vee \overline{A} &= w.\end{aligned}$$

(g) DE MORGAN**sche Regeln**

$$\begin{aligned}\overline{A \wedge B} &= \overline{A} \vee \overline{B},\\ \overline{A \vee B} &= \overline{A} \wedge \overline{B}.\end{aligned}$$

(h) **Gesetze für W,F**

$$\begin{aligned} A \wedge w &= A, \\ A \vee f &= A, \\ A \wedge f &= f, \\ A \vee w &= w, \\ \overline{w} &= f, \\ \overline{f} &= w. \end{aligned}$$

(i) **Doppelte Negation**

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

(j) **Weitere Umformungen**

$$\begin{aligned} A \wedge (\overline{A} \vee B) &= A \wedge B \\ A \vee (\overline{A} \wedge B) &= A \vee B, \\ (A \vee C) \wedge (B \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B) &= (A \vee C) \wedge (B \vee \overline{C}), \\ (A \wedge C) \vee (B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B) &= (A \wedge C) \vee (B \wedge \overline{C}). \end{aligned}$$

Aus den Wahrheitstafeln für die Implikation und die Äquivalenz kann man erkennen, dass die Implikationen und die Äquivalenz mit Hilfe der anderen Junktoren durch die Gleichungen

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B \qquad \text{und} \qquad A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

ausgedrückt werden können. Diese Gesetze werden zur Umformung (Vereinfachung) aussagenlogischer Ausdrücke verwendet werden.

Die Gleichung $A \vee \overline{B} \Rightarrow (A \wedge B) \vee C = B \vee C$ kann wie folgt bewiesen werden:

$$\begin{aligned} A \vee \overline{B} \Rightarrow (A \wedge B) \vee C &\overset{(1.1)}{=} \overline{A \vee \overline{B}} \vee (A \wedge B) \vee C \\ &\overset{\text{DE MORGANsche Regeln}}{=} (\overline{A} \wedge \overline{\overline{B}}) \vee (A \wedge B) \vee C \\ &\overset{\text{Doppelte Negation}}{=} (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee C \\ &\overset{\text{Distributivgesetz}}{=} ((\overline{A} \vee A) \wedge B) \vee C \\ &\overset{\text{ausgeschlossener Dritter}}{=} (w \wedge B) \vee C \\ &\overset{\text{Gesetze für W,F}}{=} B \vee C. \end{aligned}$$

1.1.7 Tautologien, mathematische Schlussweisen

Ein aussagenlogischer Ausdruck heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn er die Wahrheitsfunktion identisch w repräsentiert. Folglich sind zwei Ausdrücke A und B genau dann logisch äquivalent, wenn der Ausdruck $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. Mathematische Schlussweisen folgen aussagenlogischen Gesetzen. Als Beispiel sei das Kontrapositionsgesetz genannt, d.h. der allgemeingültige Ausdruck

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

Diese Gesetz, das auch in der Form

$$(A \Rightarrow B) = (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

notiert werden kann, lässt sich wie folgt interpretieren: Um zu zeigen, das B aus A folgt, kann man auch zeigen, dass $\overline{A}$ aus $\overline{B}$ folgt. Der **indirekte Beweis** beruht auf folgendem Prinzip: Um B aus A zu folgern, nimmt man B als falsch an und leitet daraus – unter der Voraussetzung, dass A richtig ist – einen Widerspruch her. Formal lässt sich dieses Prinzip auf verschiedene Weise durch aussagenlogische Gesetze beschreiben:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &= (A \wedge \overline{B}) \Rightarrow \overline{A} \qquad \text{oder} \\ A \Rightarrow B &= (A \wedge \overline{B}) \Rightarrow B \qquad \text{oder} \\ A \Rightarrow B &= (A \wedge \overline{B}) \Rightarrow F. \end{aligned}$$

1.2 Wiederholung - Theorie: Quantoren und Negation

1.2.1 Quantoren

Wenn eine Aussage $A(x)$ eine Variable x enthält, dann kann man diese quantifizieren mit dem **Allquantor**: für alle x gilt $A(x)$, symbolisch

$$\forall x : \; A(x),$$

oder mit dem **Existenzquantor**: es gibt ein x, so dass $A(x)$ gilt, symbolisch

$$\exists x : \; A(x).$$

Eine Verschärfung ist: es gibt genau ein x, so dass $A(x)$ gilt, symbolisch

$$\exists! x : \; A(x).$$

Bei der Negation einer quantifizierten Aussage werden Allquantor und Existenzquantor vertauscht:

$$\neg(\forall x : \; A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \; \neg A(x),$$

d.h. die Aussage „ $A(x)$ trifft für alle x zu“ist genau dann falsch, wenn es wenigstens ein x gibt, für welches die Aussage „Nicht $A(x)$ “richtig ist.

Vorsicht!: Wenn mehrere Quantoren auftreten kommt es auf deren Reihenfolge an. Vergleiche z.B. die Aussage

„Für jede natürliche Zahl n gibt es eine größere natürliche Zahl m “,

symbolisch:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : m > n,$$

mit der Aussage

„Es gibt eine natürliche Zahl m, welche größer als alle natürlichen Zahlen n ist“,

symbolisch

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : m > n.$$

1.2.2 Abbildung

Seien X, Y beliebige Räume. Wenn f eine Abbildung ist, die von X nach Y abbildet, dann schreiben wir symbolisch

$$f : X \to Y.$$

Wenn man schreiben will, was die Abbildung mit einem Element $x \in X$ macht, dann schreiben wir dies so

$$x \mapsto f(x).$$

Betrachten wir zum Beispiel die Betragsfunktion. Dies ist eine Abbildung von den reellen in die nicht negativen reellen Zahlen. Dabei wird jede Zahl größer gleich Null auf sich selber abgebildet und jede negative Zahl auf ihr Negatives. Oder symbolisch

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

. . . .

1.3 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1.1.
Übersetzen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich in mathematische Ausdrücke:

(a) Es existieren natürliche Zahlen die durch zwei teilbar sind.

(b) Es existiert genau eine kleinste natürliche Zahl.

(c) Es existiert keine größte natürliche Zahl.

(d) Eine Primzahl liegt genau dann vor, wenn sie sich nur durch sich selber (und eins) und sonst durch keine andere natürliche Zahl teilen lässt.

(e) Alle natürlichen Zahlen sind durch drei teilbar.

Lösung zu Aufgabe 1.1.

(a) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$

(b) $\exists! n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \backslash \{n\} : n < m$

(c) $\nexists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n > m$

(d) p ist Primzahl $\Leftrightarrow \nexists n, m \in \mathbb{N} / \{1, p\} : n \cdot m = p$

(e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 3m$

Aufgabe 1.2.
Bilden Sie die Negation der Aussagen aus Aufgabe 1!

Lösung zu Aufgabe 1.2.

(a) $\neg(\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n \neq 2m)$

(b) $\neg(\exists! n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \backslash \{n\} : n < m) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \backslash \{n\} : n \geq m)$

(c) $\neg(\nexists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n > m) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n > m)$

(d) $\neg(p$ ist Primzahl $\Leftrightarrow \nexists n, m \in \mathbb{N} / \{1, p\} : n \cdot m = p) \Leftrightarrow (p$ ist keine Primzahl $\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} / \{1, p\} \; n \cdot m = p)$

(e) $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 3m) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n \neq 3m)$

Aufgabe 1.3.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, wenn p und q wahr sind?

(a) $p \wedge \overline{q}$

(b) $\overline{p} \wedge q$

(c) $\overline{(p \wedge q)}$

(d) $p \Rightarrow q$

(e) $p \vee \overline{q}$

(f) $\overline{(\overline{p} \wedge q)}$

(g) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge \overline{p}$

(h) $\overline{(p \Rightarrow q)}$

Lösung zu Aufgabe 1.3.
Die Aussagen $(d), (e), (f)$ sind wahr.

Aufgabe 1.4.
Welche der folgenden Implikationen sind für beliebige reelle Zahlen a, b, c, d stets wahr?

(a) $(a > b) \Rightarrow (a^2 > b^2)$

(b) $(a > b > c > 0) \Rightarrow (a^2 > ab > b^2 > bc > c^2)$

(c) $((a-b)^2 + 2ab > a^2 + b^2) \Rightarrow (a^2 > 12ab)$

(d) $(a > b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a - c > b - d)$

(e) $(ab > cd) \Rightarrow (\frac{a}{d} > \frac{c}{b}) \quad (b, d \neq 0)$

Lösung zu Aufgabe 1.4.
(a) ist falsch, man nehme z.B. $a = 0, b = -1$ dann folgt $a > b \not\Rightarrow a^2 > b^2$.
(b) ist wahr. Sei $a = b+x$ und $b = c+y$ mit $x, y > 0$. Dann gilt, dass $a^2 = a \cdot a = a \cdot (b+x) = ab+ax \overset{a,x>0}{>} ab$ und $ab = (b+x)(b) = b^2+bx \overset{b,x>0}{>} b^2$ und $b^2 = b \cdot b = b \cdot (c+y) = bc+by \overset{b,y>0}{>} bc$, sowie $bc = (c+y) \cdot c = c^2 + yc \overset{y,c>0}{>} c^2$.
(c) ist wahr, weil $(a-b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 > a^2 + b^2$ eine falsche Aussage ist.
(d) ist wahr. Sei $a = b + x$ und $d = c + y$ mit $x, y > 0$. Dann gilt $a - c = b + x - c \overset{x,y>0}{>} b - y - c = b - d$.
(e) ist falsch. Sei $a = b = c = -d = 1$, dann gilt zwar $ab = 1 > -1 = cd$ aber es folgt $\frac{a}{d} = -1 < 1 = \frac{c}{b}$.

Aufgabe 1.5.
Man gebe die Wahrheitstafeln folgender Aussagenverbindungen an:

(a) $p \wedge (q \vee r)$

(b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

(d) $(p \vee q) \wedge (\overline{(r \vee q)})$

Lösung zu Aufgabe 1.5.

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(p \vee q) \wedge (\overline{(r \vee q)})$
w	w	w	w	w	w	f
w	w	f	w	f	w	f
w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	f
f	w	f	f	f	w	f
f	f	w	f	w	f	f
f	f	f	f	f	f	f

Aufgabe 1.6.
$Z(x, y)$ sei eine Aussageform. Bilden sie die Negation von:

(a) $\forall x \forall y : Z(x, y)$

(b) $\forall x \exists y : Z(x, y)$

(c) $\exists x \forall y : Z(x, y)$

(d) $\exists x \exists y : Z(x, y)$

Lösung zu Aufgabe 1.6.
(a) $\exists x \exists y : \neg Z(x, y)$
(b) $\exists x \forall y : \neg Z(x, y)$
(c) $\forall x \exists y : \neg Z(x, y)$
(d) $\forall x \forall y : \neg Z(x, y)$

Aufgabe 1.7.
Es seien x und y Variablen für reelle Zahlen. Bestimmen sie die Wahrheitswerte von:

(a) $\forall x \forall y : y = x^2$

(b) $\forall x \exists y : y = x^2$

(c) $\exists x \forall y : y = x^2$

(d) $\exists x \exists y : y = x^2$

(e) $\forall y \exists x : y = x^2$

(f) $\exists y \forall x : y = x^2$

Lösung zu Aufgabe 1.7.
(a) ist falsch. Für $x = 1$ und $y = 2$ gilt dies offensichtlich nicht.
(b) ist richtig. Das Quadrat einer reellen Zahl ist wieder reell.
(c) ist falsch. Für $y = 1$ und $y = 4$ müsste es demnach ein gleiches x geben, sodass $y = x^2$ gilt.
(d) ist richtig. Z.B. $x = y = 1$.
(e) ist falsch. Für $y = -1$ $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$
(f) ist falsch. Für $x = 1$ und $x = 2$ müsste es demnach ein gleiches y geben, sodass $y = x^2$ gilt.

1.4 Aufgabenserie und zugehörige Lösungen

Aufgabe 1.1.
Übersetzen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich und sinnvoll in mathematische Aussagen!

(a) Alle natürlichen Zahlen haben einen Nachfolger in den natürlichen Zahlen. (Die Menge der natürlichen Zahlen ist also induktiv)

(b) Jede natürliche Zahl ist entweder durch zwei teilbar oder die natürliche Zahl plus eins ist durch zwei teilbar. (die natürlichen Zahlen besitzen also eine Binärdarstellung)

(c) Jede reelle Zahl, ohne die Null, ist entweder größer als Null oder ihr Negatives ist größer als Null. (Anordnungsaxiom)

(d) Für zwei beliebige reelle Zahlen gilt, dass man die Reihenfolge der Addition vertauschen kann und trotzdem das gleiche Ergebnis herauskommt. (Kommutativgesetz)

(e) Die Abbildung f ist eine Abbildung von den reellen in die ganzen Zahlen, die jeder reellen Zahl ihrer abgerundete ganzen Zahl zuordnet. (Gaußsche Klammerfunktion)

Lösung zu Aufgabe 1.1.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n+1 = m$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m \quad \dot{\vee} \quad n+1 = 2m$ (anstatt $\dot{\vee}$ kann man auch $\vee$ verwenden)

(c) $\forall x \in \mathbb{R}/\,\{0\} : x > 0 \quad \dot{\vee} \quad x < 0$ (anstatt $\dot{\vee}$ kann man auch $\vee$ verwenden)

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

(e) $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Aufgabe 1.2.
Bilden Sie die Negation der in der vorherigen Aufgabe hergeleiteten Ausdrücke!

Lösung zu Aufgabe 1.2.

(a) $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n+1 = m) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n+1 \neq m)$

(b) $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m \quad \dot{\vee} \quad n+1 = 2m) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : n \neq 2m \quad \wedge \quad n+1 \neq 2m)$

(c) $\neg(\forall x \in \mathbb{R}/\,\{0\} : x > 0 \quad \dot{\vee} \quad x < 0) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}/\,\{0\} : x \not> 0 \quad \wedge \quad x \not< 0)$

(d) $\neg(\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x) \Leftrightarrow (\exists x, y \in \mathbb{R} : x + y \neq y + x)$

(e) $\neg(\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow (\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \nrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \nrightarrow \lfloor x \rfloor)$

Aufgabe 1.3.
Geben Sie die Wahrheitstafeln der folgenden Ausdrücke an!

(a) $p \wedge ((q \wedge s) \Rightarrow p)$

(b) $(q \Rightarrow (q \wedge p)) \Leftrightarrow (s \wedge p)$

(c) $(s \vee p) \Rightarrow (s \vee q)$

(d) $(\overline{p \vee s}) \Rightarrow (\overline{p \wedge q})$

Lösung zu Aufgabe 1.3.
Es gilt $p \wedge (q \wedge r \Rightarrow p) = p$ und $(\overline{p \vee s}) \Rightarrow (\overline{p \wedge q})$ ist immer wahr und weiterhin:

p	q	s	$p \wedge ((q \wedge s) \Rightarrow p)$	$(q \Rightarrow (q \wedge p)) \Leftrightarrow (s \wedge p)$	$(s \vee p) \Rightarrow (s \vee q)$	$(\overline{p \vee s}) \Rightarrow (\overline{p \wedge q})$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	f	f	w	w
f	f	f	f	f	w	w

Aufgabe 1.4.
Bilden Sie die Negation der folgenden Ausdrücke!

(a) (i) $\forall x \exists y : \neg A(x, y)$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$

(b) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Prüfen Sie welche der folgenden Ausdrücke wahr oder falsch sind und **begründen** Sie ihre Entscheidung!

(i) $\forall n \forall m : n = m$

(ii) $\forall n \exists m : n = 2m$

(iii) $\exists n \forall m : n + m = 0$

(iv) $\forall n \exists m : n = m + 1$

(v) $\exists n \exists m : n \cdot m = n + m$

Lösung zu Aufgabe 1.4.

(a) (i) $\neg(\forall x \exists y : \neg A(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y : A(x, y)$

(ii) $\exists \epsilon > 0 \, \forall N(\epsilon) \in \mathbb{N} : ((n \geq N) \Rightarrow (|a_n - a| \geq \epsilon))$

(genauer genommen gilt dies für die Grenzwertaussage, also das was uns eigentlich interessiert), bildet man rein aussagentechnisch die Lösung, also ohne Berücksichtigung des Inhalts, so muss es folgendermaßen heißen:

$\exists \epsilon > 0 \, \forall N(\epsilon) \in \mathbb{N} : ((n \geq N) \wedge (|a_n - a| \geq \epsilon))$

(b) (i) Falsch, eine beliebige ganze Zahl entspricht nicht allen anderen ganzen Zahlen, betrachte $n = 2$ und $m = 3$.

(ii) Falsch, z.B. zu $n = 3$ gibt es keine ganze Zahl m mit $2m = n$.

(iii) Falsch, es existiert keine Zahl die man mit einer beliebigen anderen ganzen Zahl addieren kann und immer das selbe herauskommt. Angenommen eine solche Zahl würde existieren, also $n + m = 0$, dann gilt für den Nachfolger von m, dass $n + (m + 1) = 1$, was einen Widerspruch zu der Behauptung darstellt.

(iv) Richtig, siehe Aufgabe 1.1.(a) und der Tatsache, dass sich die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen und den natürlichen Zahlen mal minus Eins zusammensetzen.

(v) Richtig, man nehme z.B. $n = m = 2$.

2 Mengen

2.1 Wiederholung - Mengenlehre

2.1.1 Mengenbegriff

Als Begründer der Mengenlehre gilt Georg Cantor (1845 – 1918). Die Bedeutung der von ihm verwendeten Begriffsbildungen wurde erst später erkannt. Die Mengenlehre hat nahezu alle Gebiete der Mathematik entscheidend vorangebracht bzw. überhaupt erst ermöglicht und ist heute zu einem unverzichtbaren Handwerkszeug der Mathematik und deren Anwendungen geworden.

2.1.2 Elementbeziehung

Der grundlegende Begriff der Mengenlehre ist die Elementbeziehung. Eine **Menge** A ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte a unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge. Für „ a ist Element von A “ bzw. „ a ist nicht Element von A “ schreibt man „ $a \in A$ “ bzw. „ $a \notin A$ “. Mengen können beschrieben werden durch Aufzählung aller ihrer Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M = \{a, b, c\}$ oder $U = \{1, 3, 5, \ldots\}$, oder durch eine definierende Eigenschaft, die genau den Elementen der Menge zukommt. Z.B. wird die Menge U der ungeraden natürlichen Zahlen durch $U = \{x \mid x \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl } \}$ beschrieben. Für die Zahlenbereiche sind folgende Bezeichnungen üblich:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{Menge der natürlichen Zahlen,} \\
\mathbb{Z} & = & \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} & \text{Menge der ganzen Zahlen,} \\
\mathbb{Q} & = & \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge g \neq 0\right\} & \text{Menge der rationalen Zahlen,} \\
\mathbb{R} & & & \text{Menge der rellen Zahlen,} \\
\mathbb{C} & & & \text{Menge der komplexen Zahlen.}
\end{array}
$$

Es gilt das Extensionalitätsprinzip für Mengen:
Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

So sind z.B. die Mengen $\{3, 1, 7, 2\}$ und $\{1, 2, 3, 7\}$ gleich.

2.1.3 Teilmengen

Es erweist sich als sinnvoll, die leere Menge $\emptyset$, die kein Element enthält, einzuführen. Wegen des Extensionalitätsprinzips gibt es nur eine solche Menge. Beispielsweise ist die Menge $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2x + 2 = 0\}$ leer.

Sind A, B Mengen und gilt $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$, so heißt A Teilmenge von B. Dieser Sachverhalt wird mit $A \subseteq B$ bezeichnet. (Damit ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge, d.h. $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.)
Zwei Mengen sind demnach genau dann gleich, wenn jede Teilmenge der anderen ist:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Diese Tatsache wird häufig zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen benutzt.
Die Menge aller Teilmengen einer Menge M nennt man **Potenzmenge** von M und bezeichnet sie mit $\mathscr{P}(M)$, d.h. $\mathscr{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$. Damit gilt $\emptyset \in \mathscr{P}(M)$ für jede Menge M. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M heißt **Kardinalzahl** von M und wird mit $\operatorname{card}(M)$ oder $|M|$ bezeichnet. Auch unendlichen Mengen können Kardinalzahlen zugeordnet werden.

2.1.4 Operationen mit Mengen

2.1.5 Venn– Diagramm

Zur Veranschaulichung von Mengen und Mengenoperationen benutzt man Venn-Diagramme. Dabei werden Mengen durch ebene Figuren dargestellt.

2.1.6 Vereinigung, Durchschnitt, Komplement

Durch Mengenoperationen werden aus gegebenen Mengen auf verschiedene Weise neue Mengen gebildet:
Seien A und B Mengen. Die Vereinigung (Bezeichnung $A \cup B$) bzw. der Durchschnitt (Bezeichnung $A \cap B$) ist durch

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \qquad \text{bzw.} \qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

definiert. Die Mengen A und B heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$.
Betrachtet man nur Teilmengen einer vorgegebenen Grundmenge M, so ist das Komplement von A bezüglich M durch

$$C_M(A) = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$$

definiert; ist die Grundmenge M aus dem Zusammenhang klar, wird dafür auch $\overline{A}$ geschrieben.

2.1.7 Grundgesetze der Mengenalgebra

Die eingeführten Mengenoperationen haben analoge Eigenschaften wie die Junktoren in der Aussagenlogik. Es gelten folgende Grundgesetze der Mengenalgebra:

(a) **Assoziativgesetze**

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C),\\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C).\end{aligned}$$

(b) **Kommutativgesetze**

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A,\\ A \cup B &= B \cup A.\end{aligned}$$

(c) **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C),\\ A \cap (B \cup C) &= (A \cup C) \cap (B \cup C).\end{aligned}$$

(d) **Absorptionsgesetze**

$$\begin{aligned}A \cap (A \cup C) &= A,\\ A \cup (A \cap B) &= A.\end{aligned}$$

(e) **Idempotenzgesetze**

$$\begin{aligned}A \cap A &= A,\\ A \cup A &= A.\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}A \cap \overline{A} &= \emptyset,\\ A \cup \overline{A} &= M.\end{aligned}$$

(g) de Morgan**sche Regeln**

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B},\\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}.\end{aligned}$$

(h) **Gesetze für** $A \subset M$ **und** M **Universalmenge**

$$\begin{aligned}A \cap M &= A,\\ A \cup \emptyset &= A,\\ A \cap \emptyset &= \emptyset,\\ A \cup M &= M,\\ \overline{M} &= \emptyset,\\ \overline{\emptyset} &= M.\end{aligned}$$

(i) **Doppelte Negation**

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Diese Tabelle erhält man unmittelbar aus den Grundgesetzen der Aussagenlogik, wenn man folgende Ersetzungen vornimmt: $\wedge$ durch $\cap$, $\vee$ durch $\cup$, w durch M und f durch $\emptyset$.

2.1.8 Weitere Mengenoperationen

(a) **Differenz:** Außer den oben eingeführten Mengenoperationen werden noch die Differenz $A \setminus B$ und die symmetrische Differenz $A \triangle B$ zweier Mengen A und B erklärt:

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ und $A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.

Offensichtlich gilt $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(b) **Kartesisches Produkt:** Das kartesische Produkt $A \times B$ ist durch

$$A \times B \;=\; \{(a,b) \;\mid\; a \in A \wedge b \in B\}$$

definiert. Die Elemente (a,b) von $A \times B$ heißen **geordnete Paare** und sind durch

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

charakterisiert. Entsprechend sind die Elemente des kartesischen Produkts $A_1 \times \ldots \times A_n$ n-Tupel, d.h.

$$A_1 \times \ldots \times A_n \;=\; \{(a_1, \ldots, a_n) \;\mid\; a_i \in A_i,\; i = 1, \ldots, n\}.$$

Das n-fache kartesische Produkt einer Menge A mit sich selbst wird mit A^n bezeichnet.

2.1.9 Mächtigkeit von Mengen

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge haben wir als Kardinalzahl bezeichnet. Dieser Anzahlbegriff soll auf unendliche Mengen übertragen werden.

2.1.10 Mächtigkeit, Kardinalzahl

Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**, falls es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung gibt. Jeder Menge A wird eine Kardinalzahl $|A|$ oder $\mathrm{card}(A)$ zugeordnet, so dass gleichmächtige Mengen die gleiche Kardinalzahl erhalten. Eine Menge ist zu ihrer Potenzmenge niemals gleichmächtig, so dass es keine größte Kardinalzahl gibt.

. . . .

2.2 Übungsaufgaben und Lösungen

Aufgabe 2.1.
Entscheiden Sie, bei welchen der folgenden Ausdrücke es sich um Mengen handelt und begründen sie ihre Entscheidung, falls dem nicht so ist.

(a) $\{1, 7, 9, 10\}$

(b) $\{A\}$

(c) (r, q, s)

(d) $\{0, 12, 5, 17, 0, 3\}$

(e) $\{\emptyset, \{1, 2\}, a\}$

(f) $\{\{\emptyset\}\}$

(g) $[4, Z, w]$

Lösung zu Aufgabe 2.1.
Bei den Ausdrücken $(a), (b), (e), (f)$ handelt es sich um reguläre Mengen. Bei (c) handelt es sich um keine Menge sondern um ein Tripel. Bei (d) kommt die 0 doppelt vor und bei (g) handelt es sich um eine Aufzählung bzw. Liste.

Aufgabe 2.2.
Bestimmen Sie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$!

(a) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x = x^n\}$

(b) $A_n = \{a \in \mathbb{Z} : |a - 11| = n\}$

(c) $A_n = \{a \in \mathbb{Z} : (-a)^n = a^n\}$

Lösung zu Aufgabe 2.2.

(a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0, 1\}$

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}/\{11\}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$

(c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$

Aufgabe 2.3.
Untersuchen Sie die Richtigkeit der folgenden Gleichungen für drei Mengen A, B und C (Begründen Sie ihre Antworten mit einem Beweis oder Gegenbeispiel):

$$
\begin{aligned}
&(a)\;\; (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B;\\
&(b)\;\; A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B);\\
&(c)\;\; A \setminus B = A \cap (A \setminus B)\\
&(d)\;\; A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 2.3.

(a) zu zeigen: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap C &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \cap C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus B \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \setminus B &\Rightarrow x \in A \cap C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C \end{aligned}$$

(b) zu zeigen: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A \vee x \in A \cap B \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A) \vee x \in A \cap B \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

(c) zu zeigen: $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in A \setminus B \\ &\Rightarrow x \in A \cap (A \setminus B), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \setminus B) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in A \setminus B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \setminus B \end{aligned}$$

(d) Gegenbeispiel: $A = \{1, 2\}$; $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

Aufgabe 2.4.
Geben sie die folgenden Mengen reeller Zahlen in aufzählender Schreibweise an!

(a) $A := \{x : x + 3 = 5\}$

(b) $B := \{x : x^2 - 3 = 6\}$

(c) $C := \{x : x^3 = -8\}$

(d) $D := \{x : (x-3)^2 = 36\}$

(e) $E := \{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$

Lösung zu Aufgabe 2.4.

(a) $A = \{2\}$

(b) $B = \{-3, 3\}$

(c) $C = \{-2\}$

(d) $D = \{-3, 9\}$

(e) $E = \{0, 1, 2\}$

Aufgabe 2.5.
Sei $M := \{1, 2\}$, $N := \{2, 3, 4\}$ und $O := \{1, 3, 5\}$, entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $M \subset N$

(b) $N \subset M$

(c) $N = M$

(d) $N \neq M$

(e) $\{2, 4\} \subset N$

(f) $2 \in M$

(g) $3 \subset N$

(h) $\{2, 3, 4, 5\} \subset N$

(i) $M \cap N \cap O = \emptyset$

Lösung zu Aufgabe 2.5.

(a) Falsch, weil $1 \notin N$.

(b) Falsch, weil $3, 4 \notin M$.

(c) Falsch, folgt unmittelbar aus (a) und (b).

(d) Richtig, folgt aus (a) und (b).

(e) Richtig.

(f) Richtig

(g) (g) ist falsch weil 3 keine Menge ist.

(h) Falsch, $5 \notin N$.

(i) Richtig, weil kein Element in allen Mengen vorhanden ist.

Aufgabe 2.6.
Bestimmen sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{1,3,5,7\} \cup \{2,4,6,8\}$

(b) $B := \{b,c,a\} \cup \{a,d\}$

(c) $C := \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \cup \{3,5,7\}$

(d) $D := \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap \{\gamma,\delta,\varepsilon\}$

(e) $E := \{1,3,5,7,...\} \cap \{0,2,4,6,...\}$

(f) $F := \cup_{k=1}^{\infty} M_k$ mit $M_k := \{-k,-(k-1),...,0,1,2,3,...\}$

(g) $G := \cap_{k=1}^{\infty} M_k$ mit $M_k := \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, ...\right\}$

Lösung zu Aufgabe 2.6.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 8\}$

(b) $B = \{a,b,c,d\}$

(c) $C = A \setminus \{8\}$

(d) $D = \{\gamma,\delta\}$

(e) $E = \emptyset$

(f) $F = \mathbb{Z}$

(g) $G = \{0,1\}$

Aufgabe 2.7.
Bestimmen Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen und geben Sie ihre Mächtigkeit an.

(a) $A := \emptyset$

(b) $B := \{1\}$

(c) $C := \{1, 2\}$

(d) $D := \{1, 2, 3\}$

(e) $E := \{\emptyset\}$

Lösung zu Aufgabe 2.7.

(a) $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}\,,\ |\mathscr{P}(A)| = 1$

(b) $\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}\,,\ |\mathscr{P}(B)| = 2$

(c) $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\,, \{2\}\,, \{1,2\}\}\,,\ |\mathscr{P}(C)| = 4$

(d) $\mathscr{P}(D) = \{\emptyset, \{1\}\,, \{2\}\,, \{3\}\,, \{1,2\}\,, \{1,3\}\,, \{2,3\}\,, \{1,2,3\}\}\,,\ |\mathscr{P}(D)| = 8$

(e) $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,,\ |\mathscr{P}(E)| = 2$

Aufgabe 2.8.
Es werde die Universalmenge $M = \{i|i = 1(1)15\}$ und ihre Teilmengen $A = \{j|j = 1(2)15\}$, $B = \{k|k = 6(2)12\}\,, C = \{2, 3, 5, 12, 13\}$ betrachtet. Bestimmen sie

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $\overline{A}$

(d) $\overline{C}$

(e) $\overline{C} \cap B$

(f) $\overline{B} \cap C$

(g) $M \backslash \overline{B}$

(h) $C \backslash A$

(i) $(M \backslash \overline{C}) \cap C$

(j) $B \backslash \overline{(A \cup C)}$

Lösung zu Aufgabe 2.8.

(a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$

(b) $A \cap B = \emptyset$

(c) $\overline{A} = \{j|j = 2(2)15\}$

(d) $\overline{C} = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15\}$

(e) $\overline{C} \cap B = \{6, 8, 10\}$

(f) $\overline{B} \cap C = \{2, 3, 5, 13\}$

(g) $M \backslash \overline{B} = B$

(h) $C \backslash A = \{2, 12\}$

(i) $(M \backslash \overline{C}) \cap C = C$

(j) $B \backslash \overline{(A \cup C)} = \{12\}$

Aufgabe 2.9.
Gegeben sind im $\mathbb{R}$ die Mengen $A = \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x < 5\}$, $B = [0, 5]$, $C = (-1, \infty)$. Ermitteln sie die folgenden Mengen:

(a) $A \cup B \cup C$

(b) $A \cap C$

(c) $B \cup C$

(d) $\overline{A} \cap B$

(e) $\overline{B} \cap A$

(f) $B \backslash C$

(g) $A \cap \overline{C}$

(h) $\overline{B} \cup C$

(i) $(A \cup \overline{B}) \cap C$

Lösung zu Aufgabe 2.9.

(a) $A \cup B \cup C = [-7, \infty)$

(b) $A \cap C = (-1, 5)$

(c) $B \cup C = C$

(d) $\overline{A} \cap B = \{5\}$

(e) $\overline{B} \cap A = [-7, 0)$

(f) $B \backslash C = \emptyset$

(g) $A \cap \overline{C} = [-7, -1]$

(h) $\overline{B} \cup C = \mathbb{R}$

(i) $(A \cup \overline{B}) \cap C = C \backslash \{5\}$

Aufgabe 2.10.
A, B, C, D seien beliebige Mengen. Untersuchen Sie die folgenden Gleichungen und begründen Sie, welche der Beziehungen wahr sind und welche falsch sind!

(a) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

(b) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$

(c) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cup C)$

(d) $A \cap (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cap C)$

(e) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

Lösung zu Aufgabe 2.10.

(a) zu zeigen: $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) &\Rightarrow x \in (A \backslash B) \vee x \in (B \backslash A) \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\Rightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin A) \\ &\Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\ &\Rightarrow x \in ((A \cup B) \backslash (A \cap B)), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B) &\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \vee x \in B \wedge ((x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \in B \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \end{aligned}$$

(b) zu zeigen: $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$
Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \backslash C) &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \backslash C \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin C \vee x \in B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \backslash A \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \backslash (C \backslash A), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)\backslash(C\backslash A) &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin C\backslash A \vee x \in B \wedge x \notin C\backslash A \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \wedge x \in C \wedge x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B\backslash C \\ &\Rightarrow x \in (A \cup (B\backslash C)) \end{aligned}$$

(c) zu zeigen: $A \cup (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash(A \cup C)$
Gegenbeispiel: Sei $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}, C = \{3\}$.

(d) zu zeigen: $A \cap (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash(A \cap C)$
Gegenbeispiel: Sei $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}, C = \{3\}$.

(e) zu zeigen: $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$
Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A\backslash(B\backslash C) &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B\backslash C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \in A \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in A\backslash B \vee x \in A \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A\backslash B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in A\backslash B \cup A \cap C &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \in A \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in C \vee x \notin B) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B\backslash C \\ &\Rightarrow x \in A\backslash(B\backslash C) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.11.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{D} : S(x) = T(x)\}$ für die folgenden Gleichungen. Dabei seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $\sqrt{x} = 5$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,

(b) $\frac{x^3}{x} = 4$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $bx + c = 0$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine lineare Gleichung),

(d) $x^2 = a$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied),

(e) $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine quadratische Gleichung),

(f) $\frac{x^2-1}{x-1} = -x$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

(g) $\sqrt{x} = 2 - x$ auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.11.

(a) $L = \{25\}$.

(b) $L = \{-2, 2\}$.

(c) Fall 1: $b \neq 0$: $L = \{-c/b\}$

Fall 2: $b = 0$

(i) $b = 0$, $c = 0$: $L = \mathbb{R}$,

(ii) $b = 0$, $c \neq 0$: $L = \emptyset$.

(d) Falls $a < 0$ ist $L = \emptyset$, falls $a = 0$ ist $L = \{0\}$ und falls $a > 0$ ist $L = \{-\sqrt{a}, +\sqrt{a}\}$.

(e) Wir setzen $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$. Dann können wir äquivalent umformen:

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x^2 + px + q\right) \;=\; a\left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right) \;=\; 0$$

Da $a \neq 0$, ist dies zusammen mit der ersten binomischen Formel äquivalent zu

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \frac{p^2}{4} - q$$

Setzen wir $D := \frac{p^2}{4} - q$, gelangen wir zu den folgenden Fallunterscheidungen

(i) $D < 0$: $L = \emptyset$,

(ii) $D = 0$: $L = \{-\frac{p}{2}\}$,

(iii) $D > 0$: $L = \{-p/2 - \sqrt{D}, -p/2 + \sqrt{D}\}$.

(f) Multiplikation mit $x - 1$, da dieser Term auf $\mathbb{D}$ immer $\neq 0$ ist, ist eine äquivalente Umformung:

$$x^2 - 1 = -x^2 + x \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{R}$ wäre $\{-\frac{1}{2}, 1\}$. Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist jedoch nur $L = \{-\frac{1}{2}\}$.

(g) Quadrieren liefert $x = 4 - 4x + x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0 = 4 - 5x + x^2$.
Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist zunächst $\{1, 4\}$. Da Quadrieren jedoch möglicherweise die Lösungsmenge vergrößert hat, testen wir mit der ursprünglichen Gleichung:

$x = 1$: $\sqrt{1} = 2 - 1$ wahr,

$x = 4$: $\sqrt{4} = 2 - 4$ falsch.

Damit ist die Lösungsmenge der Ursprungsgleichung $L = \{1\}$.

Aufgabe 2.12.
Prüfen Sie für den allgemeinen Fall, ob die folgenden Aussagen wahr sind und fertigen Sie jeweils Skizzen an:

(a) $(A \setminus B) \cap C \;=\; (A \cap C) \setminus B\,,$

(b) $A \setminus B \;=\; A \cap (A \setminus B)\,,$

(c) $A \;=\; (A \setminus B) \cup B\,,$

(d) $A \cup B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

Lösung zu Aufgabe 2.12.

Im allgemeinen Fall sind von den Aussagen

(a) $(A \setminus B) \cap C \;=\; (A \cap C) \setminus B\,,$

(b) $A \setminus B \;=\; A \cap (A \setminus B)\,,$

(c) $A \;=\; (A \setminus B) \cup B\,,$

(d) $A \cup B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

alle bis auf (c) richtig, denn (c) gilt nur, falls zusätzlich $B \subseteq A$ gefordert wird.
Wir benutzen dazu, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Demnach folgen:

(a) Für ein beliebiges Element x gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cap C \;&\Leftrightarrow\; x \in (A \setminus B) \wedge x \in C\\
&\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in C\\
&\Leftrightarrow\; x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \in C)\\
&\Leftrightarrow\; x \in A \wedge (x \in C \wedge x \notin B)\\
&\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \in C) \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow\; x \in (A \cap C) \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow\; x \in (A \cap C) \setminus B.
\end{aligned}$$

(b) Für ein beliebiges Element x gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus B \;&\Leftrightarrow\; x \in A \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \in A) \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow\; x \in A \wedge (x \in A \wedge x \notin B)\\
&\Leftrightarrow\; x \in A \wedge x \in (A \setminus B)\\
&\Leftrightarrow\; x \in A \cap (A \setminus B).
\end{aligned}$$

(d) Für ein beliebiges Element x gelten die folgenden Äquivalenzen

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \;\Leftrightarrow\; x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \Big(\big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\big) \cup \big((A \cap B) \cup (B \setminus A)\big)\Big)\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\big) \vee x \in \big((A \cap B) \cup (B \setminus A)\big)\\
&\Leftrightarrow \quad \big(x \in (A \setminus B) \vee x \in (A \cap B)\big) \vee \big(x \in (A \cap B) \vee x \in (B \setminus A)\big)\\
&\Leftrightarrow \quad \big((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\big) \vee \big((x \in B \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\big)\\
&\Leftrightarrow \quad \big(x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)\big) \vee \big(x \in B \wedge (x \in A \vee x \notin A)\big)\\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B\\
&\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup B).
\end{aligned}
$$

(c) Man kann zeigen, dass $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
Gilt nun im Spezialfall $B \subseteq A$, so folgen $B \setminus A = \emptyset$, $A \cap B = B$ sowie $A \cup B = A$.
Setzt man diese Beziehungen in (d) ein, erhält man (c).

2.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 2.1.
Beweisen oder Widerlegen Sie! Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze an!

(a) $(A \cup (B \backslash C)) = (B \backslash (A \cup C)) \cup A$

(b) $(A \cup C) \backslash B = (A \backslash B) \cup (C \backslash B)$

(c) $A = (A \cup B \cup C) \backslash ((B \cup C) \backslash A)$

(d) $B \cap C = (B \cup C) \backslash (A \cap (B \cup C))$

Lösung zu Aufgabe 2.1.

(a) Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup (B \backslash C)) &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \backslash C \\ &\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin C \wedge x \notin A) \\ &\Rightarrow (x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C) \vee (x \in A) \\ &\Rightarrow (x \in B \wedge (x \notin A \cup C)) \vee (x \in A) \\ &\Rightarrow x \in (B \backslash (A \cup C)) \vee x \in A \\ &\Rightarrow x \in (B \backslash (A \cup C)) \cup A, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in (B \backslash (A \cup C)) \cup A &\Rightarrow x \in (B \backslash (A \cup C)) \vee x \in A \\ &\Rightarrow (x \in B \wedge (x \notin A \cup C)) \vee (x \in A) \\ &\Rightarrow (x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C) \vee (x \in A) \\ &\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin C \wedge x \notin A) \\ &\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in (A \cup (B \backslash C)) \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \backslash C \end{aligned}$$

(b) Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup C) \backslash B &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \in C \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (C \backslash B) \end{aligned}$$

(c) Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} & x \in (A \cup B \cup C) \backslash ((B \cup C) \backslash A) \\ \Rightarrow\ & (x \in A \wedge x \notin ((B \cup C) \backslash A)) \vee (x \in B \wedge x \notin ((B \cup C) \backslash A)) \vee (x \in C \wedge x \notin ((B \cup C) \backslash A)) \\ \Rightarrow\ & x \in A \vee x \in B \wedge x \in A \vee x \in C \wedge x \in A \\ \Rightarrow\ & x \in A, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \in B \\ &\Rightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin ((B \cup C)\backslash A)) \vee (x \in B \wedge x \notin ((B \cup C)\backslash A)) \vee (x \in C \wedge x \notin ((B \cup C)\backslash A)) \\ &\Rightarrow \quad x \in (A \cup B \cup C)\backslash((B \cup C)\backslash A) \end{aligned}$$

(d) Gegenbeispiel: $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}, C = \{1\}$.

Aufgabe 2.2.
Seien $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, B = \{2,4,6,8,10\}, C = \{1,3,5,7,9\}, D = \{5,8\}, E = \{3,5,9\}$. Bilden Sie die folgenden Ausdrücke!

(a) $B\backslash((C \cup D) \cup (A\backslash E))$

(b) $((A\backslash B) \cup D)\backslash E$

(c) $((E \cup D) \cap A) \cup B$

(d) $(A\backslash(B\backslash E)) \cup (C\backslash E)$

(e) $A\backslash(((E \cup D)\backslash C) \cup B)$

Lösung zu Aufgabe 2.2.

(a) $B\backslash((C \cup D) \cup (A\backslash E)) = A\backslash E = \emptyset$

(b) $((A\backslash B) \cup D)\backslash E = \{1,7,8\}$

(c) $((E \cup D) \cap A) \cup B = \{2,3,4,5,6,8,9,10\}$

(d) $(A\backslash(B\backslash E)) \cup (C\backslash E) = C = \{1,3,5,7,9\}$

(e) $A\backslash(((E \cup D)\backslash C) \cup B) = C = \{1,3,5,7,9\}$

Aufgabe 2.3.
Bestimmen Sie $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ für

$$\begin{aligned} &(a) \quad A_n = \{x \in \mathbb{Z} : -n \le x \le n\}; \\ &(b) \quad A_n = \{3n-2, 3n-1\}; \\ &(c) \quad A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.3.

(a) $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0,1,-1\}$;

(b) $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{x \in \mathbb{N} : \frac{x}{3} \notin \mathbb{N}\right\}$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$;

(c) $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{x \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit x} = \frac{1}{n}\right\}$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}$.

3 Kombinatorik

3.1 Wiederholung - Theorie: Binomischer Lehrsatz

Binomischer Lehrsatz: Für alle reellen Zahlen a, b und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0.$$

3.2 Wiederholung - Theorie: Kombinatorik

3.2.1 Fakultät und Binomialkoeffizienten

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k, \qquad 0! = 1.$$

Der Binomialkoeffizient ist definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

3.2.2 Tupel

Im Gegensatz zu einer Menge, bei der es nicht auf die Reihenfolge der enthaltenen Elemente ankommt, ist bei Tupeln die Reihenfolge der Elemente wichtig. Weiterhin kann ein Element auch „mehrfach“in einem Tupel vorkommen. Allgemien sprechen wir von k-Tupel, welche k Elemente beinhalten. Speziell im Fall von $k = 2$ sprechen wir von einem geordneten Paar und bei $k = 3$ von einem Tripel.

Zwei Tupel $(a_1, ..., a_k)$ und $(b_1, ..., b_k)$ sind genau dann identisch, wenn $a_i = b_i$ für alle $i = 1, ..., k$.

3.2.3 Tupel und Mengen

Selbstverständlich kann man aus einer n-elementigen Menge verschiedene Tupel bilden. Dabei müssen wir unterscheiden, ob Elemente der Menge mehrfach vorkommen dürfen. Dadurch ist es uns beispielsweise möglich die Wahrscheinlichkeiten von bestimmten Ereignissen zu berechnen.

Permutation ohne Wiederholung

Sei eine Grundmenge G mit n Elementen gegeben. Wir betrachten die Menge M , der n - Tupel in denen jedes Element von G genau einmal vorkommt. Dann hat M genau $n!$ Elemente.

Permutation mit Wiederholung

Wir betrachten eine Grundmenge $\{w_1, ..., w_m\}$ mit m verschiedenen Elementen. Das Element w_l komme genau $k_l \geq 0$ mal vor, $l = 1, ..., m$, d.h. wir betrachten die Menge

$$M = \{(a_1, ..., a_n) : |\{j : a_j = w_l\}| = k_l, l = 1, ..., m\}$$

und es sei $n = k_1 + ... + k_m$. Dann gilt:

$$|M| = \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_m!}$$

Wenn $k_l = 0$ oder $k_l = 1$ ist, so $k_l! = 1$ und der Faktor im Nenner kann einfach weggelassen werden.

3.2.4 Auswahlproblem

Wir betrachten nun Auswahlprobleme. Gegeben sei eine Grundmenge mit n Elementen. Um konkret zu sein, nehmen wir $G = \{1, ..., n\}$. Wir betrachten die Auswahl von „Teilen "mit k „Einträgen"mit oder ohne Betrachtung der Reihenfolge und mit oder ohne Zulassung von Wiederholung. Wir geben eine konkrete Interpretation der jeweiligen Auswahlprobleme, bezogen auf unsere Grundmenge, an, und beantworten die Frage:

Wie viele Moglichkeiten gibt es?

	Reihenfolge beachten	keine Reihenfolge beachten
Ohne Wiederholung	**Variation ohne Wiederholung** Wie viele k-Tupe von verschiedenen Elementen aus G gibt es? Wie viele Elemente hat $\{(i_1, ..., i_k) : i_1, ..., i_k \in G, i_l \neq i_m$ für $l \neq m\}$? **Lösung:** $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = k! \binom{n}{k}$	**Kombination ohne Wiederholung** Wie viele geordnete k-Tupel von verschiedenen Elementen aus G gibt es? Wie viele Elemente hat $\{(i_1, ..., i_k) : i_1, ..., i_k \in G, i_1 < ... < i_k\}$? **Lösung:** $\binom{n}{k}$
mit Wiederholung	**Variation mit Wiederholung** Wie viele k-Tupel von Elementen aus g gibt es? Wie viele Elemente hat $\{(i_1, ..., i_k) : i_1, ..., i_k \in G\} = G^k$? **Lösung:** n^k	**Kombination mit Wiederholung** Wie viele geordnete k-tupel von Elementen aus G gibt es? Wie viele Elemente hat $\{(i_1, ..., i_k) : i_1, ..., i_k \in G,$ mit $i_1 \leq i_2 \leq ..., \leq i$ **Lösung:** $\binom{n+k-1}{k}$

3.3 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 3.1.
Man vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $\sum_{k=0}^{4n} \left(5-(-2)^k\right)\binom{4n}{k}$,

(b) $\dfrac{3\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}}{\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}}$.

Lösung zu Aufgabe 3.1.

(a) Der Ausdruck lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4n}\left(5-(-2)^k\right)\binom{4n}{k} &= 5\cdot\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}-\sum_{k=0}^{4n}(-2)^k\binom{4n}{k}\\ &= 5\cdot\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}1^k1^{4n-k}-\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}(-2)^k1^{4n-k}\\ &= 5\cdot(1+1)^{4n}-(-2+1)^{4n}\\ &= 5\cdot(2^4)^n-((-1)^4)^n = 5\cdot 16^n-1.\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten zunächst den Nenner. Dieser lässt sich vereinfachen zu

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^k1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = (2^2)^n = 4^n.$$

Für den Zähler ergibt sich

$$3\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k} = 3\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 3\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} = 3(-1+1)^n = 0.$$

Demnach ist der gesamte Ausdruck 0.

Aufgabe 3.2.
Man vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

Lösung zu Aufgabe 3.2.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$.

Aufgabe 3.3.
Man vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $\sum_{k=0}^{4n} \left(5 - (-2)^k\right) \binom{4n}{k}$,

(b) $\dfrac{3 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k}}{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}}$.

Lösung zu Aufgabe 3.3.

(a) Der Ausdruck lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{4n} \left(5 - (-2)^k\right) \binom{4n}{k} &= 5 \cdot \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} - \sum_{k=0}^{4n} (-2)^k \binom{4n}{k} \\
&= 5 \cdot \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} 1^k 1^{4n-k} - \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} (-2)^k 1^{4n-k} \\
&= 5 \cdot (1+1)^{4n} - (-2+1)^{4n} \\
&= 5 \cdot (2^4)^n - ((-1)^4)^n = 5 \cdot 16^n - 1.
\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten zunächst den Nenner. Dieser lässt sich vereinfachen zu

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = (2^2)^n = 4^n.$$

Für den Zähler ergibt sich

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = 3(-1+1)^n = 0.$$

Demnach ist der gesamte Ausdruck 0.

Aufgabe 3.4.
Jedem Telefonanschluss ist eine Vorwahlnummer und eine Telefonnummer zugeordnet. Die Vorwahlnummer bestehe aus fünf Ziffern von 0 bis 9, wobei die erste Ziffer stets $= 0$ ist und die zweite $\neq 0$. Die Telefonnummer bestehe aus mindestens 3, aber höchstens fünf Ziffern, wobei die erste immer $\neq 0$ sein soll. Wieviele Telefonanschlüsse sind Grundsätzlich möglich.

Lösung zu Aufgabe 3.4.
Zuerst betrachten wir die Vorwahlnummer. Für diese gibt es $1 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ Möglichkeiten. Bei der Telefonnummer ist eine Fallunterscheidung hinsichtlich ihrer Länge notwendig. Bei einer Länge von 3 ergeben sich $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ Möglichkeiten. Bei einer Länge von 4 ergeben sich $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ Möglichkeiten und bei einer Länge von 5 ergeben sich $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ Möglichkeiten. Insgesamt ergeben sich also $9000 \cdot (900 + 9000 + 90000) = 9000 \cdot 99900$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3.5.
10 Ehepaare (Mann und Frau) veranstalten eine Tanzparty. Wieviel Tanzpaare (männlich und weiblich) sind möglich, wenn Ehepartner nicht miteinander tanzen dürfen?

Lösung zu Aufgabe 3.5.
Betrachtet Mann das erste Paar, so kann der Mann noch mit 9 möglichen Frauen tanzen, die Frau analog. Betrachtet man das nächste Paar, so kann der Mann noch mit 8 möglichen Frauen tanzen, wie die Frau. Führt man dies fort, so ergibt sich

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{9} i = 2 \cdot \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 9 \cdot 10 = 90$$

Aufgabe 3.6.
Sechs Personen werden namentlich in eine Liste eingetragen. Auf wie viele verschiedene Arten der Reihenfolge ist das möglich?

Lösung zu Aufgabe 3.6.
Wir brauchen nur alle möglichen Permutationen einer 6-elementigen Menge zu betrachten, diese beträgt $6! = 720$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3.7.
Bei der Herstellung eines Maschinenteils sind 7 Arbeitsgänge notwendig. Nach dem ersten Arbeitsgang folgen 4 Arbeitsgänge, die in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden können. Eine weitere Bearbeitung ist aber erst nach Abschluß der ersten fünf Arbeitsgänge möglich. Die Reihenfolge der zwei restlichen Arbeitsgänge ist wiederum beliebig. Wie viele Bearbeitungsreihenfolgen sind bei der Herstellung des Maschinenteils möglich?

Lösung zu Aufgabe 3.7.
Der erste Arbeitsgang ist fest, die vier folgenden können auf $4! = 24$ verschiedene Möglichkeiten angeordnet werden. Die beiden letzten Arbeitsgänge können auf zwei verschiedene Arten angeordnet werden, insgesamt ergeben sich also 48 Möglichkeiten.

Aufgabe 3.8.

(a) Wie viele verschiedene dreibuchstabige 'Wörter' lassen sich aus 5 verschiedenen Buchstaben bilden, wenn kein Buchstabe mehrfach auftreten darf? (Die Wörter müssen keinen

Sinn ergeben)

(b) Wie groß ist die Anzahl der Wörter aus a), wenn die Buchstaben mehrfach auftreten dürfen?

Lösung zu Aufgabe 3.8.

(a) Betrachten wir ein Wort der Länge drei, dann kann man die erste Stelle mit 5 möglichen Buchstaben füllen, die zweite Stelle mit 4 möglichen Buchstaben (weil Buchstaben ja nicht mehrfach vorkommen dürfen) und dritte Stelle dann nur noch mit 3 möglichen Buchstaben. Insgesamt haben wir also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

(b) Betrachten wir ein Wort der Länge drei, dann kann man die erste Stelle mit 5 möglichen Buchstaben füllen, die zweite und dritte Stelle ebenfalls, da Buchstaben ja mehrfach vorkommen dürfen. Also insgesamt $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3.9.
Wie viele 'Wörter' lassen sich durch Umstellen der Buchstaben aus dem Wort 'ANANAS' gewinnen? (Die Wörter müssen keinen Sinn ergeben)

Lösung zu Aufgabe 3.9.
Das Wort 'ANANAS' hat die Länge 6. Das 'A' kommt dreimal vor und das 'N' zweimal, alle anderen nur einfach. Daher ergibt sich für die Anzahl der möglichen Anordnung

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{12} = 60.$$

Aufgabe 3.10.
Für den Besuch einer Elite-Uni bewerben sich aus einer Schule acht Mädchen und zwölf Jungen. Sechs Mädchen und acht Jungen können nur ausgewählt werden. Wieviel verschiedene Möglichkeiten der Auswahl unter den Bewerbern gibt es? (es wird unterstellt, dass die Kapazitäten voll ausgelastet werden)

Lösung zu Aufgabe 3.10.
Für die Auswahl der Mädchen gibt es $\binom{8}{6}$ Möglichkeiten, da es nicht auf die Anzahl ankommt, sondern nur auf dabei sein oder nicht. Für die Auswahl der Jungen gibt es $\binom{12}{6}$ Möglichekeiten. Insgesamt gibt es also

$$\binom{8}{6} \cdot \binom{12}{8} = 28 \cdot \frac{11880}{24} = 13860$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 3.11.
Ein Kind baut durch Übereinanderlegen von 2 roten, 3 schwarzen und 4 weißen Baukastensteinen gleicher Form 'Türme'.

(a) Wie viele verschieden Türme sind möglich?

(b) Wie groß ist die Anzahl der Türme, die mit einem weißen Stein beginnen?

Lösung zu Aufgabe 3.11.

(a) Insgesamt sind es 9 Steine. Davon gibt es drei Gruppen für die mögliche Anzahlen, es gibt demnach
$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$$
Möglichkeiten.

(b) Insgesamt gibt es nur noch 8 Steine zum Anordnen, da der erste ja fest ist. Davon gibt es drei Gruppen für die mögliche Anzahlen, es gibt demnach
$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$
Möglichkeiten.

Aufgabe 3.12.
Eine Lieferung von 25 Geräten, die durch ihre Fabrikationsnummern unterscheidbar sind, enthält 4 fehlerhafte Geräte.

(a) Wie viele Stichproben vom Umfang 5 sind möglich? (unabhängig davon, ob defekt oder nicht)

(b) Wie viele Stichproben vom Umfang 5 gibt es, die genau zwei fehlerhafte Geräte enthalten?

(c) Wie viele Stichproben vom Umfang 5 gibt es, die höchstens ein fehlerhaftes Gerät enthalten?

(d) Wie viele Stichproben vom Umfang 5 gibt es, die mindestens ein fehlerhaftes Gerät enthalten?

Lösung zu Aufgabe 3.12.

(a) Insgesamt gibt es $\binom{25}{5} = 53130$ mögliche Anordnungen

(b) Insgesamt gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten zwei defekte Geräte auszuwählen und $\binom{21}{3} = 1330$ Möglichkeiten drei fehlerfreie Geräte auszuwählen. Insgesamt also $6 \cdot 1330 = 7980$ Möglichkeiten.

(c) Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, entweder es gibt kein defektes Gerät oder genau ein defektes Gerät. Insgesamt gibt es $\binom{21}{5} = 20349$ Möglichkeiten nur fehlerfreie Geräte auszuwählen. Weiterhin gibt es $\binom{4}{1} \cdot \binom{21}{4} = 4 \cdot 5985 = 23940$ Möglichkeiten genau ein fehlerhaftes Gerät auszuwählen. Insgesamt also $23940 + 20349 = 44289$ Möglichkeiten.

(d) Wir wissen, dass es insgesamt 53130 mögliche Anordnungen gibt. Weiterhin wissen wir, dass es 20349 Möglichkeiten gibt, nur fehlerfreie Geräte auszuwählen. Also gibt es $53130 - 20349 = 32781$ Möglichkeiten mindestens ein fehlerhaftes Gerät auszuwählen.

Aufgabe 3.13.
Eine Sendung von 12 Erzeugnissen enthält 3 beschädigte Erzeugnisse.

(a) Wie viele verschiedene Stichproben vom Umfang 4 sind möglich? (unabhängig davon ob beschädigt oder nicht)

(b) Wie viele Stichproben vom Umfang 4 gibt es, die mindestens ein beschädigtes Erzeugnis enthalten?

(c) Wie viele Stichproben vom Umfang 4 gibt es, die höchstens zwei einwandfreie Erzeugnisse enthalten?

Lösung zu Aufgabe 3.13.

(a) Insgesamt gibt es $\binom{12}{4} = 495$ Möglichkeiten.

(b) Es gibt $\binom{9}{4} = 126$ Möglichkeiten nur fehlerfreie Geräte zu erwischen. Also gibt es $495 - 126 = 369$ Möglichkeiten mindestens ein beschädigtes Erzeugnis zu erhalten.

(c) Es gibt 9 Möglichkeiten genau ein fehlerfreies Geräte zu erwischen. Weiterhin gibt es $\binom{9}{2} \cdot \binom{3}{2} = 36 \cdot 3 = 108$ Möglichkeiten genau zwei fehlerfreie Geräte zu erwischen. Insgesamt also $108 + 9 = 117$ Möglichkeiten höchstens zwei einwandfreie Erzeugnisse zu erwischen.

Aufgabe 3.14.
In einer Schachtel sind 4 Bleistifte und 11 Buntstifte. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass beim zufälligen Herausgreifen von 5 Stiften höchstens 2 Buntstifte erfasst werden?

Lösung zu Aufgabe 3.14.
Es gibt 11 Möglichkeiten genau einen Buntstift zu erhalten. Weiterhin gibt es $\binom{4}{3} \cdot \binom{11}{2} = 4 \cdot 55 = 220$ Möglichkeiten genau zwei Buntstifte zu erwischen. Also insgesamt 231 Möglichkeiten höchstens 2 Buntstifte zu erwischen.

Aufgabe 3.15.
Ein Parkplatz besteht aus einer Reihe von 18 Boxen für PKW. Er sei durch Abstellen von 6 AUDI, 2 Fiat, 4 BMW, 5 Skoda und einem Volvo belegt. Die Fahrzeuge sind durch ihr polizeiliches Kennzeichen alle unterscheidbar. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, dass

(a) alle Skodas nebeneinander stehen?

(b) alle PKW vom gleiche Typ nebeneinanderstehen?

Lösung zu Aufgabe 3.15.

(a) Es gibt $5!$ Möglichkeiten die Skodas nebeneinander anzuordnen. Weiterhin gibt es $13!$ Möglichkeiten die restlichen Autos nebeneinander anzuordnen. Da es noch 14 Möglichkeiten gibt die 5-er Reihe anzuordnen ergeben sich insgesamt $14! \cdot 13! \cdot 5!$ Möglichkeiten, so dass alle Skodas nebeneinander stehen

(b) Es gibt $6!$ Möglichkeiten die AUDI's nebeneinander anzuordnen, $2!$ die FIAT's nebeneinander anzuordnen, $4!$ für die BMW's, $5!$ für die Skodas und $1!$ für den Volvo. Da es insgesamt 5 Automarken sind, kann man die einzelnen Gruppen noch auf $5!$ verschiedene Arten anordnen. Insgesamt ergeben sich also

$$6! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 5!$$

Möglichkeiten, so dass PKW's vom gleichen Typ nebeneinander stehen.

Aufgabe 3.16.
Wie groß ist die Anzahl der möglichen 'Bilder', die sich bei einem Wurf auf 9 - in üblicher Weise aufgestellte - Kegel ergeben können?

Lösung zu Aufgabe 3.16.
Ein Kegel kann entweder umgefallen sein oder nicht, also gibt es insgesamt $2^9 = 512$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3.17.
Die Qualität von 8 Erzeugnissen wird überprüft ('gut-schlecht-Prüfung')

(a) Wie viele verschiedene Prüfungsprotokolle sind insgesamt möglich?

(b) Wie viele Prüfungsprotokolle enthalten das Element 'gut' genau sechsmal?

Lösung zu Aufgabe 3.17.

(a) Ein Erzeugnis kann entweder gut oder schlecht sein, dementsprechend gibt es $2^8 = 256$ Möglichkeiten.

(b) Es gibt $\binom{8}{2} = 28$ Möglichkeiten aus einer Menge von 8 auszuwählen, wobei man zwei unterscheidbare Teilgruppen mit 2, bzw. 6 Elemente hat.

Aufgabe 3.18.
An einem Pferderennen sind 8 Pferde beteiligt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine Vorhersage über die drei erstplatzierten Pferde

(a) ohne Angabe ihrer Reihenfolge zu treffen?

(b) mit Angabe ihrer Reihenfolge zu treffen?

Lösung zu Aufgabe 3.18.

(a) Es gibt $\binom{8}{3} = 56$ Möglichkeiten aus einer Menge von 8 Elementen genau 3 Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.

(b) Es gibt $\binom{8}{3} \cdot 6 = 56 \cdot 6 = 336$ Möglichkeiten aus einer Menge von 8 Elementen genau 3 Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.

Aufgabe 3.19.
Die erste Ausspielung der Glücksspirale wurde durch das folgende Zufallsexperiment durchgeführt: in einer einzigen Trommel befanden sich 70 gleichartige Kugeln, von denen jeweils 7 mit den Ziffern $0, 1, 2, ..., 9$ beschriftet waren. Aus der Trommel wurden nach gründlichem Mischen gleichzeitig 7 Kugeln gezogen, aus denen die 7-stellige Gewinnzahl ermittelt wurde. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten, mit denen bei der Durchführung des beschriebenen Zufallsexperiments die Zahlen

(a) 6666666

(b) 1234567

(c) 7778841

gezogen werden.

Lösung zu Aufgabe 3.19.
Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nehmen wir an, alle Kugeln seien unterscheidbar, was man durch Durchnummerieren der jeweiligen 7 gleichen Kugeln erreichen kann. Aus den 70 verschiedenen Kugeln können unter Berücksichtigung der Reihenfolge 7 Kugeln auf $70 \cdot 69 \cdot ... \cdot 64$ verschiednen Arten ausgewählt werden. Da insgesamt nur 7 Kugeln mit der Ziffer 6 vorhanden sind, kann die Zahl 6666666 auf $7 \cdot 6 \cdot ... \cdot 1 = 7!$ verschiedene Arten ausgewählt werden.

(a) $P(\{666666\}) = \frac{7!}{70 \cdot ... \cdot 64} = 0,83 \cdot 10^{-9}$.

(b) Da die Zahl 1234567 aus lauter verschiedenen Ziffern besteht, kann jede einzelne Ziffer aus 7 möglichen ausgewählt werden. Es gibt also 7^7 günstige Fälle, also

$$P(\{1234567\}) = \frac{7^7}{70 \cdot ... \cdot 64} = 0,136 \cdot 10^{-6}.$$

(c) Für die Auswahl der Zahl 7778841 gibt es schließlich $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7$ mögliche Fälle, es folgt

$$P(\{7778841\}) = \frac{7^4 \cdot 6^2 \cdot 5}{70 \cdot ... \cdot 64} = 0,715 \cdot 10^{-7}.$$

3.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 3.1.
Auf einem Schiff seien 3 blaue, 2 rote und 4 gelbe Flaggen vorhanden, wobei die gleichfarbigen Flaggen nicht unterscheidbar sind. Alle 9 Flaggen sollen in einer Reihe aufgehängt werden. Auf wieviele verschiedene Arten ist die Bildung unterscheidbarer Anordnungen der Flaggen möglich?

Lösung zu Aufgabe 3.1.
Insgesamt gibt es $\frac{9!}{3!2!4!} = 1260$ Möglichkeiten der Anordnung.

Aufgabe 3.2.
Herr Meyer hat seinen Schlüssel für das Bahnhof-Schließfach verloren. Die Schließfach-Nummer hat er leider vergessen. Er erinnert sich allerdings daran, dass es sich um eine vierstellige Zahl handelt, bei der zwei Ziffern gleich sind und dass als Ziffern die $3, 5$ und 7 vorkommen. Wieviele Schließfächer müssen gesperrt werden?

Lösung zu Aufgabe 3.2.
Falls die Ziffer 3 in der Schließfach-Nummer zweimal vorkommt, gibt es $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ Nummern, die in Frage kommen. Dieselbe Zahl erhält man falls die 5, bzw. die 7 doppelt vorkommen. Daher müssen $3 \cdot 12 = 36$ Schließfächer gesperrt werden.

Aufgabe 3.3.
Bei einer Feier stößt jeder der 8 Teilnehmer mit dem Weinglas mit jedem Teilnehmer an. Wie oft klingen die Gläser?

Lösung zu Aufgabe 3.3.
Aus 8 Personen können 2 (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auf $\binom{8}{2}$ Arten ausgewählt werden. Damit erhält man für die gesucht Anzahl den Wert 28.

Aufgabe 3.4.
Von 25 Studenten studiert jeder wenigstens eines der Fächer Physik, Mathematik, Informatik. Physik studieren insgesamt 14, Mathematik 10. Genau 2 Studenten haben alle Fächer, genau 8 mindestens zwei der genannten Fächer belegt. Wie viele Studenten studieren Informatik?

Lösung zu Aufgabe 3.4.
Genau 3 Fächer studieren 2, genau 2 Fächer $8-2=6$ und genau 1 Fach $25-2-6=17$ Personen. In der Summe $|P|+|M|+|I|$ werden diejenigen Personen, die ein einziges Fach studieren, einfach gezählt, diejenigen mit 2 Fächern doppelt und die mit allen Fächern dreifach gezählt. Damit gilt

$$|P|+|M|+|I| = 17 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 35.$$

Wegen $|P| = 14$ und $|M| = 10$ folgt hieraus für die gesuchte Anzahl $|I| = 11$.

Aufgabe 3.5.
Ein Autokennzeichen besteht neben dem Städtesymbol aus einem oder zwei Buchstaben, sowie aus einer ein- bis dreistelligen Zahl (es gibt kein Kennzeichen mit 000). Wie viele verschiedene Kennzeichen können in einer Stadt ausgegeben werden, wenn 26 Buchstaben zur Wahl stehen?

Lösung zu Aufgabe 3.5.
Es gibt $27 \cdot 26 \cdot 999 = 701298$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3.6.
Aus den den beiden Elementen „Punkt“ und „Strich“ bildet die Morse Telegraphenschrift ihre Zeichen, wobei bis zu fünf Elemente (in einem einzigen Ausnahmefall sechs) für ein Zeichen benutzt werden. Wie viele Zeichen lassen sich damit darstellen?

Lösung zu Aufgabe 3.6.
1-elementige Zeichen $= 2$,
2-elementige Zeichen $= 2^2 = 4$,
3-elementige Zeichen $= 2^3 = 8$,
4-elementige Zeichen $= 2^4 = 16$,
5-elementige Zeichen $= 2^5 = 32$,
6-elementige Zeichen $= 1$, (Ausnahmefall)
Summe$= 63$

Aufgabe 3.7.
Aus 5 Mathematikern und 7 Physikern sollen 2 Mathematiker und 3 Physiker ausgewählt werden, Auf wie viele Arten ist dies möglich, falls

(a) jeder delegiert werden darf?

(b) ein bestimmter Physiker delegiert werden muss?

(c) zwei bestimmte Mathematiker nicht delegiert werden dürfen?

Lösung zu Aufgabe 3.7.

(a) $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350.$

(b) $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150.$

(c) $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 105.$

Aufgabe 3.8.
Aus 5 Ehepaaren werden zufällig 4 Personen ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter ihnen kein Ehepaar?

Lösung zu Aufgabe 3.8.
Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Mögliche Fälle: $\binom{10}{4}$. Günstige Fälle unter Berücksichtigung der Reihenfolge:

Für die Auswahl der $1.$ Person gibt es 10 Möglichkeiten.

Für die Auswahl der $2.$ Person gibt es 8 Möglichkeiten, da die zuerst ausgewählte Person und deren Ehepartner nicht ausgewählt werden dürfen.

Für die $3.$ Person gibt es 6 und für die $4.$ Person 4 Auswahlmöglichkeiten.
Insgesamt gibt es demnach $\frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{4!}$ günstige Fälle.

Für die Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{4! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{8}{21}.$$

4 Vollständige Induktion

4.1 Wiederholung - Natürliche Zahlen

- Aus den bisher geschilderten Axiomen der Mengenlehre kann man zwar die Existenz von Vereinigungsmengen $x_1 \cup \cdots \cup x_n$ und Durchschnitten $\bigcap\limits_{y \in x} y$ gewinnen, aber bisher garantiert kein Axiom der Mengenlehre die Existenz einer unendlichen Menge. Tatsächlich könnten wir ohne solch ein Axiom nur über endliche Mengen reden, aber in der Analysis wollen wir uns gerade mit unendlichen Mengen beschäftigen, wie z.B. mit der Menge der natürlichen Zahlen.

  Deswegen fordern wir als Axiom die Existenz einer induktiven Menge,

  $$\exists x : (\emptyset \in x \wedge (\forall y : y \in x \Rightarrow (y \cup \{y\}) \in x)) \quad .$$

  Dabei nennt man eine Menge induktiv, wenn sie die leere Menge $\emptyset$ enthält und mit jedem Element y auch $y \cup \{y\}$ ein Element der Menge ist.

- Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist nun der Durchschnitt aller induktiven Mengen, d.h. die kleinste induktive Mengen. Symbolisch kann man sie als $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$ schreiben, aber üblicherweise bezeichnet man ihre Elemente mit $1 := \emptyset$, $2 := \{\emptyset\}$, $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ...

- Mittels der Nachfolgeabbildung $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(y) := y \cup \{y\}$, kann man durch $n+1 := s(n)$ und $n + m := s(s(\dots s(n) \dots)) = s^m(n)$ (der m-maligen Anwendung von s auf n) eine kommutative Addition auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren. Jedoch ist $(\mathbb{N}, +)$ keine Gruppe, es gibt keine additiven Inverse, selbst wenn man die natürlichen Zahlen durch $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $0 + n = n$ noch um ein neutrales Element erweitert.

- Aufgrund der Definition der natürlichen Zahlen als kleinster induktiver Menge kann man Aussagen über natürliche Zahlen von der Form $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ dadurch beweisen, daß man $A(1)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$ beweist. Dies nennt man einen Beweis der Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ per Induktion.

- Um eine Gruppe zu gewinnen, erweiter man $\mathbb{N}$ zur Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ (genauer definiert man $\mathbb{Z}$ mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werden dann mit der Addition $+$ zu einer Gruppe, die Lösung von $n + x = 0$ ist $x = -n$.

- In den natürlichen Zahlen kann man darüberhinaus auch eine Multiplikation definieren durch $n \cdot m = n + \cdots + n$ (m-malige Addition), und dies überträgt sich auf $\mathbb{Z}$. Aber selbst bei $n \neq 0$ kann man die Gleichung $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Z}$ nur lösen, wenn n die Zahl

m ohne Rest teilt. Um solche Gleichungen allgemein lösen zu können, erweitert man die Menge der ganzen Zahlen zur Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (genauer definiert man $\mathbb{Q}$ wiederum mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Die Menge $\mathbb{Q}$ wird dann mit $+$ und $\cdot$ ein Körper, d.h. es gelten die Assoziativ-, Distributiv- und Kommutativgesetze und es gibt additive sowie multiplikative Inverse.

. . . .

4.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 4.1.
Zeigen Sie! Für $0 < x < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$.

Lösung zu Aufgabe 4.1.
IA: $n = 1$

$$\begin{aligned} (1-x) &< \frac{1}{1+x} \\ 1-x^2 &< 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

IS: $n \to n+1$
IV: Gelte $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$ für ein $n \geq 1$
IB: zu zeigen: $(1-x)^{n+1} < \frac{1}{1+(n+1)x}$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned} (1-x)^{n+1} = (1-x)^n \cdot (1-x) &\overset{I.V.}{<} \frac{1}{1+nx} \cdot (1-x) \\ &= \frac{1-x}{1+nx} \\ &= \frac{(1-x)(1+x)}{(1+nx)(1+x)} \\ &= \frac{1-x^2}{1+(n+1)x+nx^2} \\ &< \frac{1}{1+(n+1)x} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2.
Beweisen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

Lösung zu Aufgabe 4.2.

(a) IA: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \quad \checkmark$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für ein $n \geq 1$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$
<u>Beweis der IB:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n)(2n+1) + (n+1)(3)(2n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n)(2n+1) + (n+1)(2)(2n+1) + (n+1)(2) + (n+1)(2n+}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+1) + (n+1)(2n+4)}{6} \\
&= \frac{(n+1)n+2)(2n+1) + (n+1)(n+2)(2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

(b) <u>IA:</u> $n = 3$

$$\sum_{k=2}^{3-1} \frac{2}{k^3 - k} = \frac{2}{8-2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(3-1)} \quad \checkmark$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}$ für ein $n \geq 3$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$
<u>Beweis der IB:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3-k} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3-k} + \frac{2}{n^3-n} &\overset{I.V.}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} + \frac{2}{n^3-n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2-(n+1)}{n(n-1)(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{n-1}{n(n-1)(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

(c) <u>IA:</u> $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4} \quad \checkmark$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für ein $n \geq 1$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{I.V.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2 n^2 + (n+1)^2(4n+4)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

(d) IA: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 = 2! - 1 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$.
Beweis der IB:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \overset{I.V.}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)!(n+2) - 1$$
$$= (n+2)! - 1$$

Aufgabe 4.3.
Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Lösung zu Aufgabe 4.3.
IA: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Beweis der IB:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\overset{I.V.}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.4.
Zeigen Sie, dass für $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Lösung zu Aufgabe 4.4.
IA: $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ für ein $n \geq 2$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\overset{I.V.}{>} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{n\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\ &> \frac{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.5.
Zeigen Sie: $2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lösung zu Aufgabe 4.5.
IA: $n = 1$

$$2^1 = 2 > 1 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $2^n > n$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $2^{n+1} > n+1$.
Beweis der IB:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{I.V.}{>} n \cdot 2 = n + n \overset{n \geq 1}{\geq} n + 1.$$

Aufgabe 4.6.
Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! > 2^n$.

Lösung zu Aufgabe 4.6.
Für $n = 0$ gilt $0! = 1 \geq 1 = 2^0$
Für $n = 1$ gilt $1! = 1 < 2 = 2^1$
Für $n = 2$ gilt $2! = 2 < 4 = 2^2$
Für $n = 3$ gilt $3! = 6 < 8 = 2^3$
IA: $n = 4$

$$4! = 24 > 16 = 2^4$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $n! > 2^n$ für ein $n \geq 4$.
IB: zu zeigen $(n+1)! > 2^{n+1}$.
Beweis der IB:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{I.V.}{>} 2^n \cdot (n+1) \overset{n \geq 4}{>} 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Die Aussage gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Aufgabe 4.7.
Zeigen Sie für $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Lösung zu Aufgabe 4.7.
IA: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} x^0 = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x} \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für ein $n \geq 0$.

<u>IB:</u> zu zeigen: $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$.
<u>Beweis der IB:</u>

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{I.V.}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}x}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Aufgabe 4.8.
Zeigen Sie für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

Lösung zu Aufgabe 4.8.
Sei $x \neq 1$ beliebig, aber fest.
<u>IA:</u> $n = 0$

$$\prod_{k=0}^{0}(1+x^{2^k}) = 1+x = \frac{1-x^2}{1-x} \quad \checkmark$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für ein $n \geq 0$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $\prod_{k=0}^{n+1}(1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}$.
<u>Beweis der IB:</u>

$$\prod_{k=0}^{n+1}(1+x^{2^k}) = \prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) \cdot (1+x^{2^{n+1}}) \overset{I.V.}{=} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}(1+x^{2^{n+1}})$$
$$= \frac{1-x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+1}}-x^{2^{n+1}\cdot 2}}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}$$

Aufgabe 4.9.
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = n+1.$$

Lösung zu Aufgabe 4.9.
IA: $n = 1$

$$\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{k}) = 2 = 1+1 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = n+1$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\prod_{k=1}^{n+1}(1+\frac{1}{k}) = n+2$.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1+\frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{n+1}) &\overset{I.V.}{=} (n+1)(1+\frac{1}{n+1}) \\ &= n+1+1 = n+2\end{aligned}$$

Aufgabe 4.10.
Beweisen Sie, dass fur jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede naturliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2$$

.

Lösung zu Aufgabe 4.10.
IA: $n = 2$

$$(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1 \geq 1 + 2x + \frac{2^2}{4}x^2 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2$ für ein $n \geq 2$.
IB: zu zeigen: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)^2}{4}x^2$.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\overset{I.V.}{\geq} (1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2)(1+x) \\ &= 1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2 + x + nx^2 + \frac{n^2}{4}x^3 \\ &= 1 + (n+1)x + x^2\frac{n^2+4n+n^2x}{4} \\ &\overset{(*)}{>} 1 + (n+1)x + x^2\frac{n^2+2n+1}{4} \\ &= 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)^2}{4}x^2\end{aligned}$$

Wobei wir bei $(*)$ benutzt haben, dass $2n+1 < 4n + nx^2 \Leftrightarrow 0 < n^2x^2 + 2n - 1$, was aufgrund der Positivität von x und der Tatsache, dass $n \geq 2$ gilt.

Aufgabe 4.11.
Zeigen Sie, dass $10^n - 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.

Lösung zu Aufgabe 4.11.
IA: $n = 1$

$$10^1 - 3^1 = 7 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $10^n - 3^n$ ist durch 7 teilbar für ein $n \geq 1$
IB: zu zeigen: $10^{n+1} - 3^{n+1}$ ist durch 7 teilbar.
Beweis der IB:

$$10^{n+1} - 3^{n+1} = 10^n \cdot 10 - 3^n \cdot 3 = \underbrace{(10^n - 3^n)}_{teilb.n.I.V.} \cdot 3 + \underbrace{7 \cdot 10^n}_{teilbar}$$

Aufgabe 4.12.
Zeigen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

Lösung zu Aufgabe 4.12.
IA: $n = 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Seien die Kuben dreier aufeinanderfolgender Kuben für ein $n \geq 1$ durch 9 teilbar.
IB: zu zeigen: $(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3$ ist durch 9 teilbar.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (9n^2 + 27n + 27) \\ &= \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{teilb.n.I.V.} + \underbrace{(n^2 + 3n + 3) \cdot 9}_{teilb.d.9}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.13.
Es sei $\alpha \neq 0$ und so dass

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

gilt. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ dann sogar

$$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$$

gilt.

Lösung zu Aufgabe 4.13.
IA: $n = 0$

$$\alpha^0 + \frac{1}{\alpha^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$n = 1$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z} \text{ nach Voraussetzung} \quad \checkmark$$

<u>IS:</u> $n-1, n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ für ein $n \geq 0$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(\alpha + \frac{1}{\alpha})}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n})}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}})}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Z}}$$

Aufgabe 4.14.
Was ist am folgenden Beweis für die Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

gilt $4n = 0$ falsch?

<u>IA:</u> $n = 0$

$$4 \cdot 0 = 0$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> $4k = 0 \forall k \leq n$
<u>IB:</u> $4(n+1) = 0$
Beweis der IBeh:
Es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n+1 = k_1 + k_2$ und $k_1, k_2 \neq n$, also gilt $4(n+1) = 4k_1 + 4k_2 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4.14.
Fur $n = 0$ gibt es keine zwei $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1, k_2 < 0+1$ und $0+1 = k_1 + k_2$, denn $k_1, k_2 < 1$ impliziert $k_1 = 0 = k_2$ also $k_1 + k_2 = 0$.

Man muss immer prüfen, dass der IS für die jeweiligen n durchführbar ist!

4.3 Aufgabenserie und Lösungen

Aufgabe 4.1.
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion!

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}$

Hinweis: Nutzen Sie bei (c) die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} &\text{AT 1:} \quad && \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &\text{AT 2:} \quad && \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ &\text{AT 3:} \quad && \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.1.

(a) IA: n=1

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = 1^2 = \binom{2}{2}^2 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \binom{n+2}{2}^2$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &\overset{I.V.}{=} \binom{n+1}{2}^2 + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2 n^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{((n+2)!)^2}{4(n!)^2} \\ &= \binom{n+2}{2}^2 \end{aligned}$$

(b) IA: n=1

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}}$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{I.V.}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

(c) IA: n=1

$$\sum_{k=1}^{1} \cos((2k-1)x) = \cos(x) \overset{AT2}{=} \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)} \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}$ für alle $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin(x)}$

Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)x &= \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) + \cos((2n+1)x) \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)} + \cos(2n+1)x \\
&\overset{AT1}{=} \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)} + \cos(2nx)\cos(x) - \sin(2nx)\sin(x) \\
&= \frac{\sin(2nx) + \overbrace{2\sin(x)\cos(x)}^{\sin(2x)}\cos(2nx) - 2\overbrace{\sin(x)\sin(x)}^{\cos(2x)-\cos^2(x)}\sin(2nx)}{2\sin(x)} \\
&\overset{AT1}{=} \frac{\sin(2nx) + \sin(2x)\cos(2nx) + 2(\cos(2x) - \cos^2(x))\sin(2nx)}{2\sin(x)} \\
&= \frac{\sin(2nx) + \overbrace{\sin(2x)\cos(2nx) + 2\cos(2x)\sin(2nx)}^{\sin((2n+2)x)+\cos(2x)\sin(2nx)} - 2\cos^2(x)\sin(2nx)}{2\sin(x)} \\
&\overset{AT2}{=} \frac{\sin(2nx) + \sin((2n+2)x) + \cos(2x)\sin(2nx) - 2\cos^2(x)\sin(2nx)}{2\sin(x)} \\
&= \frac{\sin((2n+2)x) + \sin(2nx)(1 - 2\cos^2(x) + \cos(2x))}{2\sin(x)} \\
&\overset{AT1}{=} \frac{\sin((2n+2)x) + \sin(2nx)\overbrace{(1 - 2\cos^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x))}^{=0}}{2\sin(x)} \\
&= \frac{\sin((2n+2)x)}{2\sin(x)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2.
Für welche natürlichen Zahlen n gilt:

(a) $n! \geq 3^n$

(b) $\frac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(c) $4^n > n^4$

Begründen Sie ihre Aussage!

Lösung zu Aufgabe 4.2.

(a) $n = 1 \quad 1! = 1 < 3^1 = 3$
$n = 2 \quad 2! = 2 < 3^2 = 9$
$n = 3 \quad 3! = 6 < 3^3 = 27$
$n = 4 \quad 4! = 24 < 3^4 = 81$
$n = 5 \quad 5! = 120 < 3^5 = 243$

$n = 6 \quad 6! = 720 < 3^6 = 729$
$n = 7 \quad 7! = 5040 \geq 3^7 = 2187$
IA: $n = 7 \quad \checkmark$
IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $n! \geq 3^n$ für ein $n \geq 7$.
IB: zu zeigen: $(n+1)! \geq 3^{n+1}$
Beweis der IB:

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{I.V.}{\geq} 3^n(n+1) \overset{n\geq 7}{>} 3^n \cdot 3 = 3^{n+1}$$

Also gilt die Aussage für alle $n \geq 7$.

(b) $n = 1: \ \frac{1!\cdot 2^1}{2!} = 1 \not< 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$
$n = 2: \ \frac{2!^2\cdot 2^2}{4!} = \frac{16}{24} \not< \left(\frac{2}{3}\right)^1$
$n = 3: \ \frac{3!^2\cdot 2^3}{6!} = \frac{288}{720} < \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
IA: $n = 3 \quad \checkmark$
IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ für ein $n \geq 3$.
IB: zu zeigen: $\frac{((n+1)!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2(n+1))!} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
\frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n+1}}{(2(n+1))!} &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot 2 \cdot 2^n}{(2n+2)(2n+1)2n!} \\
&\overset{I.V.}{<} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2(n+1)^2}{4n^2+6n+2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2(n+1)^2}{(n+1)(4n+2)} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2(n+1)}{(4n+2)} \\
&\overset{(*)}{<} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}
\end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ benutzt haben, dass $\frac{2n+2}{4n+2} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < 2n-2$, was aufgrund von $n \geq 3$ gilt.
Also gilt die Aussage für alle $n \geq 3$.

(c) $n = 1 \quad 4^1 = 4 > 1^4 = 1$
$n = 2 \quad 4^2 = 16 \not> 2^4 = 16$
$n = 3 \quad 4^3 = 64 \not> 3^4 = 81$
$n = 4 \quad 4^4 = 256 \not> 4^4 = 256$
$n = 5 \quad 4^5 = 1024 > 5^4 = 625$

IA: $n = 5 \quad \checkmark$
IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $4^n > n^4$ für alle $n \geq 5$.
IB: zu zeigen: $4^{n+1} > (n+1)^4$
Beweis der IB:

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \overset{I.V.}{>} 4n^4 \overset{(*)}{>} n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4$$

Wobei wir bei $(*)$ benutzt haben, dass $3n^4 > 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 3n^4 - 4n^3 - 6n^2 - 4n - 1 > 0 \;\Leftrightarrow \underbrace{(n^4 - 4n^3)}_{>0} + \underbrace{(n^4 - 6n^2)}_{>0} + \underbrace{(n^4 - 4n - 1)}_{>0} > 0$, was aufgrund von $n \geq 5$ gilt.
Also gilt die Aussage für alle $n \geq 5$ und $n = 1$

Aufgabe 4.3.
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Zahl $n^3 - 4n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ durch 3 teilbar ist.

Lösung zu Aufgabe 4.3.
IA: n=3

$$3^3 - 4 \cdot 3 = 27 - 12 = 15$$

offensichtlich ist 15 durch 3 teilbar. $\checkmark$
IS: $n \to n+1$
IV: Sei $n^3 - 4n$ für ein $n \geq 3$ durch 3 teilbar.
IB: zu zeigen: $(n+1)^3 - 4(n+1)$ ist durch 3 teilbar.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 4(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - 4n - 4 \\ &= \underbrace{\underbrace{3(n^2+n+1)}_{\text{teilbar durch 3}} + \underbrace{n^3 - 4n}_{\text{teilbar durch 3 nach I.V.}}}_{\text{teilbar durch 3}} \end{aligned}$$

5 Relationen, Körper

5.1 Wiederholung - Theorie: Relationen

(a) Eine n-**stellige Relation** R zwischen den Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts dieser Mengen, d.h. $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$. Sind die Mengen $A_i, i = 1, \ldots, n$ sämtlich gleich der Menge A, so wird $R \subseteq A^n$ und heißt n-stellige Relation in der Menge A.

(b) Eine 2-stellige (binäre) Relation R in der Menge A heißt

  (a) **reflexiv**, falls $\forall a \in A : (a, a) \in R$.

  (b) **symmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : ((a, b) \in R \;\Rightarrow\; (b, a) \in R)$.

  (c) **antisymmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \;\Rightarrow\; a = b)$.

  (d) **transitiv**, falls $\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \;\Rightarrow\; (a, c) \in R)$.

(c) Eine **Äquivalenzrelation** R in einer Menge $\mathbb{M}$ ist eine 2-stellige Relation in $\mathbb{M}$, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(d) Eine **Ordnungsrelation** R in einer Menge $\mathbb{M}$ ist eine 2-stellige Relation in $\mathbb{M}$, welche reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

5.2 Wiederholung - Theorie: Gruppen, Körper

- Eine **Gruppe** $(\mathbb{M}, *)$ ist eine Menge $\mathbb{M}$, auf der eine Verknüpfung $* : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M},\ (m, n) \mapsto m * n$ definiert ist, die den folgenden Axiomen genügt:

  (i) Assoziativität: $\forall k, l, m \in \mathbb{M} \;:\; k * (l * m) = (k * l) * m$.

  (ii) Neutrales Element: $\exists m_0 \; \forall m \in \mathbb{M} \;:\; m * m_0 = m = m_0 * m$.

  (iii) Existenz der Inverse: $\forall m \in \mathbb{M} \; \exists n \in \mathbb{M} \;:\; m * n = m_0 = n * m$.

- Eine Gruppe $(\mathbb{M}, *)$ heißt **ABELsch** (nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829)), falls ihre Verknüpfung zusätzlich noch kommutativ ist: $\forall k, l \in \mathbb{M} \;:\; k * l = l * k$.

- Ein **Körper** $\mathbb{K}$ ist eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen

  $* : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (k_1, k_2) \mapsto k_1 * k_2$,

  $\star : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (k_1, k_2) \mapsto k_1 \star k_2$

  so definiert sind, dass

  $(\mathbb{K}, *)$ eine ABELsche Gruppe mit neutralem Element e_* ist,

  $(\mathbb{K} \setminus e_*, \star)$ eine ABELsche Gruppe ist

  und zusätzlich das Distributivgesetz $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \star (b * c) = (a \star b) * (a \star c)$ gilt.

. . . .

5.3 Übungsaufgaben und Lösungen

Aufgabe 5.1.

(a) Zeigen Sie, dass für gegebene $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung x der Gleichung $b = x+a$ eindeutig ist.

(b) Multiplikation mit dem neutralen Element der Addition ergibt stets das neutrale Element der Addition: $0 \cdot x = 0$.

(c) Ein Körper ist **nullteilerfrei**: Aus $xy = 0$ folgt zwingend, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

Lösung zu Aufgabe 5.1.

(a) Dies ist wahr, denn sind x, x' zwei Lösungen, dann gilt

$$\begin{aligned} x \overset{a+(-a)=0}{=} x + (a + (-a)) &\overset{\textit{assoziativ}}{=} (x + a) + (-a) \overset{b=x+a}{=} b + (-a) \overset{b=x'+a}{=} (x' + a) + (-a) \\ &\overset{\textit{assoziativ}}{=} x' + (a + (-a)) \overset{a+(-a)=0}{=} x'. \end{aligned}$$

(b) Es gilt $0 + 0 = 0$ (da 0 neutrales Element der Addition). Daher gilt auch

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x \overset{\textit{distributiv}}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Andererseits gilt auch $0 \cdot x = 0 + 0 \cdot x$. Da wir nach (a) wissen, dass für gegebene a, b eine Lösung x der Gleichung $b = x + a$ eindeutig ist, können wir $0 \cdot x = 0$ folgern.

(c) Sei $xy = 0$ und angenommen $x \neq 0$. Dann hat x ein Inverses x^{-1}, und mit diesem gilt

$$y \overset{1 \text{ neutral}}{=} 1 \cdot y \overset{x^{-1}x=1}{=} (x^{-1}x)y \overset{\textit{assoziativ}}{=} x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 \overset{\textit{kommutativ}}{=} 0 \cdot x^{-1} \overset{(b)}{=} 0.$$

Also folgt aus $xy = 0$ und $x \neq 0$ automatisch $y = 0$, wodurch die Aussage bewiesen ist.

gilt $5|(a - a)$ und somit $(a, a) \in R \quad \Rightarrow \quad R$ ist reflexiv.

Aufgabe 5.2.
Zeigen Sie, dass durch „ $\leq$ “eine Ordnungsrelation auf der Menge der reellen Zahlen definiert wird!

Lösung zu Aufgabe 5.2.
Sei $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Relation, welche definiert ist durch: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \leq y$.

Wir müssen nun überprüfen, ob es sich wirklich um eine Ordnungsrelation handelt, also müssen wir zeigen, dass die Eigenschaften: Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität erfüllt sind.

(i) Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$, daher $(x, x) \in R,$, also reflexiv.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$, dann ist offenbar $x = y$, also antisymmetrisch.

(iii) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt $x \leq y \leq z$, also insbesondere $x \leq z$, womit die Transitivität gezeigt wäre.

Also handelt es sich bei „ $\leq$ “wirklich um eine Ordnungsrelation auf der Menge der reellen Zahlen.

Aufgabe 5.3.
Zeigen Sie, dass durch „ $=$ “eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellen Zahlen definiert wird!

Lösung zu Aufgabe 5.3.
Sei $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Relation, welche definiert ist durch: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = y$.

Wir müssen nun überprüfen, ob es sich wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt, also müssen wir zeigen, dass die Eigenschaften: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt sind.

(i) Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = x$, daher $(x, x) \in R,$, also reflexiv.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x = y$. Dann gilt auch $y \leq x$, also symmetrisch.

(iii) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x = y$ und $y = z$, dann gilt $x = y = z$, also insbesondere $x = z$, womit die Transitivität gezeigt wäre.

Also handelt es sich bei „ $=$ “wirklich um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellen Zahlen.

Aufgabe 5.4.
Zeigen Sie dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist!

Lösung zu Aufgabe 5.4.
Angenommen es gibt eine Darstellung von $\sqrt{2}$ in den rationalen Zahlen, dann folgt, dass

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

mit teilerfremden $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es folgt weiterhin, dass

$$2n^2 = m^2$$

durch Quadrierung beider Seiten. Also $2|m^2$ (zwei ist Teiler von m^2), daher auch $2|m$. Daher besitzt m die Darstellung

$$m = 2p, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt, dass

$$2n^2 = (2p)^2 = 4p^2$$

also gilt $2|n^2 \Rightarrow 2|n$. Damit ist gezeigt, dass m und n durch zwei teilbar sind, was wir aber ausgeschlossen haben. Daher war unsere Annahme falsch und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 5.5.

(a) Ist die Menge $\{0, 1\}$ mit den folgenden Operationen ein Körper?

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl} 0+0 &=& 0, & 0+1 &=& 1, & 1+0 &=& 1, & 1+1 &=& 0,\\ 0\cdot 0 &=& 0, & 0\cdot 1 &=& 0, & 1\cdot 0 &=& 0, & 1\cdot 1 &=& 1. \end{array}$$

(b) Kann man diesen Körper anordnen?

Lösung zu Aufgabe 5.5.

(a) Körperaxiome beweisen:

$\mathbf{A_1}$: $(a+b)+c = a+(b+c)$

a	b	c	$a+b$	$(a+b)+c$	$b+c$	$a+(b+c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

$\mathbf{A_2}$: $a+b = b+a$✓

$\mathbf{M_1}$: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

a	b	c	$a\cdot b$	$(a\cdot b)\cdot c$	$b\cdot c$	$a\cdot(b\cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$\mathbf{M_2}$: $a\cdot b = b\cdot a \quad \forall a,b$✓

$\mathbf{D}$: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

a	b	c	$b+c$	$a\cdot(b+c)$	$a\cdot b$	$a\cdot c$	$a\cdot b+a\cdot c$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Ja, denn die Operationen sind assoziativ, kommutativ, distributiv, und es gibt neutrale Elemente sowie Inverse.
Dies ist übrigens der kleinstmögliche Körper (der ja mindesten die beiden neutralen Elemente enthalten muss) und das einfachste Beispiel für einen endlichen Körper. Er wird manchmal $\mathbb{F}_2$ genannt (Zahlenkörper (engl. number field) mit 2 Elementen).
Man kann die Elemente von $\mathbb{F}_2$ als (Rest-)Klassen auffassen. Beispielsweise wenn man 0 mit der Klasse aller geraden ganzen Zahlen identifiziert und 1 dementsprechend mit der Klasse der ungeraden Zahlen. Dann bedeutet also $1+1=0$ nichts anderes als, dass die Addition zweier ungerader ganzer Zahlen eine gerade Zahl ergibt.

(b) Wäre $0<1$, dann würde $1=0+1<1+1=0$ gelten, Widerspruch. Also kann man diesen Körper nicht anordnen.

Aufgabe 5.6.
Auf der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ seien folgende Operationen definiert $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$:

Addition $\oplus:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(a,b)\oplus(c,d):=(a+c,b+d)$,
Multiplikation $\odot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(a,b)\odot(c,d):=(ac-bd,ad+bc)$.

Zeigen Sei dass der $\mathbb{R}^2$ mit diesen Operationen ein Körper ist!

Lösung zu Aufgabe 5.6.
Um zu zeigen, dass es sich wirklich um ein Körper handelt, müssen wir die entsprechenden Axiome nachprüfen. Zuerst überprüfen wir, ob es sich bei der Verknüpfung $\oplus:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ um eine abelsche Gruppe handelt. Im Folgenden seien $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$.

Als erstes müssen wir die Abgeschlossenheit zeigen, also dass wirklich $\oplus:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\underbrace{(\underbrace{a}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{b}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}^2}\oplus\underbrace{(\underbrace{c}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{d}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}^2}=\underbrace{(\underbrace{ac-bd}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{ad+bc}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}^2}$$

Es gilt das Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned}((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f) &= (a+c,b+d)\oplus(e,f)=(a+c+e,b+d+f)\\ &= (a,b)\oplus(c+e,d+f)\\ &= (a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f)).\end{aligned}$$

Desweieteren existiert ein Neutrales Element bezüglich der Addition (Nullelement), nämlich $(0,0)$, denn es gilt:

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=(0+a,0+b)=(0,0)\oplus(a,b).$$

Hinzu kommt die Existenz des Inversern bezüglich der Addition (Negatives)

$$(a,b)\oplus(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0)=(-a+a,-b+b)=(-a,-b)\oplus(a,b).$$

Dann noch die Kommutativität

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)\oplus(a,b).$$

Daher handelt es sich bei der Verknüpfung $\oplus:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ um eine abelsche Gruppe.

Jetzt müssen wir überprüfen, ob es sich ber der Verknüpfung $\odot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ um eine abelsche Gruppe handelt.

Als erstes müssen wir die Abgeschlossenheit zeigen, also dass wirklich $\odot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\underbrace{(\underbrace{a}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{b}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}^2}\odot\underbrace{(\underbrace{c}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{d}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}^2}=\underbrace{(\underbrace{ac-bd}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{ad+bc}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}^2}$$

Es gilt das Assoziativgesetz, dazu seien $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}((a,b)\odot(c,d))\odot(e,f) &= (ac-bd,ad+bc)\odot(e,f)\\ &= ((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)\\ &= (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\\ &= (a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))\\ &= (a,b)\odot(ce-df,cf+de)\\ &= (a,b)\odot((c,d)\odot(e,f)).\end{aligned}$$

Desweiteren existiert ein Neutrales Element bezüglich der Multiplikation (Einselement), nämlich $(1,0)$, denn es gilt:

$$(a,b)\odot(1,0)=(a\cdot1,b\cdot1)=(a,b)=(1\cdot a,1\cdot b)=(1,0)\odot(a,b).$$

Hinzu kommt die Existenz des Inversern bezüglich der Multiplikation (ausgenommen ist davon das Nullelement)

$$\begin{aligned}&(a,b)\odot(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})\\ =\;&(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2},a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}+b\cdot\frac{a}{a^2+b^2})\\ =\;&(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},0)\\ =\;&(1,0)\\ =\;&(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},0)\\ =\;&(\frac{a}{a^2+b^2}\cdot a-\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot b,\frac{a}{a^2+b^2}\cdot b+\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot a)\\ =\;&(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})\odot(a,b)\end{aligned}$$

Dann noch die Kommutativität

$$(a,b)\odot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=(c,d)\odot(a,b).$$

Daher handelt es sich bei der Verknüpfung $\odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um eine abelsche Gruppe.

Zu guter Letzt müssen wir noch das Distributivgesetz nachweisen:

$$\begin{aligned}
(a,b) \odot ((c,d) \oplus (e,f)) &= (a,b) \odot (c+e, d+f) \\
&= (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) \\
&= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\
&= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\
&= (ac - bd, ad + bc) \oplus (ae - bf, af + be) \\
&= (a,b) \odot (c,d) \oplus (a,b) \odot (e,f)
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass der $\mathbb{R}^2$ mit $\oplus$ und $\odot$ wirklich zu einem Körper wird. Später werden wir sehen, dass es sich hier um den Körper der komplexen Zahlen handelt.

5.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 5.1.
Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen seien die beiden folgenden Operationen definiert:

Tropische Addition	$\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},$	$a \oplus b := \min(a, b),$
Tropische Multiplikation	$\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},$	$a \odot b := a + b.$

(a) Gelten für $\oplus$ das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz?

(b) Gelten für $\odot$ das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz?

(c) Gilt für die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ das Distributivgesetz?

(d) Wird $\mathbb{Z}$ mit der Tropischen Addition und der Tropischen Multiplikation zum Körper?

Beweisen Sie alle Antworten! $\boxed{\text{6 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 5.1.

(a) Wir überprüfen, ob für $\oplus$ das Assoziativgesetz gilt, also $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$. Dabei müssen wir drei Fälle unterscheiden:

  (i) $a \leq b$ und $a \leq c$: Dann gilt $a \leq \min(b, c)$ und daher auch $a \oplus (b \oplus c) = \min(a, \min(b, c)) = a$. Und andererseits auch $(a \oplus b) \oplus c = \min(\min(a, b), c) = a$. Weshalb wir insgesamt $a \oplus (b \oplus c) = a = (a \oplus b) \oplus c$ erhalten.

  (ii) $b \leq a$ und $b \leq c$: Dann gilt $a \oplus (b \oplus c) = \min(a, \min(b, c)) = \min(a, b) = b$. Und andererseits gilt auch $(a \oplus b) \oplus c = \min(\min(a, b), c) = \min(b, c) = b$. Weshalb wir insgesamt $a \oplus (b \oplus c) = b = (a \oplus b) \oplus c$ erhalten.

  (iii) $c \leq a$ und $c \leq b$: Dann gilt $a \oplus (b \oplus c) = \min(a, \min(b, c)) = \min(a, c) = c$. Und andererseits gilt, wegen $c \leq \min(a, b)$, auch $(a \oplus b) \oplus c = \min(\min(a, b), c) = c$. Weshalb wir insgesamt $a \oplus (b \oplus c) = c = (a \oplus b) \oplus c$ erhalten.

  Wir überprüfen, ob für $\oplus$ das Kommutativgesetz gilt, also $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \oplus b = b \oplus a$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

  (i) $a \leq b$: Dann ist $a \oplus b = \min(a, b) = a = \min(b, a) = b \oplus a$.

  (ii) $b < a$: Dann ist $a \oplus b = \min(a, b) = b = \min(b, a) = b \oplus a$.

(b) Wir überprüfen, ob für $\odot$ das Assoziativgesetz gilt.

$$a \odot (b \odot c) = a \odot (b + c) = a + b + c = (a + b) \odot c = (a \odot b) \odot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

  Wir überprüfen, ob für $\odot$ das Kommutativgesetz gilt.

$$a \odot b = a + b = b + a = b \odot a \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

(c) Ja, es gilt $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

  a) 1.Fall $b \leq c$: Dann ist $a \odot (b \oplus c) = a + \min(b, c) = a + b$. Aus $b \leq c$ folgt $a + b \leq a + c$ und damit $a \odot b \oplus a \odot c = \min(a + b, a + c) = a + b$. Es gilt also $a \odot (b \oplus c) = a + b = a \odot b \oplus a \odot c$.

b) 1.Fall $c < b$: Dann ist $a \odot (b \oplus c) = a + \min(b, c) = a + c$. Aus $c < b$ folgt $a + c < a + b$ und damit $a \odot b \oplus a \odot c = \min(a + b, a + c) = a + c$. Es gilt also $a \odot (b \oplus c) = a + c = a \odot b \oplus a \odot c$.

(d) Nein. Beweis per Widerspruch. Annahme $\mathbb{Z}$ mit $\oplus$ und $\odot$ sei ein Körper. Dann existiert ein neutrales Element bezgl. $\oplus$, also $\exists N \in \mathbb{Z}\ \forall a \in \mathbb{Z} : N \oplus a = a$. Weil $\mathbb{Z}$ induktiv ist liegt mit N auch $b := N + 1$ in $\mathbb{Z}$. Dann folgt $N \oplus b = \min(N, N + 1) = N \neq b$, da es das eindeutig bestimmte neutrale Element ist, sollte aber b herauskommen, also Widerspruch. Das heißt unsere Annahme war falsch und $\mathbb{Z}$ mit den beiden Verknüpfungen ist kein Körper.

Aufgabe 5.2.

(a) Zeigen Sie, dass durch $2|(b-a)$ (2 teilt $b-a$) eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf Mengen darstellt.

Lösung zu Aufgabe 5.2.

(a) Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Relation, welche definiert ist durch: $(a, b) \in R :\Leftrightarrow 2|(b - a)$.

Es ist nun zu zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

(i) Da $a - a = 0$ und $2|0$ für beliebiges $a \in \mathbb{Z}$, gilt $2|(a - a)$ und somit $(a, a) \in R \quad \Rightarrow \quad R$ ist reflexiv.

(ii) Da $2|a \ \Rightarrow\ 2|(-a)$ für beliebiges $a \in \mathbb{Z}$, gilt auch $2|(b-a) \ \Rightarrow\ 2|-(b-a)$, also $2|(a - b)$

$\Rightarrow \quad R$ ist symmetrisch.

(iii) Da aus $2|x$ und $2|y$ auch $2|(x + y)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{Z}$ folgt (die Summe zweier gerader ganzer Zahlen ist wieder gerade), erhalten wir mit $x = b - a$ und $y = c - b$, dass $x + y = c - a$, woraus die Transitivität ersichtlich ist.

(b) Es ist zu zeigen, dass $\subseteq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

(i) Da jede Menge A Teilmenge von sich selbst ist, haben wir Reflexivität.

Genauer: $A \subseteq A \quad :\Leftrightarrow \quad \forall a : (a \in A \Rightarrow a \in A)$, wobei die letzte Implikation trivial ist.

(ii) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so gelten nach Definition $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ und $\forall x : (x \in B \Rightarrow x \in A)$. Das ist aber zusammengefasst $\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Dies wiederum heißt nichts anderes als, dass die Mengen A und B gleich sind. Damit folgt die Antisymmetrie.

(iii) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so ist auch $A \subseteq C$, so dass auch Transitivität vorliegt.

Genauer: Es gilt dann $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ und $\forall x : (x \in B \Rightarrow x \in C)$, was zusammengefasst $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C)$ ergibt. Daraus folgt aber direkt, dass $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in C)$ gilt, was nach Definition mit $A \subseteq C$ übereinstimmt.

Aufgabe 5.3.
Zeige, dass die Zahl $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.

Lösung zu Aufgabe 5.3.
Angenommen es gibt eine Darstellung von $\sqrt{3}$ in den rationalen Zahlen, dann folgt, dass

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

mit teilerfremden $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es folgt weiterhin, dass

$$3n^2 = m^2$$

durch Quadrierung beider Seiten. Also $3|m^2$ (Drei ist Teiler von m^2), daher auch $3|m$. Daher besitzt m die Darstellung

$$m = 3p, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt, dass

$$3n^2 = (3p)^2 = 9p^2$$

also gilt $3|n^2 \Rightarrow 3|n$. Damit ist gezeigt, dass m und n durch drei teilbar sind, was wir aber ausgeschlossen haben. Daher war unsere Annahme falsch und $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 5.4.
Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n. Jedes Kaninchen bringt im Monat ein neues Paar hervor. Jedes Paar gebärt erstmals im zweiten Monat nach der (eigenen) Geburt. Todesfälle bleiben unberücksichtigt. Im Monat 1 gibt es genau ein Kaninchenpaar.

(a) Zeigen Sie, dass $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ mit $a_1 = a_2 = 1$.

(b) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_3, \ldots, a_{33}$.

(c) Zeigen Sie, dass für $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ für $n = 1, 2, \ldots$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 5.4.

(a) Sind nach n Monaten a_n Paare von Kaninchen vorhanden und nach $n+1$ Monaten a_{n+1} Paare von Kaninchen, dann sind nach $n+2$ Monaten neben den a_{n+1} Paaren von Kaninchen noch a_n neue Paare hinzugekommen (denn außer den Paaren, die nach $n+2$ Monaten genau einen Monat alt sind (in diesem Fall die Differenz von $a_{n+1} - a_n$), haben alle Paare jeweils noch ein weiteres Paar geboren).

(b) Die Folgenglieder 3 bis 33 sind

		a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
		2	3	5	8	13	21	34	55
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}
10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
a_{31}	a_{32}	a_{33}							
1346269	2178309	3524578							

(c) Die explizite Formel

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{5.1}$$

kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

IA: Da die Rekursionsformel zweistufig ist, besteht der Induktionsanfang aus zwei Schritten: dem Nachweis der Gültigkeit von Formel (5.1) für a_1 und a_2.
Mit $n = 1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Mit $n = 2$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right) = 1\end{aligned}$$

IS : Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die Formel (5.1) für n und $n+1$ gültig ist. Die Induktionsbehauptung besteht dann darin, dass die Formel (5.1) auch für $n+2$ gilt. Dies können wir nun mit Hilfe der Rekursionsvorschrift nachprüfen:

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= a_n + a_{n+1}\\ &\overset{I.V.}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\\ &\overset{(5.2)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass

$$\left.\begin{aligned}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= \tfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2},\\ \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= \tfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

gilt.

6 (Un)gleichungen

6.1 Wiederholung - (Un)gleichungen

(a) Seien $\mathcal{X}$ eine Menge und $S(x)$ sowie $T(x)$ Terme in $x \in \mathcal{X}$.

   a) Eine Gleichung auf $\mathcal{X}$ ist eine Aussageform der Gestalt $S(x) = T(x)$, wobei S und T Terme in $x \in \mathcal{X}$ sind.
   Die Menge $\{x \in \mathcal{X} : S(x) = T(x)\}$ heißt **Lösungsmenge** der Gleichung.

   b) Eine Ungleichung auf $\mathcal{X}$ ist eine Aussageform der Gestalt

   $$S(x) < T(x) \text{ oder } S(x) > T(x) \text{ oder } S(x) \leq T(x) \text{ oder } S(x) \geq T(x),$$

   wobei S und T Terme in $x \in \mathcal{X}$ sind. Die **Lösungsmenge** der Ungleichung ist analog definiert.

   Bem.: Zahlenbereiche sind beispielsweise die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$.

   Im Weiteren werden wir für $x \in \mathcal{X}$ die Menge $\mathbb{R}$ oder eine „natürliche“ Teilmenge $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ verwenden.

(b) Das **Lösen** einer Gleichung oder Ungleichung über $\mathbb{R}$ bedeutet die Bestimmung der Lösungsmenge der Gleichung als

   a) Aufzählung der Elemente der Menge,

   b) als Intervalle,

   c) oder als endliche Vereinigung der beiden erstgenannten Mengentypen.

   Bsp.: Spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann gibt es

   a) beschränkte Intervalle, welche wir nochmals unterteilen in

      i. offene Intervalle wie bspw. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

      ii. abgeschlossene (kompakte) Intervalle wie bspw. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

      iii. degenerierte Intervalle wie bspw. $]a, a[= \emptyset$, $[a, a] = \{a\}$,

      iv. halboffene Intervalle wie bspw. $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

   b) uneigentliche oder unbeschränkte Intervalle wie beispielsweise

      - $]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,
      - $]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
      - $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
      - $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
      - und speziell $]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}$.

   Bem.: $-\infty, \infty$ sind **keine** Zahlen!!!

(c) Unter einer **äquivalenten Unformung einer Gleichung** $S(x) = T(x)$ versteht man eine Umformung, welche die Lösungsmenge L nicht verändert:

a) Addition/Subtraktion eines $r \in \mathbb{R}$: $S(x) \pm r = T(x) \pm r$,

b) Multiplikation eines $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$: $S(x)r = T(x)r$,

c) Division eines $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$: $\frac{S(x)}{r} = \frac{T(x)}{r}$,

d) Addition/Subtraktion eines Terms $R(x)$: $S(x) \pm R(x) = T(x) \pm R(x)$,

e) Multiplikation eines Terms $R(x)$, der **nirgends** 0 wird: $S(x)R(x) = T(x)R(x)$,

f) Division eines Terms $R(x)$, der **nirgends** 0 wird: $\frac{S(x)}{R(x)} = \frac{T(x)}{R(x)}$.

Bem.: Im Allgemeinen nichtäquivalente Umformungen sind beispielsweise

a) Quadrieren: $(S(x))^2 = (T(x))^2$,

b) Betrag bilden: $|S(x)| = |T(x)|$,

c) Multiplikation eines Terms $R(x)$: $S(x)R(x) = T(x)R(x)$,

In diesen Fällen bleibt die Lösungsmenge gleich oder **vergrößert** sich!

Bem.: Manche Umformungen sind **nicht sinnvoll**:
Division durch 0 oder Division durch einen Term, der irgendwo auf $\mathbb{D}$ Null wird.

(d) Unter einer **äquivalenten Unformung einer Ungleichung** $S(x) < T(x)$ versteht man ebenfalls eine Umformung, welche die Lösungsmenge L nicht verändert:

a) Addition / Subtraktion eines Terms $R(x)$: $S(x) \pm R(x) < T(x) \pm R(x)$,

b) Multiplikation eines Terms $R(x)$, der **immer** > 0 wird: $S(x)R(x) < T(x)R(x)$,

c) Multiplikation eines Terms $R(x)$, der **immer** < 0 wird, und Relation **umkehren**:
$S(x)R(x) > T(x)R(x)$,

d) Division eines Terms $R(x)$, der **immer** > 0 wird: $\frac{S(x)}{R(x)} < \frac{T(x)}{R(x)}$,

e) Division eines Terms $R(x)$, der **immer** < 0 wird, und Relation **umkehren**: $\frac{S(x)}{R(x)} > \frac{T(x)}{R(x)}$.

(e) Anordnungsaxiome:

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen: $x > 0,\ x = 0,\ -x > 0$.

b) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$.

c) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $xy > 0$.

Insbesondere folgt aus (c), dass für alle $x \neq 0$ die Beziehung $x^2 > 0$ gilt.

(f) Der Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als $|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$

Das bedeutet insbesondere, dass für ein $c > 0$ die Ungleichung $|x| \leq c$ äquivalent zu $-c \leq x \leq c$ ist.

(g) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

6.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6.1.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 + y^2 \geq 2xy$

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$

Lösung zu Aufgabe 6.1.

(a) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 \geq 0$. Setzen wir nun $a := x - y$.
Dann gilt auch $(x - y)^2 \geq 0$, d.h. $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, und somit $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

(b) Es gilt die Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$ und somit für $a = x - y$ und $b = y$ auch

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Umgekehrt folgt mit $a = y - x$, $b = x$ aber auch

$$|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x| \quad \Leftrightarrow \quad |y| - |x| \leq |x - y| \quad \Leftrightarrow \quad -(|x| - |y|) \leq |x - y|$$

Demnach gilt insgesamt

$$-|x - y| \;\leq\; |x| - |y| \;\leq\; |x - y| \quad \Leftrightarrow \quad |\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|.$$

Aufgabe 6.2.
Für welche reellen Zahlen x gilt:

(a) $x + 2 > 4 - x$

(b) $3 - 2x > x - 9$

(c) $\frac{x}{3} + 1 \leq 3 - \frac{3}{2}x$

(d) $\frac{x-2}{4-2x} < x$

(e) $\frac{3x+2}{3-2x} \geq 2$

(f) $x - 1 < \frac{2x-4}{x-2}$

(g) $\frac{4x+3}{5-2x} \leq 3$

(h) $\frac{x^2+6x+4}{x^2+x+6} > 1$

Lösung zu Aufgabe 6.2.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} x+2 &> 4-x \\ 2x &> 2 \\ x &> 1, \end{aligned}$$

also für alle $x \in (1, \infty)$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} 3-2x &> x-9 \\ 12 &> 3x \\ 4 &> x, \end{aligned}$$

also für alle $x \in (4, \infty)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x+1 &\leq 3-\frac{3}{2}x \\ \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)x &\leq 2 \\ \frac{11}{6}x &\leq 2 \\ x &\leq \frac{12}{11}, \end{aligned}$$

also für alle $x \in (\infty, \frac{12}{11}]$.

(d) Wir betrachten 2 Fälle

(1) Fall: $x < 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4-2x} &< x \\ x-2 &< 4x-2x^2 \\ 0 &< -2x^2+3x+2 \\ 0 &> x^2-\frac{3}{2}x-1, \end{aligned}$$

was auf die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$ führt. Also $x \in (-\frac{1}{2}, 2)$

(2) Fall: $x > 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4-2x} &< x \\ x-2 &> 4x-2x^2 \\ 0 &> -2x^2+3x+2 \\ 0 &< x^2-\frac{3}{2}x-1, \end{aligned}$$

was auf die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$ führt. Also $x \in (2, \infty)$.

Insgesamt erhalten wir demnach $x \in (-\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{2\}$.

(e) Wir unterscheiden wieder 2 Fälle

(1) Fall: $x < \frac{3}{2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{3-2x} &\geq 2 \\ 3x+2 &\geq 6-4x \\ 7x &\geq 4 \\ x &\geq \frac{4}{7}, \end{aligned}$$

also $x \in [\frac{4}{7}, \frac{3}{2})$.

(2) Fall: $x > \frac{3}{2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{3-2x} &\geq 2 \\ 3x+2 &< 6-4x \\ 7x &< 4 \\ x &< \frac{4}{7}, \end{aligned}$$

was aufgrund von $x > \frac{3}{2}$ nicht möglich ist.

Demnach ergibt sich insgesamt $x \in [\frac{4}{7}, \frac{3}{2})$.

(f) Wir müssen wieder 2 Fälle unterscheiden:

(1) Fall: $x > 2$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x-1 &< \frac{2x-4}{x-2} \\ (x-1)(x-2) &< 2x-4 \\ x^2-5x+6 &< 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Lösungen $x_1 = 2, x_2 = 3$ ergeben, es folgt $x \in (2,3)$.

(2) Fall: $x < 2$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x-1 &< \frac{2x-4}{x-2} \\ (x-1)(x-2) &> 2x-4 \\ x^2-5x+6 &> 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Lösungen $x_1 = 2, x_2 = 3$ ergeben, es folgt $x \in (-\infty, 2)$.

Insgesamt erhalten wir demnach $x \in (\infty, 3) \setminus \{2\}$.

(g) Wir müssen wiederrum 2 Fälle unterscheiden:

(1) Fall: $x < \frac{5}{2}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{4x+3}{5-2x} &\leq 3 \\ 4x+3 &\leq 15-6x \\ 10x &\leq 12 \\ x &\leq \frac{6}{5}, \end{aligned}$$

demnach $x \in (\infty, \frac{6}{5}]$.

(2) Fall: $x > \frac{5}{2}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{4x+3}{5-2x} &\leq 3 \\ 4x+3 &> 15-6x \\ 10x &> 12 \\ x &> \frac{6}{5}, \end{aligned}$$

demnach $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$.

Insgesamt ergibt sich demnach $x \in \left\{(-\infty, \frac{6}{5}] \cup (\frac{5}{2}, \infty)\right\}$.

(h) Es gilt $x^2 + x + 6 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, daher

$$\begin{aligned} \frac{x^2+6x+4}{x^2+x+6} &> 1 \\ x^2+6x+4 &> x^2+x+6 \\ 5x &> 2 \\ x &> \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

also $x \in (\frac{2}{5}, \infty)$.

Aufgabe 6.3.
Geben Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$|x-2| < |x-3|$$

an, wenn $a)$ $x \in \mathbb{R}$ ist und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen!

Lösung zu Aufgabe 6.3.
$x \in \mathbb{R}$:

<u>Fall</u> $x \geq 3$:
Die Ungleichung lautet dann $x - 2 < x - 3 \;\Leftrightarrow\; -2 < -3 \quad \Rightarrow$ falsche Aussage

<u>Fall</u> $2 \leq x < 3$:
Die Ungleichung lautet dann $x - 2 < 3 - x \;\Leftrightarrow\; x < \frac{5}{2}$.
Wir erhalten das Intervall $[2, \frac{5}{2}[$.

<u>Fall</u> $x < 2$:
Die Ungleichung lautet dann $2 - x < 3 - x \;\Leftrightarrow\; 2 < 3 \quad \Rightarrow$ wahre Aussage
Wir erhalten somit das Intervall $]-\infty, 2[$.

Die Lösungsmenge ist demnach $L \;=\;]-\infty, \frac{5}{2}[$.

Alternativer Lösungsweg: Quadrieren beider Seiten ergibt

$$|x-2|^2 < |x-3|^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2 < (x-3)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2-4x+4 < x^2-6x+9$$
$$\Leftrightarrow\; x < \tfrac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x \in \;]-\infty, \tfrac{5}{2}[.$$

Aufgabe 6.4.

(a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| + 2 \leq \frac{1}{x}$.

(b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2 - |1 - |x||| \leq 3$.

Lösung zu Aufgabe 6.4.

(a) Zunächst einmal muss $x \neq 0$ gelten, sonst ist die rechte Seite nicht definiert. Desweiteren kommen nur positive x in Frage, sonst ist die linke Seite positiv, die rechte aber negativ.

1. Fall: Für $0 < x < 2$ gilt

$$|x-2| + 2 \leq \frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad -(x-2) + 2 \leq 1/x \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 4x + 1 \geq 0,$$

d.h., dass die obigen Ungleichungen alle äquivalent sind. Die rechte Seite der letzten Ungleichung stellt eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ und $2 + \sqrt{3}$. Somit ist im Fall $x \in \mathbb{D} = \;]0, 2[$ die Lösungsmenge $L = \;]0, 2 - \sqrt{3}[$.

2. Fall: Für $2 \leq x$ gilt

$$|x-2| + 2 \leq \frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad (x-2) + 2 \leq 1/x \quad\Leftrightarrow\quad x^2 \leq 1.$$

Da die letzte Ungleichung nur für $x \in [-1, 1]$ eine wahre Aussage darstellt, wir uns aber im Fall $x \geq 2$ befinden, ist die Lösungsmenge hier leer.

(b) Wir gehen bei dieser Gleichung schrittweise vor:

1. $|2 - z| \leq 3 \quad\Leftrightarrow\quad |z - 2| \leq 3 \quad\Leftrightarrow\quad -3 \leq z - 2 \leq 3 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leq z \leq 5$,
2. $-1 \leq |1 - y| \leq 5 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \leq |y - 1| \leq 5 \quad\Leftrightarrow\quad -5 \leq y - 1 \leq 5 \quad\Leftrightarrow\quad -4 \leq y \leq 6$,
3. $-4 \leq |x| \leq 6 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \leq |x| \leq 6 \quad\Leftrightarrow\quad -6 \leq x \leq 6$.

Damit ist die Lösungsmenge also $L = [-6, 6]$.

Aufgabe 6.5.

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$

(b) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \;\leq\; \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für} \quad a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 6.5.

(a) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die Äquivalenzen

$$0 \leq (a-b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2ab \leq a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad ab \leq \tfrac{a^2}{2} + \tfrac{b^2}{2}\,.$$

(b) Wir definieren zunächst

$$A \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad B \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Falls $A = 0$, dann sind alle $a_k = 0, k = 1, \ldots, n$ und die Ungleichung degeneriert zu $0 \leq 0$, was aufgrund der Reflexivität von $\leq$ erfüllt ist. Falls $B = 0$, dann sind analog alle $b_k = 0, k = 1, \ldots, n$ und die Ungleichung degeneriert ebenfalls zu $0 \leq 0$. Demnach seien ohne Beschränkung der Allgmeinheit $A, B > 0$.

Für $k = 1, \ldots, n$ definieren wir jetzt $\alpha_k = \frac{|a_k|}{A}$ sowie $\beta_k = \frac{|b_k|}{B}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^2}{A^2} \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{A^2} \;=\; 1 \qquad \text{sowie} \qquad \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k|^2}{B^2} \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}{B^2} \;=\; 1.$$

Damit gelangen wir zu

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|}{A \cdot B} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k b_k|}{A \cdot B} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A} \cdot \frac{|b_k|}{B} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \;\overset{(a)}{\leq}\; \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k^2}{2} + \frac{\beta_k^2}{2}\right) \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2}{2} \;=$$

Nach Multiplikation von A und B erhalten wir die gesuchte Ungleichung.

Aufgabe 6.6.

Bestimmen Sie über $\mathbb{R}$ die Lösungsmengen von folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $|x - 2| \;=\; \frac{1}{2}x - 4\,.$

(b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 - 1} \;=\; 0\,.$

(c) $\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; |x - 2|\,.$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-7} = \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14}.$

(e) $\log_2(x) \;=\; 3\,.$

(f) $\log_x(125) \;=\; 3\,.$

Lösung zu Aufgabe 6.6.

(a) $|x-2| \;=\; \frac{1}{2}x-4\,.$ Da die linke Seite stets größer oder gleich 0 ist, muss es die rechte Seite auch sein, also muss insbesondere $\frac{1}{2}x \geq 4$ sein. Demnach betrachten wir nur $x \geq 8\,.$ Dann lautet die Gleichung

$$x-2 \;=\; \frac{1}{2}x-4 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}x \;=\; -2 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; -4.$$

Diese Lösung ist jedoch negativ und damit nicht größer oder gleich $8\,.$ $\quad\Rightarrow\; L=\emptyset\,.$

(b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1} \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x+1} \;=\; \sqrt{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad x+1 \;=\; x^2-1 \wedge x \geq -1\,.$
Dies führt auf die quadratische Gleichung $x^2-x-2=0$, welche die Lösungen $x_{1/2} = \frac{1\pm 3}{2}$ besitzt, welche beide ≥ -1 sind. Eine Probe bestätigt, dass es sich nicht um Scheinlösungen handelt. $\quad\Rightarrow\; L=\{-1,2\}\,.$

(c) $\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; |x-2|\,.$ Für $x=-1$ ist die linke Seite zunächst einmal nicht definiert.
Fall 1: $x<-1$ Dann geht die Ungleichung über in

$$\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; 2-x \quad\Leftrightarrow\quad x-1 \;\geq\; (2-x)(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad x-1 \;\geq\; 2+x-x^2.$$

Das ist wiederum äquivalent zu $x^2 \geq 3\,.$ Da wir uns im Fall $x<-1$ befinden, erhalten wir daraus das Intervall $]-\infty,-\sqrt{3}]\,.$

Fall 2: $2>x>-1$ Dann geht die Ungleichung über in

$$\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; 2-x \quad\Leftrightarrow\quad x-1 \;\leq\; (2-x)(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad x-1 \;\leq\; 2+x-x^2.$$

Das ist wiederum äquivalent zu $x^2 \leq 3\,.$ Da wir uns im Fall $2>x>-1$ befinden, erhalten wir daraus das Intervall $]-1,\sqrt{3}]\,.$

Fall 3: $x>2$ Dann geht die Ungleichung über in

$$\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; x-2 \quad\Leftrightarrow\quad x-1 \;\leq\; (x-2)(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad x-1 \;\leq\; x^2-x-2.$$

Das ist wiederum äquivalent zu $0 \leq x^2-2x-1\,.$ Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $1\pm\sqrt{2}\,.$ Da wir uns im Fall $x>2$ befinden, erhalten wir daraus das Intervall $[1+\sqrt{2},\infty[\,.$

Somit ergibt sich die Lösungsmenge als Vereinigung der drei erhaltenen Intervalle zu

$$L \;=\;]-\infty,-\sqrt{3}] \;\cup\;]-1,\sqrt{3}] \;\cup\; [1+\sqrt{2},\infty[.$$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-7} \;=\; \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{4}{3}\right)^{7-5x} \;=\; \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{4}{3}\right)^{7-5x} \;=\; \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-28}.$
Dies ist wiederum äquivalent zu
$\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^{7-5x} \;=\; \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-28} \;\Leftrightarrow\; 7-5x \;=\; 2x-28 \;\Leftrightarrow\; 35 \;=\; 7x \;\Rightarrow\; L=\{5\}\,.$

(e) $\log_2(x) \;=\; 3 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{\log_2(x)} \;=\; 2^3 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; 2^3 \quad\Rightarrow\quad L = \{8\}$.

(f) $\log_x(125) \;=\; 3 \quad\Leftrightarrow\quad x^{\log_x(125)} \;=\; x^3 \quad\Leftrightarrow\quad 125 \;=\; x^3 \quad\Leftrightarrow\quad x = 5 \;\Rightarrow\; L = \{5\}$.

Aufgabe 6.7.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die gilt

(a) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1$,

(b) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$,

(c) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} < 1$.

Lösung zu Aufgabe 6.7.
Es sollten die Lösungsmengen der Ungleichungen $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1$, $\;= 1$ und < 1 ermittelt werden. Für die Zahlen {-1,1} ist die linke Seite nicht definiert. Für alle anderen Zahlen gilt

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} \;=\; \frac{x(x-1) + 1(x+1)}{x^2-1} \;=\; \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

(a) Da $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ kann die linke Seite der Ungleichung $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 1$ nur in dem Fall $x^2 - 1 > 0$ positiv sein. Wir erhalten dann

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^2-1} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + 1 > x^2 - 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 > -1.$$

Die letzte Aussage ist immer wahr, bringt also keine neuen Einschränkungen. Somit ist die Lösungsmenge

$$L \;=\; \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} \;=\; \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \;=\;]-\infty, -1[\cup]1, \infty[.$$

(b) Es gilt

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + 1 = x^2 - 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 = -1.$$

Die letzte Aussage ist immer falsch. Daher ist hier $L = \emptyset$.

(c) Für die Ungleichung $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} < 1$ müssen wir nochmals unterscheiden in

(i) $x^2 - 1 > 0$: Hier ist die Ungleichung äquivalent zu $x^2 + 1 < x^2 - 1$ und weiter $1 < -1$, was jedoch eine falsche Aussage ist. Daher ist die Lösungsmenge in diesem Fall leer.

(ii) $x^2 - 1 < 0$: Hier gelangen wir durch äquivalente Umformungen analog zu $1 > -1$, was stets eine wahre Aussage ist.

Insgesamt haben wir daher $L \;=\; \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\} \;=\;]-1, 1[$.

Aufgabe 6.8.
Ermitteln Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen und stellen Sie diese in der $x_1 x_2$-Ebene dar.

(a) $x_1^2 + x_2^2 = 1\,,$ (b) $x_1^2 + x_2^2 \le 1\,,$

(c) $|x_1| + |x_2| = 1\,,$ (d) $|x_1| + |x_2| \le 1\,,$

(e) $\max(|x_1|, |x_2|) = 1\,,$ (f) $\max(|x_1|, |x_2|) \le 1\,.$

Lösung zu Aufgabe 6.8.
Es waren die folgenden Mengen graphisch darzustellen:

(a) $L = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1, 1], x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1, 1], x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}\}$
...der Rand des Einheitskreises.

(b) $L = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1, 1], -\sqrt{1 - x_1^2} \le x_2 \le \sqrt{1 - x_1^2}\}$
...die Fläche des Einheitskreises samt Rand.

(c) $L = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 1-x_1\} \cup \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, x_2 = x_1-1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 0, x_2 = 1 + x_1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 0, x_2 = -1 - x_1\}$
...ein Quadrat mit den vier Ecken $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

(d) $L = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, x_1 - 1 \le x_2 \le 1 - x_1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 0, -1 - x_1 \le x_2 \le 1 + x_1\}$
...die Fläche des Quadrates mit den vier Ecken $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ samt Rand.

(e) $L = \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 1, x_2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 1, x_2 = -1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, -1 \le x_2 \le 1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = -1, -1 \le x_2 \le 1\}$
...das Quadrat mit den Ecken $(1, 1)(-1, 1)(-1, -1)(1, -1)$.

(f) $L = \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1\}$
...die Fläche des Quadrates mit den Ecken $(1, 1)(-1, 1)(-1, -1)(1, -1)$ samt Rand.

Aufgabe 6.9.

(a) Zeigen Sie, dass aus $b = \frac{a}{1+|a|}$ die Aussagen $|b| < 1$ und $a = \frac{b}{1-|b|}$ folgen.

(b) Man zeige, dass für positive reelle Zahlen a und b stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ ist.

(c) Für welche reellen Zahlen a, b gilt $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$?

Lösung zu Aufgabe 6.9.

(a) Fall 1: $a > 0$. Dann ist $|a| = a$ und $b = \frac{a}{1+a} > 0$ und $b = \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1+a}_{>0}} < 1\,,$

also insgesamt $0 < b < 1$ und $b = |b|$. Weiterhin folgt dann

$$b = \frac{a}{1+a} \Leftrightarrow b(1+a) = a \Leftrightarrow b + a(b-1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-b}{b-1}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{1-b} \Leftrightarrow a = \frac{b}{1-|b|}$$

Fall 2: $a = 0$. Dann ist auch $b = 0$ und somit $|b| < 1$ sowie $a = \frac{b}{1-|b|}$.

Fall 3: $a < 0$. Dann ist $-a = |a|$.
Wegen $a < 0$ und $1 - a > 0$ ist dann auch $b = \frac{a}{1-a} < 0$.
Weiterhin ist $b = \frac{a}{1-a} = -1 + \frac{1}{\underbrace{1-a}_{>0}} > -1$, so dass $-1 < b < 0$, also $|b| = -b$ gilt.

$$b = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow b(1-a) = a \Leftrightarrow b - a(b+1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{b+1}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{1-(-b)} \Leftrightarrow a = \frac{b}{1-|b|}$$

(b) $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

(c) Für $a + b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -b \Leftrightarrow b \geq -a$, denn:

$$(a+b) \geq 0 \Rightarrow (a+b)\underbrace{(a-b)^2}_{>0} \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$
$$\Leftrightarrow 3(a^3 + b^3) \geq 3a^2b + 3ab^2$$
$$\Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

Aufgabe 6.10.
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmengen von

(a) $\sqrt{8x+1} - \sqrt{10x+6} = -1$.

(b) $2x^7 - 10x^5 + 8x^3 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 6.10.

(a) Es gelten die folgenden Implikationen

$$\begin{aligned}\sqrt{8x+1}-\sqrt{10x+6}=-1 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{8x+1}=\sqrt{10x+6}-1\\ &\Rightarrow \quad 8x+1=10x+6-2\sqrt{10x+6}+1\\ &\Rightarrow \quad 2\sqrt{10x+6}=2x+6\\ &\Rightarrow \quad \sqrt{10x+6}=x+3\\ &\Rightarrow \quad 10x+6=x^2+6x+9\\ &\Rightarrow \quad 0=x^2-4x+3.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besitzt die Lösungen $\{1,3\}$. Da wir jedoch nichtäquivalente Umformungen (Quadrieren) durchgeführt haben, haben wir alle Lösungen zu überprüfen:

$\underline{x=1}$: $\sqrt{8\cdot 1+1}-\sqrt{10\cdot 1+6} = \sqrt{9}-\sqrt{16} = 3-4 = -1 \quad \Rightarrow \{1\}\in L$.

$\underline{x=3}$: $\sqrt{8\cdot 3+1}-\sqrt{10\cdot 3+6} = \sqrt{25}-\sqrt{36} = 5-6 = -1 \quad \Rightarrow \{3\}\in L$.

Damit ist die Lösungsmenge $L = \{1,3\}$.

(b) Es gilt die folgende Äquivalenz:

$$2x^7-10x^5+8x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^4-5x^2+4) = 0.$$

Die letzten Gleichung besitzt erst einmal die dreifache Lösung $\{0\}$. Setzem wir außerdem $y:=x^2$, dann geht die Gleichung $x^4-5x^2+4 = 0$ in $y^2-5y+4 = 0$ über, welche die Lösungen $\{\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}\} = \{1,4\}$ besitzt.

Demnach ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung $L = \{-2,-1,0,1,2\}$.

Aufgabe 6.11.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L=\{x\in\mathbb{D}: S(x)=T(x)\}$ für die folgenden Gleichungen. Dabei seien $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(a) $\sqrt{x}=5$ auf der Menge $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$,

(b) $\frac{x^3}{x}=4$ auf der Menge $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

(c) $bx+c=0$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine lineare Gleichung),

(d) $x^2=a$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied),

(e) $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine quadratische Gleichung),

(f) $\frac{x^2-1}{x-1}=-x$ auf $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

(g) $\sqrt{x}=2-x$ auf $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.11.

(a) $L=\{25\}$.

(b) $L=\{-2,2\}$.

(c) Fall 1: $b \neq 0: \quad L = \{-c/b\}$

Fall 2: $b = 0$

(i) $b = 0\,,\ c = 0:\ L = \mathbb{R}\,,$

(ii) $b = 0\,,\ c \neq 0:\ L = \emptyset\,.$

(d) Falls $a < 0$ ist $L = \emptyset$, falls $a = 0$ ist $L = \{0\}$ und falls $a > 0$ ist $L = \{-\sqrt{a}, +\sqrt{a}\}$.

(e) Wir setzen $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$. Dann können wir äquivalent umformen:

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x^2 + px + q\right) \;=\; a\left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right) \;=\; 0$$

Da $a \neq 0$, ist dies zusammen mit der ersten binomischen Formel äquivalent zu

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \frac{p^2}{4} - q$$

Setzen wir $D := \frac{p^2}{4} - q$, gelangen wir zu den folgenden Fallunterscheidungen

(i) $D < 0: \quad L = \emptyset\,,$

(ii) $D = 0:\ L = \{-\frac{p}{2}\}\,,$

(iii) $D > 0:\ L = \{-p/2 - \sqrt{D}, -p/2 + \sqrt{D}\}\,.$

(f) Multiplikation mit $x - 1$, da dieser Term auf $\mathbb{D}$ immer $\neq 0$ ist, ist eine äquivalente Umformung:

$$x^2 - 1 = -x^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{R}$ wäre $\{-\frac{1}{2}, 1\}$. Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist jedoch nur $L = \{-\frac{1}{2}\}$.

(g) Quadrieren liefert $x = 4 - 4x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4 - 5x + x^2$.
Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist zunächst $\{1, 4\}$. Da Quadrieren jedoch möglicherweise die Lösungsmenge vergrößert hat, testen wir mit der ursprünglichen Gleichung:

$x = 1: \quad \sqrt{1} = 2 - 1$ wahr,

$x = 4: \quad \sqrt{4} = 2 - 4$ falsch.

Damit ist die Lösungsmenge der Ursprungsgleichung $L = \{1\}$.

6.3 Aufgabenserie und Lösungen

Aufgabe 6.1.
Man bestimme alle reellen Werte x, für die gilt:

(a) $|\frac{3}{2}x - 2| = \frac{5}{2}$

(b) $|x - 4| < 6$

(c) $|2x + 1| = |x - 1| + 1$

(d) $|\frac{x-3}{2x+4}| < 1$

(e) $|x - 1| + |x + 5| \leq 4$

(f) $|2 - |x + 1| - |x + 2|| = 1$

(g) $||x + 1| - |x + 3|| < 1$

Lösung zu Aufgabe 6.1.

(a) Wir unterscheiden 2 Fälle:

(1) Fall: $\frac{3}{2}x - 2 \geq 0,$ dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 2 &= \frac{5}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(2) Fall: $\frac{3}{2}x - 2 < 0,$ dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 2 &= -\frac{5}{2} \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $x \in \left\{3, -\frac{1}{3}\right\}$.

(b) Wir unterscheiden 2 Fälle:

(1) Fall: $x \geq 4$

$$\begin{aligned} x - 4 &< 6 \\ x &< 10, \end{aligned}$$

also $x \in [4, 10)$

(2) Fall: $x < 4$

$$\begin{aligned} -x + 4 &< 6 \\ x &> -2, \end{aligned}$$

also $x \in (-2, 4)$

Insgesamt ergibt sich somit $x \in (-2, 10)$.

(c) Wir unterscheiden 3 Fälle

(1) Fall: $x \geq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x \\ x &= -1, \end{aligned}$$

was wir ausschließen können da $x \geq 1$.

(2) Fall: $-\frac{1}{2} \leq x < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -x + 2 \\ x &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

(3) Fall: $x < -\frac{1}{2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} -2x - 1 &= -x + 2 \\ x &= -3, \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit $x \in \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$.

(d) Wir unterscheiden 3 Fälle:

(1) Fall: $x \geq 3$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2x+4} &< 1 \\ x - 3 &< 2x + 4 \\ -7 &< x, \end{aligned}$$

also $x \in [3, \infty)$

(2) Fall: $-2 < x < 3$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2x+4} &< 1 \\ -x + 3 &> 2x + 4 \\ -1 &> 3x \\ x &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

also $x \in (2, -\frac{1}{3})$.

(3) Fall: $x < -2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2x+4} &< 1 \\ x - 3 &> 2x + 4 \\ -7 &> x, \end{aligned}$$

also $x \in (-\infty, -7)$.

Insgesamt folgt $x \in \left\{(-\infty, -7) \cup (-2, -\frac{1}{3}) \cup [3, \infty)\right\}$

(e) Wir unterscheiden 3 Fälle

(1) Fall: $x \geq 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} x - 1 + x + 5 &\leq 4 \\ 2x &\leq 0 \end{aligned}$$

da $x \geq 1$ entfällt $x \leq 0$.

(2) Fall: $-5 \leq x < 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} -x + 1 + x + 5 &\leq 4 \\ 6 &\leq 4 \end{aligned}$$

ist keine wahre Aussage.

(3) Fall: $x < -5$, dann gilt

$$\begin{aligned} -x + 1 - x - 5 &\leq 4 \\ -2x &\leq 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

entfällt, da $x < -5$.

Daher erfüllt kein x die Gleichung.

(f) Wir unterscheiden 2 große Fälle

(1) Fall: $2 - |x+1| - |x+2| \geq 0$, dann müssen wir nochmal 3 Fälle unterscheiden

(i) Fall $x \geq -1$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2 - x - 1 - x - 2 &= 1 \\ -2x &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

(ii) Fall $-2 \leq x < -1$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2 + x + 1 - x - 2 &= 1 \\ 1 &= 1, \end{aligned}$$

ist eine wahre Aussage, daher $x \in [-2, -1)$

(iii) Fall $x < -2$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2 + x + 1 + x + 2 &= 1 \\ x &= -2, \end{aligned}$$

entfällt, weil $x < -2$.

Demnach $x \in [-2, -1]$.

(2) Fall: $2 - |x+1| - |x+2| < 0$, dann müssen wir nochmal 3 Fälle unterscheiden

(i) Fall $x \geq -1$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2 - x - 1 - x - 2 &= -1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Fall $-2 \leq x < -1$, entfällt, weil sonst $2 - |x+1| - |x+2| \geq 0$

(iii) Fall $x < -2$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2 + x + 1 + x + 2 &= -1 \\ x &= -3, \end{aligned}$$

Demnach $x \in \{-3, 0\}$.

Insgesamt also $x \in \{\{-3, 0\} \cup [-2, -1]\}$.

(g) Wir unterscheiden wieder 2 große Fälle:

(1) Fall: $|x+1| - |x+3| \geq 0$, dann unterscheiden wir 3 kleinere Fälle:

(i) Fall: $x \geq -1$, entfällt, da ansonsten $|x+1| - |x+3| < 0$

(ii) Fall: $-3 \leq x- < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} -x - 1 - x - 3 &< 1 \\ -2x &< 5 \\ x &> -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

wegen $|x+1| - |x+3| \geq 0$ erhalten wir $x \in (-\frac{5}{2}, -2]$.

(iii) Fall: $x < -3$, dann gilt

$$\begin{aligned} -x - 1 + x + 3 &< 1 \\ 2 &< 1 \end{aligned}$$

ist eine falsche Aussage.

(2) $|x+1| - |x+3| < 0$, dann unterscheiden wir 3 kleiner Fälle:

(i) Fall: $x \geq -1$, dann gilt

$$\begin{aligned} x + 1 - x - 3 &> -1 \\ -2 &> -1 \end{aligned}$$

ist eine falsche Aussage

(ii) Fall: $-3 \leq x < -1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} -x - 1 - x - 3 &> -1 \\ -2x &> 3 \\ x &< -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

wegen $|x+1| - |x+3| < 0$ erhalten wir $x \in (-2, -\frac{3}{2})$.

(iii) Fall: $x < -3$, entfällt wegen $|x+1| - |x+3| < 0$

Also $x \in (-2, -\frac{3}{2})$

Insgesamt ergibt sich demnach $x \in (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

Aufgabe 6.2.
Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der x, y-Ebene:

$$\begin{aligned} &(a) \quad \{(x,y) : y \geq 1 - x\}\,, \\ &(b) \quad \{(x,y) : x^2 + (y-2)^2 \geq 4\}\,, \\ &(c) \quad \left\{(x,y) : \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\; x \neq 0,\; y \neq 0\right\}; \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.2.

(a) Alles oberhalb und einschließlich der Geraden $y = -x + 1$.

(b) Alles außerhalb des Kreisen, einschließlich des Kreisrandes, mit dem Mittelpunkt $(0, 2)$ und Radius 2.

(c) Der IV. Quadrant, sowie jeweils die Hälften der Quadranten I. und III. oberhalb der Funktion $y = x$. Ohne die Koordinatenachsen und die Funktion selber.

Aufgabe 6.3.
Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

(a) $\frac{3}{|x+2|} < 2 - 3x$,

(b) $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1+\frac{1}{x+2}}{1-\frac{1}{x+2}} < 2$.

Hinweis: Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die linke Seite nicht definiert ? Vereinfachen Sie !

Lösung zu Aufgabe 6.3.

(a) Es sollte die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{3}{|x+2|} < 2 - 3x$ bestimmt werden. Für $x = -2$ ist die linke Seite nicht definiert. Wir unterscheiden demnach in die Fälle

(i) $x > -2$: In diesem Fall haben wir

$$\frac{3}{|x+2|} < 2-3x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{x+2} < 2-3x \quad\Leftrightarrow\quad 3 < (2-3x)(x+2) \;\Leftrightarrow\; 3x^2+4x-1 < 0.$$

Da $3x^2+4x-1$ eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $\{-\frac{2+\sqrt{7}}{3}, -\frac{2-\sqrt{7}}{3}\}$ darstellt, haben wir hier die Lösungsmenge

$$\left]-2,\infty\right[\;\cap\; \left]-\tfrac{2+\sqrt{7}}{3}, -\tfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\;=\; \left]-\tfrac{2+\sqrt{7}}{3}, -\tfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[.$$

(ii) $x < -2$: In diesem Fall haben wir

$$\frac{3}{|x+2|} < 2-3x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-3}{x+2} < 2-3x \;\Leftrightarrow\; -3 > (2-3x)(x+2) \;\Leftrightarrow\; 3x^2+4x-7 > 0.$$

Da $3x^2 + 4x - 7$ eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $\{-\frac{7}{3}, 1\}$ darstellt, haben wir hier die Lösungsmenge

$$\left]-\infty,-2\right[\;\cap\; \Big(\left]-\infty,-\tfrac{7}{3}\right[\;\cup\; \left]1,\infty\right[\Big) \;=\; \left]-\infty,-\tfrac{7}{3}\right[.$$

Insgesamt haben wir demnach die Lösungsmenge

$$L \;=\; \left]-\tfrac{2+\sqrt{7}}{3}, -\tfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\;\cup\; \left]-\infty, -\tfrac{7}{3}\right[.$$

(b) Die linke Seite ist für $x = 0, -1, -2$ nicht definiert, und es gilt

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1+\frac{1}{x+2}}{1-\frac{1}{x+2}} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)} = 2 \quad ,$$

also gibt es kein x, für das die linke Seite < 2 ist, die Lösungsmenge ist die leere Menge $\emptyset$.

Aufgabe 6.4.
Modifizieren Sie das Maple-Worksheet Bisektion.mw zur Durchführung von jeweils 10 Schritten des Bisektionsverfahrens zur Berechnung von

a) $\sqrt{5}$ beginnend mit $[a_0, b_0] = [2, 3]$,
b) $\sqrt[3]{2}$ beginnend mit $[a_0, b_0] = [1, 2]$ und
c) π beginnend mit $[a_0, b_0] = [3, 4]$.

Drucken Sie ihre Ergebnisse aus und geben Sie diese zusammen mit ihren Lösungen ab.

Lösung zu Aufgabe 6.4.

Bisektionsverfahren zur Bestimmung irrationaler Zahlen

Berechnung von $\sqrt{2}$

```
> restart:Digits:=10;
```

$$Digits := 10$$

```
> B:=(a,b)->evalb( (a^2-2)*(b^2-2)<0);
```

$$B := (a, b) \rightarrow evalb\left(\left(a^2 - 2\right) \left(b^2 - 2\right) < 0 \right)$$

B(a,b) ist wahr, wenn $\sqrt{2}$ in [a,b] liegt

```
> a:=1; b:=2;
```

$$a := 1$$

$$b := 2$$

```
> B(1,2);
```

$$true$$

Folglich liegt $\sqrt{2}$ in [1,2]

```
> for k from 1 while (b-a)>1e-3 do
  c:=(a+b)/2:
  if B(a,c) then b:=c else a:=c end if;
  print (k,evalf(a),evalf(b));
  end do:
  Digits:=20;
  print (k,evalf(a),evalf(b));
> evalf( sqrt(2) );
```

1, 1., 1.500000000

2, 1.250000000, 1.500000000

3, 1.375000000, 1.500000000

4, 1.375000000, 1.437500000

5, 1.406250000, 1.437500000

6, 1.406250000, 1.421875000

7, 1.414062500, 1.421875000

8, 1.414062500, 1.417968750

9, 1.414062500, 1.416015625

10, 1.414062500, 1.415039062

$$Digits := 20$$

11, 1.4140625000000000000, 1.4150390625000000000

1.4142135623730950488

Berechnung von $\sqrt{5}$

```
> restart:Digits:=10;
```

$$Digits := 10$$

```
> B:=(a,b)->evalb( (a^2-5)*(b^2-5)<0);
```

$$B := (a, b) \rightarrow evalb\left(\left(a^2 - 5\right) \left(b^2 - 5\right) < 0\right)$$

B(a,b) ist wahr, wenn $\sqrt{5}$ in [a,b] liegt

```
> a:=2; b:=3;
```

$$a := 2$$

$$b := 3$$

```
> B(2,3);
```

$$true$$

Folglich liegt $\sqrt{5}$ in [2,3]

```
> for k from 1 while(b-a)>1e-3 do
  c:=(a+b)/2:
  if B(a,c) then b:=c else a:=c end if;
  print (k,evalf(a),evalf(b));
  end do:
  print (k,evalf(a),evalf(b));
> evalf( sqrt(5));
```

1, 2., 2.500000000

2, 2., 2.250000000

3, 2.125000000, 2.250000000

4, 2.187500000, 2.250000000

5, 2.218750000, 2.250000000

6, 2.234375000, 2.250000000

7, 2.234375000, 2.242187500

8, 2.234375000, 2.238281250

9, 2.234375000, 2.236328125

10, 2.235351562, 2.236328125

11, 2.235351562, 2.236328125

2.236067977

Berechnung von $2^{\frac{1}{3}}$

```
> restart:Digits:=10;
```

$$Digits := 10$$

```
> B:=(a,b)->evalb( (a^3-2)*(b^3-2)<0 );
```

$$B := (a, b) \rightarrow evalb\left((a^3 - 2)\,(b^3 - 2) < 0 \right)$$

B(a,b) ist wahr, wenn 2^(1/3) in [a,b] liegt

```
> a:=1; b:=2;
```

$$a := 1$$

$$b := 2$$

```
> B(1,2);
```

$$true$$

Folglich liegt 2^(1/3) in [1,2]

```
> for k from 1 while (b-a)>1e-3 do
  c:=(a+b)/2:
  if B(a,c) then b:=c else a:=c end if;
  print (k,evalf(a),evalf(b));
  end do:
  print (k,evalf(a),evalf(b));
  evalf(2^(1/3));
```

1, 1., 1.500000000

2, 1.250000000, 1.500000000

3, 1.250000000, 1.375000000

4, 1.250000000, 1.312500000

5, 1.250000000, 1.281250000

6, 1.250000000, 1.265625000

7, 1.257812500, 1.265625000

8, 1.257812500, 1.261718750

9, 1.259765625, 1.261718750

10, 1.259765625, 1.260742188

11, 1.259765625, 1.260742188

1.259921050

Berechnung von π

```
> restart:Digits:=10;
```

$$Digits := 10$$

```
> B:=(a,b)->evalb( evalf(sin(a))*evalf(sin(b))<0 );
```

$$B := (a, b) \rightarrow evalb(evalf(\sin(a))\ evalf(\sin(b)) < 0)$$

B(a,b) ist wahr, wenn π (oder ein Vielfaches von π) in [a,b] liegt

```
> a:=3; b:=4;
```

$$a := 3$$

$$b := 4$$

```
> B(3.,4.);
```

$$true$$

π liegt in [3,4] !

```
> for k from 1 while (b-a)>1e-3 do
  c:=(a+b)/2:
  if B(a,c) then b:=c else a:=c end if;
  print (k,evalf(a),evalf(b));
  end do:
  print (k,evalf(a),evalf(b));
```

1, 3., 3.500000000

2, 3., 3.250000000

3, 3.125000000, 3.250000000

4, 3.125000000, 3.187500000

5, 3.125000000, 3.156250000

6, 3.140625000, 3.156250000

7, 3.140625000, 3.148437500

8, 3.140625000, 3.144531250

9, 3.140625000, 3.142578125

10, 3.140625000, 3.141601562

11, 3.140625000, 3.141601562

```
> evalf(Pi);
```

3.141592654

7 Komplexe Zahen

7.1 Wiederholung - Theorie: Komplexe Zahlen

(a) Wir definieren mit $i := \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Es gilt demnach $i^2 = -1$.

(b) Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann als kartesisches Produkt $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ aufgefasst werden.

Das bedeutet, für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ existieren genau zwei reelle Zahlen $a_z, b_z \in \mathbb{R}$, so dass $z = a_z + ib_z$.

(c) Für $z = a_z + ib_z$ bezeichnet $\Re(z) := a_z$ den **Realteil** und $\Im(z) := b_z$ den **Imaginärteil**.

(d) Für $z = a + ib$ definieren wir die **konjugiert komplexe** Zahl $\overline{z} := \overline{a + ib} := a - ib$.

(e) Mit Hilfe von $\overline{z}$ lässt sich der Betrag einer komplexen Zahl definieren durch $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

(f) Die Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ ergibt sich zu $z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i\,(a_1b_2 + b_1a_2)$.

(g) Das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ergibt sich zu $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

(h) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ existiert genau ein Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$, so dass $z = |z| \cdot e^{i\phi}$ gilt.

In diesem Zusammenhang bezeichnet man $|z|$ auch als Radius, weil sich alle komplexen Zahlen mit gleichem Betrag c auf dem Kreis mit Radius c um den Nullpunkt befinden.

(i) Weiterhin gilt die **Eulersche Formel** $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

An dieser Formel sehen wir außerdem, dass aufgrund der 2π-Periodizität der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auch die Funktion $f(\phi) = e^{i\phi}$ dementsprechend 2π-periodisch ist.

Insbesondere folgt aus der Eulerschen Formel: Für beliebige Winkel ϕ gilt

a) $\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}$,

b) $|e^{i\phi}| = \sqrt{(\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2} = 1$ bzw. $|e^{i\phi}| = \sqrt{e^{i\phi} \cdot e^{-i\phi}} = \sqrt{e^0} = 1$ und

c) $e^{2\pi i} = 1$.

(j) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die **Moivresche Formel** $(\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$.

(k) Für ein Polynom $p_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \; = \; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$ in x mit $a_n \neq 0$ bezeichnet n den **Grad des Polynoms**.

(l) Der **Hauptsatz der Algebra** lautet:

Jedes Polynom $p_n(x)$ vom Grad n mit Koeffizienten über dem Körper $\mathbb{C}$ besitzt **genau** n Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $\mathbb{C}$. Die entsprechende Primfaktorzerlegung lautet dann

$$p_n(x) \; = \; a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) \; = \; a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \, .$$

7.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 7.1.
Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_2} \cdot z_1$ von:

(a) $z_1 = 1, \quad z_2 = \imath$ (b) $z_1 = 4 - 3\imath, \quad z_2 = 2 + 6\imath$

(c) $z_1 = 1 - 2\imath, \quad z_2 = 1 + \imath$ (d) $z_1 = i, \quad z_2 = 4 + i$

Geben Sie das Ergebnis in der Form $z = a + \imath b$ an!

Lösung zu Aufgabe 7.1.

(a)
- $z_1 + z_2 = 1 + \imath$
- $z_1 - z_2 = 1 - \imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 1 - \imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\imath} = \frac{-\imath}{1} = \imath$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (-\imath)(1) = -\imath$

(b)
- $z_1 + z_2 = 6 + 3\imath$
- $z_1 - z_2 = 2 - 9\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 26 + 18\imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-3\imath}{2+6\imath} = \frac{(4-3\imath)(2-6\imath)}{(2+6\imath)(2-6\imath)} = -\frac{1}{4}(1 + 3\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (2 - 6\imath)(4 - 3\imath) = -10 - 30\imath$

(c)
- $z_1 + z_2 = 2 - \imath$
- $z_1 - z_2 = -3\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 3 - \imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2\imath}{1+\imath} = \frac{(1-2\imath)(1-\imath)}{(1+\imath)(1-\imath)} = -\frac{1}{2}(1 + 3\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (1 - \imath)(1 - 2\imath) = -1 - 3\imath$

(d)
- $z_1 + z_2 = 4 + 2\imath$
- $z_1 - z_2 = -4$
- $z_1 \cdot z_2 = -1 + 4\imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\imath}{4+\imath} = \frac{(\imath)(4-\imath)}{(4+\imath)(4-\imath)} = \frac{1}{17}(1 + 4\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (4 - \imath)\imath = 1 + 4\imath$

Aufgabe 7.2.
Bestimmen Sie von der komplexen Zahl z den Real- und Imaginärteil:

(a) $z = \frac{1}{1-\imath}$

(b) $z = \frac{3-2\imath}{1-\imath}$

(c) $z = \left(\frac{1-\imath}{1+\imath}\right)^2$

(d) $z = re^{\imath\phi}$ mit $r = 1, \quad \phi = \frac{1}{2}\pi$

(e) $z = re^{\imath\phi}$ mit $r = 2, \quad \phi = \pi$

Lösung zu Aufgabe 7.2.

(a) $z = \frac{1}{1-\imath} = \frac{1+\imath}{2}$

(b) $z = \frac{3-2\imath}{1-\imath} = \frac{(3-2\imath)(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \frac{1}{2}(5+\imath)$

(c) $z = \left(\frac{1-\imath}{1+\imath}\right)^2 = -1$

(d) $e^{-\imath\frac{1}{2}\pi} = (\cos(\frac{1}{2}\pi) + \imath\sin(\frac{1}{2}\pi)) = \imath$

(e) $2e^{-\imath\pi} = 2(\cos(\pi) - \imath\sin(\pi)) = -2$

Aufgabe 7.3.
Berechnen Sie den absoluten Betrag und das Argument der komplexen Zahlen und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Form an:

(a) $z = 1 - \imath$

(b) $z = \sqrt{3} - \imath$

(c) $z = -4 - 4\imath$

(d) $z = -\sqrt{3} + \imath$

(e) $z = 1 + \imath\sqrt{3}$

(f) $z = 1 - \imath\sqrt{3}$

Lösung zu Aufgabe 7.3.

(a) Der Betrag berechnet sich stets nach der festen Formel, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei $z = a + bi$. In diesem Fall erhalten wir also $|1 - \imath| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Das Argument, also der Winkel, einer Komplexen Zahl ist nun schon etwas schwieriger zu bekommen. Dazu muss man sich die Eulersche Formel verdeutlichen

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\sin(\phi)}_{\text{Imaginärteil}}) = 1 - i.$$

Jetzt sieht man, dass der Realteil der linken Seite mit dem Realteil der rechten Seite übereinstimmen muss. Das gleiche gilt für den Imaginärteil. Hier also $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\phi)$

und $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\phi)$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, weil wir ja bereits wissen, dass der Betrag der rechten Seite $\sqrt{2}$ ist). Da der Realteil durch die cos-Funktion und der Imaginärteil durch die sin-Funktion dargestellt werden, suchen wir also genau die Stelle, an der die sin-Funktion genau das Negative der cos-Funktion ist (und die cos-Funktion natürlich positiv). Verdeutlicht man sich die Verläufe der cos- und sin-Funktionen, so erkennt man, dass dies genau an der Stelle $\phi = \frac{7}{4}\pi$ der Fall ist. Demnach also

$$\phi = \arg(1 + \imath) = \frac{7\pi}{4}.$$

Um jetzt zu der exponentiellen und trigonometrischen Darstellung zu kommen, müssen wir nur noch einsetzen

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$$

(b) Der Betrag berechnet sich stets nach der festen Formel, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei $z = a + bi$. In diesem Fall erhalten wir also $|\sqrt{3} - \imath| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2.$ Das Argument, also der Winkel, einer Komplexen Zahl ist nun schon etwas schwieriger zu bekommen. Dazu muss man sich die Eulersche Formel verdeutlichen

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\sin(\phi)}_{\text{Imaginärteil}}) = \sqrt{3} - i.$$

Jetzt sieht man, dass der Realteil der linken Seite mit dem Realteil der rechten Seite übereinstimmen muss. Das gleiche gilt für den Imaginärteil. Hier also $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\phi)$ und $-\frac{1}{2} = \sin(\phi)$ ($\frac{1}{2}$, weil wir ja bereits wissen, dass der Betrag der rechten Seite 2 ist). Da der Realteil durch die cos-Funktion und der Imaginärteil durch die sin-Funktion dargestellt werden, suchen wir also genau die Stelle, an der die cos-Funktion genau das $\sqrt{3}$-Fach Negative der sin-Funktion ist (und die cos-Funktion natürlich positiv). Verdeutlicht man sich die Verläufe der cos- und sin-Funktionen, so erkennt man, dass dies genau an der Stelle $\phi = \frac{11}{6}\pi$ der Fall ist. Demnach also

$$\phi = \arg(\sqrt{3} - \imath) = \frac{11\pi}{6}.$$

Um jetzt zu der exponentiellen und trigonometrischen Darstellung zu kommen, müssen wir nur noch einsetzen

$$z = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6}))$$

(c) Der Betrag berechnet sich stets nach der festen Formel, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei $z = a + bi$. In diesem Fall erhalten wir also $|1 - \imath| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}.$ Das Argument, also der Winkel, einer Komplexen Zahl ist nun schon etwas schwieriger zu bekommen. Dazu muss man sich die Eulersche Formel verdeutlichen

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\sin(\phi)}_{\text{Imaginärteil}}) = -4 - 4i.$$

Jetzt sieht man, dass der Realteil der linken Seite mit dem Realteil der rechten Seite übereinstimmen muss. Das gleiche gilt für den Imaginärteil. Hier also $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\phi)$

und $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\phi)$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, weil wir ja bereits wissen, dass der Betrag der rechten Seite $\sqrt{32}$ ist). Da der Realteil durch die $\cos$-Funktion und der Imaginärteil durch die $\sin$-Funktion dargestellt werden, suchen wir also genau die Stelle, an der die $\sin$-Funktion die $\cos$-Funktion schneidet (und die $\cos$-Funktion ist natürlich negativ). Verdeutlicht man sich die Verläufe der $\cos$- und $\sin$-Funktionen, so erkennt man, dass dies genau an der Stelle $\phi = \frac{7}{4}\pi$ der Fall ist. Demnach also

$$\phi = \arg(-4 - 4\imath) = \frac{5\pi}{4}.$$

Um jetzt zu der exponentiellen und trigonometrischen Darstellung zu kommen, müssen wir nur noch einsetzen

$$z = \sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{32}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$$

(d) $|-\sqrt{3}+\imath| = 2, \quad \phi = \arg(-\sqrt{3}+\imath) = \frac{5\pi}{6} \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$

(e) $|1+\sqrt{3}\imath| = 2, \quad \phi = \arg(1+\sqrt{3}\imath) = \frac{\pi}{3} \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$

(f) $|1-\sqrt{3}\imath| = 2, \quad \phi = \arg(1-\sqrt{3}\imath) = \frac{5\pi}{3} \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}))$

Aufgabe 7.4.

Zeichnen Sie die folgenden Mengen

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(\bar{z}) = 3\}$,

(b) $M_2 := \{z \mid |z| = 1\}$,

(c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z - \bar{z}) = 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 7.4.

(a) M_1 ist die Gerade durch $-3i$ parallel zur reellen Achse.

(b) M_2 ist der Rand des Einheitskreises.

(c) M_3 ist die leere Menge, denn $z - \bar{z}$ ist rein imaginär und hat damit immer Realteil Null.

Aufgabe 7.5.

(a) Geometrisch: Warum kann man jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig als $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ schreiben, wobei $r \in \mathbb{R}^+$ und $\phi \in [0, 2\pi)$?

(b) Wie berechnet man zu $z \in \mathbb{C}$ den Radius r und den Winkel ϕ ?

(c) Was ist die komplexe Multiplikation geometrisch ?

(d) Was ist Wurzelziehen bzw. das Lösen der Gleichung $z^n = w$ geometrisch ?

(e) Löse die Gleichungen $\quad (i) \quad z^2 = i$ und $\quad (ii) \quad z^3 = 1 + i\,.$

Lösung zu Aufgabe 7.5.

(a) Jeder Punkt im $\mathbb{R}^2$ ist eindeutig durch den Radius des Kreises um den Ursprung/Nullpunkt, auf dem er liegt, und den Winkel, den die Gerade durch ihn und Null mit der reellen Achse bildet, bestimmt.

(b) Wegen $\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$ für beliebiges ϕ ist $r = |z|$.

Weiterhin gilt wegen $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi) \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{y}{x}$ bei $z = x + iy$ für den Winkel $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (eventuell bis auf ein additives Vielfaches von 2π, d.h. solange ϕ im richtigen Sektor ist).

Ist $\tan(\phi)$ nicht definiert, dann können wir auch auf den Kotangens ausweichen: $\cot(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} = \frac{x}{y}$ bzw. ist dann $\phi = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right)$

(c) Hat z den Radius r und den Winkel ϕ sowie z' den Radius r' und den Winkel ϕ', dann gelten:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r\ (\cos(\phi) + i\sin(\phi))\, r'\ (\cos(\phi') + i\sin(\phi')) \\ &= rr'\Big((\cos(\phi)\cos(\phi') - \sin(\phi)\sin(\phi')) + i \cdot (\cos(\phi)\sin(\phi') + \cos(\phi')\sin(\phi)) \Big) \\ &= rr'\big(\cos(\phi + \phi') + i \cdot \sin(\phi + \phi')\big) \end{aligned}$$

Dann hat zz' den Radius rr' und den Winkel $\phi + \phi'$.

(Wir haben die folgenden Additionstheoreme verwendet:

$\cos(\phi{+}\phi') = \cos(\phi)\cos(\phi'){-}\sin(\phi)\sin(\phi'), \quad \sin(\phi{+}\phi') = \cos(\phi)\sin(\phi'){+}\cos(\phi')\sin(\phi).\Big)$

(d) Man sucht die Zahlen, deren Winkel-n-faches (modulo 2π) genau dem Winkel von w und deren Radius genau der positiven n-ten Wurzel aus dem Radius von w entspricht.

(e) (i) Die komplexe Zahl i hat den Betrag 1 und den Winkel $\pi/2$, also sucht man Zahlen vom Betrag 1 mit Winkel $2\phi = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$. Deswegen kommen nur $\phi = \frac{\pi}{4}$ und $2\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, d.h. $\phi = 5\pi/4$ in Frage, die Lösungen sind also $z = \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $z = \cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

(e) (ii) Die komplexe Zahl $1 + i$ hat den Betrag $\sqrt{2}$ und den Winkel $\pi/4$, also sucht man Zahlen vom Betrag $\sqrt[6]{2}$ und Winkel $3\phi = \pi/4$. Deswegen kommen nur die Winkel $\phi_1 = \pi/12$,

$3\phi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, d.h. $\phi_2 = \frac{9\pi}{12}$, und

$3\phi_3 = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$, d.h. $\phi = \frac{17\pi}{12}$ in Frage, die Lösungen sind also

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2}\,(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12))\,, \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\,(\cos(9\pi/12) + i\sin(9\pi/12))\,, \\ z_3 &= \sqrt[6]{2}\,(\cos(17\pi/12) + i\sin(17\pi/12))\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.6.

(a) Überführen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $re^{i\phi}$.
  (α) $z = i$
  (α) $z = -i$
  (α) $z = 1$
  (α) $z = 1 + i$

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^4 = 16$ über $\mathbb{C}$.

(c) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -1$ über $\mathbb{C}$.

Lösung zu Aufgabe 7.6.

(a) (α) $z = i$: Es gilt $|i| = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{-i^2} = \sqrt{1} = 1$.

Somit ist $i = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.

Nach der Eulerschen Formel gilt dann $i = 0 + i \cdot 1 = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

Damit muss $\cos(\phi) = 0$ und $\sin(\phi) = 1$ sein. Das gilt genau für $\phi = \frac{\pi}{2}$. Demnach ist $i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$.

(β) $z = -i$: Wegen $|z| = |-z|$, wissen wir dass $|-i| = |i| = 1$ ist.

Somit ist $-i = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.

Nach der Eulerschen Formel gilt dann $-i = 0 + i \cdot (-1) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

Damit muss $\cos(\phi) = 0$ und $\sin(\phi) = -1$ sein. Das gilt genau für $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Demnach ist $i = e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$.

(γ) $z = 1$: Wegen $\overline{1} = 1$, ist offenbar $|1| = 1$.

Somit ist $1 = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.

Nach der Eulerschen Formel gilt dann $1 = 1 + i \cdot 0 = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

Damit muss $\cos(\phi) = 1$ und $\sin(\phi) = 0$ sein. Das gilt genau für $\phi = 0$. Demnach ist $1 = e^{i \cdot 0}$.

(δ) $z = 1 + i$: Es gilt $|1 + i| = \sqrt{(1 + i)(1 - i)} = \sqrt{1 - i^2} = \sqrt{2}$.

Somit ist $1 + i = \sqrt{2}e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.

Nach der Eulerschen Formel gilt dann $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right)$.

Damit muss $\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein. Das ist aber äquivalent zu $\tan(\phi) = 1$. Das gilt genau für $\phi = \frac{\pi}{4}$. Demnach ist $1 + i = \sqrt{2}e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$.

(b) Wir können zunächst die Gleichung schreiben als $y^2 = 16$ mit $y = x^2$. Dann erhalten wir für y die Lösungen $\{-4, 4\}$. Damit haben wir nun die beiden quadratischen Gleichungen $x^2 = 4$ und $x^2 = -4$ zu lösen. Die erste liefert die Lösungsmenge $L_1 = \{-2, 2\}$, die zweite liefert $L_2 = \{-\sqrt{-4}, \sqrt{-4}\}$. Es gilt aber nach den Wurzelgesetzen $\sqrt{-z} = \sqrt{-1}\sqrt{z} = i\sqrt{z}$. Demnach ist $L_2 = \{-2i, 2i\}$ und die gesamte Lösungsmenge ergibt sich zu

$$L_1 \cup L_2 = \{-2, -2i, 2, 2i\}.$$

(c) Da die Gleichung äquivalent zu $z^3 + 1 = 0$ ist, suchen wir also die Nullstellen des Polynoms $p_3(z) = z^3 + 1$, welches den Grad drei besitzt und demnach genau 3 Nullstellen über $\mathbb{C}$ besitzen muss. Die erste Nullstelle $z_1 = -1 = e^{i\pi}$ kann sofort abgelesen werden, denn $(-1)^3 + 1 = 0$. Jetzt können wir den Faktor $(z - z_1) = (z + 1)$ mittels Polynomdivision aus dem Polynom $p_3(z)$ herausfaktorisieren:

$$(z^3 + 1) : (z + 1) = z^2 - z + 1$$

Das Polynom $z^2 - z + 1$ besitzt nach der üblichen Formel die Lösungen $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wir sehen gerade das $\overline{z_2} = z_2$.

Merke: Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle des Polynoms $p_n(z)$, dann ist auch gleichzeitig $\overline{z}$ eine Nullstelle von $p_n(z)$.

Für unsere Nullstellen z_2 und z_3 gilt $|z_2|^2 = |z_3|^2 = z_2 \cdot z_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Mit Hilfe der EULERschen Formel gilt dann wiederum

$$\begin{aligned} z_2 = e^{i\phi_2} &= \cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2) &\Leftrightarrow\quad \tan(\phi_2) &= \sqrt{3}, \\ z_3 = e^{i\phi_3} &= \cos(\phi_3) + i\sin(\phi_3) &\Leftrightarrow\quad \tan(\phi_3) &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Da $\tan(x)$ eine ungerade Funktion ist, muss dann gelten $\phi_2 = -\phi_3 = \frac{\pi}{3}$. Verwenden wir noch die 2π-Periodizität der Funktion $f(\phi) = e^{i\phi}$, lautet unsere Lösungsmenge $L = \{z_1, z_2, z_3\} = \{e^{i\pi}, e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}, e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}\}$.

Aufgabe 7.7.

Leiten Sie die MOIVREsche Formel aus der EULERschen Formel her.

Lösung zu Aufgabe 7.7.

$$\begin{aligned} (\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n &\overset{\text{EULERsche Formel}}{=} (e^{i\phi})^n \\ &\overset{\text{Potenzgesetze}}{=} e^{in\phi} \\ &\overset{\text{EULERsche Formel}}{=} \cos(n\phi) + i\sin(n\phi). \end{aligned}$$

Aufgabe 7.8.

Leiten Sie aus der EULERschen Formel Darstellungen für den Sinus und den Kosinus her.

Lösung zu Aufgabe 7.8.
Es gelten mit Hilfe der EULERschen Formel die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= \cos(\phi) + i\sin(\phi) \\ e^{-i\phi} = e^{i(-\phi)} &= \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos(\phi) - i\sin(\phi) \end{aligned}$$

weil der Sinus eine ungerade bzw. der Kosinus eine gerade Funktion ist (dabei ist f eine **gerade** Funktion, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle x gilt, und f heißt **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt.)

Addition der beiden Gleichungen ergibt $e^{i\phi}+e^{-i\phi} = 2\cos(\phi) \Leftrightarrow \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} = \cos(\phi)$.

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $e^{i\phi}-e^{-i\phi} = 2i\sin(\phi) \Leftrightarrow \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} = \sin(\phi)$.

Bemerkung:

Verwenden wir die Darstellung $z = r \cdot e^{i\phi}$ als Alternative zu $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ oder $z = a + ib$, erkennen wir aus den letzten beiden Gleichungen sehr schön die folgenden Zusammenhänge für den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

$$\begin{aligned} \Re(z) &= r \cdot \cos(\phi) = \frac{re^{i\phi} + re^{-i\phi}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = a, \\ \Im(z) &= r \cdot \sin(\phi) = \frac{re^{i\phi} - re^{-i\phi}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + ib - (a - ib)}{2i} = b. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.9.
Wie sehen die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene aus? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie diese.

$$\begin{aligned} &M_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le 3\} && M_2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1 - 2i| < 1\} \\ &M_3 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \bar{z} = i\} && M_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \Re(z) + 1\} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.9.

- M_1 ist der Kreis (inklusive Rand) um den Ursprung mit Radius 3, denn $d(z, z') := |z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ist gerade der Euklidische Abstand der Punkte $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ im $\mathbb{R}^2$.

- M_2 ist das Innere des Kreises (ohne Rand) um den Punkt $1+2i$ mit Radius 1.
- M_3 ist wegen $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ die Gerade der Punkte mit Imaginärteil $\frac{1}{2}$.
- Die Punkte von M_4 erfüllen

$$z\bar{z} = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z})+1\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2+4(z+\bar{z})+4\right) \quad ,$$

also $(z-\bar{z})^2+4(z+\bar{z})+4=0$ und somit mit $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, die Beziehung $-4y^2+8x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y^2-1)$. Die Teilmenge M_4 ist somit eine Parabel über der imaginären Achse (mit den Punkten $z_1=-\frac{1}{2}+0\cdot i$ und $z_{2,3}=0\pm i$).

Aufgabe 7.10.

Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -27,\ z\in\mathbb{C}$ und stellen Sie die Lösungen graphisch dar.

Lösung zu Aufgabe 7.10.
Die erste Lösung ist sofort abzulesen als $z_1=-3=3\cdot e^{i\pi}$, denn es gilt $\sqrt[3]{27} = 3$ bzw. $(3\cdot e^{i\pi})^3 = 27\cdot e^{i\cdot 3\pi} = 27\cdot e^{i\pi}\cdot e^{2\pi i} = 27\cdot e^{i\pi} = -27$.
Mittels Polynomdivision erhalten wir dann $z^3+27 = (z+3)(z^2-3z+9)$. Der zweite Faktor lässt sich nun mit Hilfe seiner Nullstellen noch weiter zerlegen. Diese sind gerade $z_2=3\cdot(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$ und $z_3=3\cdot(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}$.
Damit ist die Lösungsmenge $L = \{-3, \frac{3}{2}+i\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}-i\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\} = \{3\cdot e^{i\pi}, 3\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}, 3\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}\}$.

Aufgabe 7.11.

Nutze die **Moivresche Formel** $(\cos(\phi)+i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi)+i\sin(n\phi)$, um die folgenden Funktionen allein mit Hilfe von $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ auszudrücken:

(a) $\cos(3\phi)$ (b) $\sin(2\phi)+\cos(4\phi)$

(c) Zeige $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ und $n\in\mathbb{N}_0$ per Induktion. Benutze dies und die Moivresche Formel, um $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(k\phi) = 1+\cos(\phi)+\cos(2\phi)+\cdots+\cos(n\phi)$ für beliebig große $n\in\mathbb{N}$ allein mit Hilfe von $\cos((n+1)\phi)$, $\sin((n+1)\phi)$, $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ zu berechnen. **Hinweis:** $\cos(\phi) = \Re\left(\cos(\phi)+i\cdot\sin(\phi)\right)$.

Lösung zu Aufgabe 7.11.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\cos(3\phi) &= \Re(\cos(3\phi)+i\sin(3\phi)) \\
&= \Re\left((\cos(\phi)+i\sin(\phi))^3\right) \\
&= \Re\left(\cos(\phi)^3+3i\cos(\phi)^2\sin(\phi)-3\cos(\phi)\sin(\phi)^2-i\sin(\phi)^3\right) \\
&= \cos(\phi)^3-3\cos(\phi)\sin(\phi)^2
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(2\phi)+\cos(4\phi) &= \Im(\cos(2\phi)+i\sin(2\phi))+\Re(\cos(4\phi)+i\sin(4\phi))\\
&= \Im\left((\cos(\phi)+i\sin(\phi))^2\right)+\Re\left((\cos(\phi)+i\sin(\phi))^4\right)\\
&= 2\cos(\phi)\sin(\phi)+\cos(\phi)^4-6\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2+\sin(\phi)^4.
\end{aligned}$$

(c) Zunächst der Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: Für $n=0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} z^k = 1 = \frac{1-z}{1-z}$.
Induktionsschritt:

(i) **Induktionsvoraussetzung:** $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

(ii) **Induktionsbehauptung:** $\sum\limits_{k=0}^{n+1} z^k = \frac{1-z^{n+2}}{1-z}$.

(iii) Beweis: Gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dann gilt auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} z^k = \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)+z^{n+1} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}+z^{n+1} = \frac{1-z^{n+1}+z^{n+1}-z^{n+2}}{1-z} = \frac{1-z^{n+2}}{1-z} ,$$

und somit ist der Induktionsschritt von n auf $n+1$ vollzogen.

Nun zur Bestimmung einer einfachen Formel für $1+\cos(\phi)+\cos(2\phi)+\cdots+\cos(n\phi)$:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \Re\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+i\sin(kx)\right)\\
&\overset{\text{Moivresche Formel}}{=} \Re\left(\sum_{k=0}^{n}(\cos(x)+i\sin(x))^k\right)\\
&\overset{\sum_{k=0}^{n} z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}}{=} \Re\left(\frac{1-(\cos(x)+i\sin(x))^{n+1}}{1-\cos(x)-i\sin(x)}\right)\\
&\overset{\text{Moivresche Formel}}{=} \Re\left(\frac{1-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{1-\cos(x)-i\sin(x)}\right)\\
&= \frac{(1-\cos((n+1)x))(1-\cos(x))+\sin((n+1)x)\sin(x)}{(1-\cos(x))^2+\sin(x)^2}
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir verwendet, dass für eine komplexe Zahl $z=a+ib$ die Beziehung $z\cdot\overline{z} = (a+ib)(a-ib)=a^2-(i)^2b^2 = a^2+b^2 = |z|^2\in\mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 7.12.
Geben Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$|x-2|<|x-3|$$

an, wenn $a)$ $x \in \mathbb{R}$ und $b)$ $x \in \mathbb{C}$ ist und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen!

Lösung zu Aufgabe 7.12.

a) $x \in \mathbb{R}$:

<u>Fall</u> $x \geq 3$:
Die Ungleichung lautet dann $x - 2 < x - 3 \;\Leftrightarrow\; -2 < -3 \quad \Rightarrow$ falsche Aussage

<u>Fall</u> $2 \leq x < 3$:
Die Ungleichung lautet dann $x - 2 < 3 - x \;\Leftrightarrow\; x < \frac{5}{2}$.
Wir erhalten das Intervall $[2, \frac{5}{2}[$.

<u>Fall</u> $x < 2$:
Die Ungleichung lautet dann $2 - x < 3 - x \;\Leftrightarrow\; 2 < 3 \quad \Rightarrow$ wahre Aussage
Wir erhalten somit das Intervall $]-\infty, 2[$.

Die Lösungsmenge ist demnach $L = \;]-\infty, \frac{5}{2}[$.

Alternativer Lösungsweg: Quadrieren beider Seiten ergibt

$$\begin{aligned} |x-2|^2 < |x-3|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 < (x-3)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 4 < x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow\; x < \tfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \;]-\infty, \tfrac{5}{2}[. \end{aligned}$$

b) $x \in \mathbb{C}$: Eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ lässt sich darstellen als $x = a + ib$. Ihr Betrag ist definiert als $|x| := \sqrt{x \cdot \overline{x}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Demnach ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} |x-2|^2 < |x-3|^2 \;&\Leftrightarrow\; (a-2+ib)(a-2-ib) < (a-3+ib)(a-3-ib) \\ &\Leftrightarrow\; (a-2)^2 + b^2 < (a-3)^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow\; (a-2)^2 < (a-3)^2 \\ &\Leftrightarrow\; a^2 - 4a + 4 < a^2 - 6a + 9 \\ &\Leftrightarrow\; a < \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{x \in \mathbb{C} \mid \Re(x) < \frac{5}{2}\} = \{x \in \mathbb{C} \mid \Re(x) \in \;]-\infty, \frac{5}{2}[\,\}$.

Aufgabe 7.13.
Lösen Sie die folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$.

(a) $z^5 = 1$

(b) $z^4 = 16\imath$

(c) $z^6 = -4 - 4\imath$

(d) $z^3 = 2 + 2\imath$

Lösung zu Aufgabe 7.13.

(a) Das generelle Vorgehen bei der Lösung von Aufgaben des Typs $z^n = w$ mit $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$ ist immer dasselbe.

Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^5 = 1$ auf

$$r^5 e^{5i\phi} = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = |z| e^{i \cdot \psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^5 = 1$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = 1$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $5\phi = 0$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = 0$. Ist ja auch nicht weiter verwunderlich, da $1 \cdot e^{\phi_0} = e^0 = 1$ eine Lösung ist, die man auch vorher hätte ablesen können.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 5 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π-Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel 0 der selbe ist, wie 2π, 4π, 6π, 8π. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$\begin{aligned} 5\phi &= 2\pi \\ 5\phi &= 4\pi \\ 5\phi &= 6\pi \\ 5\phi &= 8\pi \end{aligned}$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{2}{5}\pi, \phi_3 = \frac{4}{5}\pi, \phi_4 = \frac{6}{5}\pi, \phi_5 = \frac{8}{5}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{2}{5}\pi}, z_3 = e^{i\frac{4}{5}\pi}, z_4 = e^{i\frac{6}{5}\pi}, z_5 = e^{i\frac{8}{5}\pi}.$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach 8π weiter gemacht, mit 10π usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

(b) Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^4 = 16i$ auf

$$r^4 e^{4i\phi} = 16 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = |z| e^{i \cdot \psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^4 = 16$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = 2$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $4\phi = \frac{\pi}{2}$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = \frac{\pi}{8}$.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 4 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π-Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel $\frac{\pi}{2}$ der selbe ist, wie $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{2}$. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\phi &= \frac{5\pi}{2} \\ 4\phi &= \frac{9\pi}{2} \\ 4\phi &= \frac{13\pi}{2} \end{aligned}$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{5}{8}\pi, \phi_3 = \frac{9}{8}\pi, \phi_4 = \frac{13}{8}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{8}\pi}, z_2 = 2e^{i\frac{5}{8}\pi}, z_3 = 2e^{i\frac{9}{8}\pi}, z_4 = 2e^{i\frac{13}{8}\pi}.$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach $\frac{13}{2}\pi$ weiter gemacht, mit $\frac{17}{2}\pi$ usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

(c) Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^6 = 1$ auf

$$r^4 e^{4i\phi} = \sqrt{32} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}} = |z|e^{i\cdot\psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^6 = \sqrt{32}$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = \sqrt[12]{32}$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $6\phi = \frac{5\pi}{4}$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = \frac{5\pi}{24}$.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 6 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π-Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel $\frac{5\pi}{4}$ der selbe ist, wie $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{21\pi}{4}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{37\pi}{4}$, $\frac{45\pi}{4}$. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$\begin{aligned} 6\phi &= \frac{13\pi}{4} \\ 6\phi &= \frac{21\pi}{4} \\ 6\phi &= \frac{29\pi}{4} \\ 6\phi &= \frac{37\pi}{4} \\ 6\phi &= \frac{45\pi}{4} \end{aligned}$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{13}{24}\pi, \phi_3 = \frac{21}{24}\pi, \phi_4 = \frac{29}{24}\pi, \phi_5 = \frac{37}{24}\pi, \phi_6 = \frac{45}{24}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{5}{24}\pi}, z_2 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{13}{24}\pi}, z_3 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{21}{24}\pi}, z_4 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{29}{24}\pi}, z_5 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{37}{24}\pi}, z_6 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{45}{24}\pi}$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach $\frac{45}{4}\pi$ weiter gemacht, mit $\frac{53}{4}\pi$ usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

(d) Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^3 = 2 + 2i$ auf

$$r^3 e^{3i\phi} = \sqrt{8} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = |z| e^{i \cdot \psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^3 = \sqrt{8}$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = \sqrt[6]{8}$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $3\phi = \frac{\pi}{4}$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = \frac{\pi}{12}$.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 3 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π-Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel $\frac{\pi}{4}$ der selbe ist, wie $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$\begin{aligned} 3\phi &= \frac{9\pi}{4} \\ 3\phi &= \frac{17\pi}{4} \end{aligned}$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{3}{4}\pi, \phi_3 = \frac{17}{12}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = \sqrt[6]{8} e^{i \frac{1}{12}\pi}, z_2 = \sqrt[6]{8} e^{i \frac{9}{12}\pi}, z_3 = \sqrt[6]{8} e^{i \frac{17}{12}\pi}$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach $\frac{17}{4}\pi$ weiter gemacht, mit $\frac{25}{4}\pi$ usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

7.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 7.1.
Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_2} \cdot z_1$ von (geben Sie das Ergebnis in der Form $z = a + \imath b$ an!):

(a) $z_1 = 1 + \imath\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 - \imath$

(b) $z_1 = 2 + 3\imath, \quad z_2 = 3 - 5\imath$

(c) $z_1 = 4 - 5\imath, \quad z_2 = 4 + 5\imath$

(d) $z_1 = i, \quad z_2 = -2 - 4i$

Lösung zu Aufgabe 7.1.

(a)
- $z_1 + z_2 = 2 + \imath(\sqrt{3} - 1)$
- $z_1 - z_2 = \imath(\sqrt{3} + 1)$
- $z_1 \cdot z_2 = 1 - \imath + \imath\sqrt{3} + \sqrt{3}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath} = \frac{(1+\imath\sqrt{3})(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \imath\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (1+\imath)(1+\imath\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + \imath(1+\sqrt{3})$

(b)
- $z_1 + z_2 = 5 - 2\imath$
- $z_1 - z_2 = -1 + 2\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 6 - 10\imath + 9\imath + 15$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3\imath}{3-5\imath} = \frac{(2+3\imath)(3+5\imath)}{(3-5\imath)(3+5\imath)} = \frac{1}{25}(-9 + 19\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (2+3\imath)(3+5\imath) = -9 + 19\imath$

(c)
- $z_1 + z_2 = 8$
- $z_1 - z_2 = -10\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 41$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-5\imath}{4+5\imath} = \frac{(4-5\imath)(4-5\imath)}{(4+5\imath)(4-5\imath)} = \frac{1}{41}(-9 - 40\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (4-5\imath)(4-5\imath) = -9 - 40\imath$

(d)
- $z_1 + z_2 = -2 - 3\imath$
- $z_1 - z_2 = 2 + 5\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 4 - 2\imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\imath}{-2-4\imath} = \frac{(\imath)(-2+4\imath)}{(-2-4\imath)(-2+4\imath)} = -\frac{1}{20}(4 + 2\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (\imath)(-2+4\imath) = -4 - 2\imath$

Aufgabe 7.2.
Bestimmen Sie von der komplexen Zahl z den Real- und Imaginärteil:

(a) $z = \frac{1}{\imath+1}$

(b) $z = \frac{3+2\imath}{1+\imath}$

(c) $z = \left(\frac{1+\imath}{1-\imath}\right)^2$

(d) $z = re^{\imath\phi}$ mit $r = 4, \quad \phi = \frac{5}{6}\pi$

(e) $z = re^{\imath\phi}$ mit $r = 2\sqrt{3}, \quad \phi = -\frac{2}{3}\pi$

Lösung zu Aufgabe 7.2.

(a) $z = \frac{1}{\imath+1} = \frac{1-\imath}{2}$

(b) $z = \frac{3+2\imath}{1+\imath} = \frac{(3+2\imath)(1-\imath)}{(1+\imath)(1-\imath)} = \frac{1}{2}(5-\imath)$

(c) $z = \left(\frac{1+\imath}{1-\imath}\right)^2 = -1$

(d) $4e^{\imath\frac{5}{6}\pi} = 4(\cos(\frac{5}{6}\pi) + \imath\sin(\frac{5}{6}\pi))$

(e) $2\sqrt{3}e^{-\imath\frac{2}{3}\pi} = 2\sqrt{3}(\cos(\frac{2}{3}\pi) - \imath\sin(\frac{2}{3}\pi))$

Die Realteile und Imaginärteile können Sie entsprechend ablesen.

Aufgabe 7.3.
Berechnen Sie den absoluten Betrag und das Argument der komplexen Zahlen und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Form an:

(a) $z = 1 + \imath$

(b) $z = \sqrt{3} + \imath$

(c) $z = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $z = \frac{1+2\imath}{2-\imath}$

(e) $z = \imath + \frac{1+\imath}{3+\imath}$

Lösung zu Aufgabe 7.3.

(a) $|1+\imath| = \sqrt{2}, \quad \phi = \arg(1+\imath) = \frac{\pi}{4} \quad z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

(b) $|\sqrt{3}+\imath| = 2, \quad \phi = \arg(\sqrt{3}+\imath) = \frac{\pi}{6} \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$

(c) $|-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}| = 1, \quad \phi\arg(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3} \quad z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = (\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$

(d) $z = \frac{1+2\imath}{2-\imath} = \frac{1+2\imath}{2-\imath}\frac{2+i}{2+i} = \frac{1}{5}(2+i+4i+i+2i^2) = i$, also $|z| = 1$ und $\phi = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$
$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$.

(e) $z = i + \frac{1+i}{3+i} = \frac{3i-1+1+i}{3+i} = \frac{4i(3-i)}{10} = \frac{12i+4}{10} = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$
$|\imath + \frac{1+\imath}{3+\imath}| = \frac{\sqrt{40}}{5}, \quad \phi = \arg(\imath + \frac{1+\imath}{3+\imath}) = \arctan(3)$
$z = \frac{\sqrt{40}}{5} e^{i \arctan(3)} = \frac{\sqrt{40}}{5}(\cos(\arctan(3)) + i \sin(\arctan(3)))$

Aufgabe 7.4.
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $x \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest und alle $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos(x) + \imath \sin(x))^n = \cos(nx) + \imath \sin(nx)$$

gilt. (Formel von Moivre)

Lösung zu Aufgabe 7.4.
IA: $n = 1$

$$(\cos(x) + \imath \sin(x))^1 = \cos(x) + \imath \sin(x) \qquad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $(\cos(x) + \imath \sin(x))^n = \cos(nx) + \imath \sin(nx)$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $(\cos(x) + \imath \sin(x))^{n+1} = \cos((n+1)x) + \imath \sin((n+1)x)$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
(\cos(x) + \imath \sin(x))^{n+1} &= (\cos(x) + \imath \sin(x))^n (\cos(x) + \imath \sin(x)) \\
&\overset{I.V.}{=} (\cos(nx) + \imath \sin(nx))(\cos(x) + \imath \sin(x)) \\
&= \cos(x)\cos(nx) + \imath \sin(nx)\cos(x) + \imath \cos(nx)\sin(x) - \sin(nx)\cos(x) \\
&= \cos((n+1)x) + \imath \sin((n+1)x)
\end{aligned}$$

7.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 7.1.
Für welche Punkte $z = x + \imath y$ der Gaußschen Zahlenebene gilt:

(a) $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$

(b) $0 < \sqrt{2}\Im(z) < |z|$

(c) $|z+1| \leq |z-1|$

Lösung zu Aufgabe 7.1.

(a) Für die rechte Halbebene ohne die imaginäre Achse, also

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$$

(b) Wegen $0 < \sqrt{2}\Im(z)$ schon mal nur für alle komplexen Zahlen mit positiven Imaginärteil. Und wegen

$$\begin{aligned} \sqrt{2}b &< \sqrt{a^2+b^2} \\ 2b^2 &< a^2+b^2 \\ b &< a \end{aligned}$$

auch nur für alle komplexen Zahlen, deren Realteil größer ist als ihr Imaginärteil. Also insgesamt

$$\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0 \wedge \Re(z) > \Im(z)\}$$

(c) Für die linke Halbebene inklusive der imaginären Achse, weil

$$\begin{aligned} |z+1| &\leq |z-1| \\ |z+1|^2 &\leq |z-1|^2 \\ (a+1)^2+b^2 &\leq (a-1)^2+b^2 \\ a^2+2a+1 &\leq a^2-2a+1 \\ a &\leq 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 0\}.$$

Aufgabe 7.2.
Lösen Sie die Gleichungen:

(a) $z^6 = 1$

(b) $z^4 = -1$

(c) $z^3 = 8\imath$

(d) $z^4 = \frac{1}{2}(\imath\sqrt{3} - 1)$

(e) $|z| = z \cdot \overline{z}$

(f) $z^5 = 2 + 2i$

Lösung zu Aufgabe 7.2.

(a) wegen $z^6 = r^6 e^{i6\phi} = 1$ erhalten wir $r = 1$. Weiterhin muss $e^{i6\phi} = 1$ gelten. Wir wissen, dass der Einheitskreis für $\phi = 0$, also $e^0 = 1$ und somit die Gleichung für $\phi = \frac{0}{6} = 0$ erfüllt ist. Jetzt wissen wir, dass die Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{0\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = e^{\imath\frac{\pi}{3}}, \quad z_4 = e^{\imath\frac{2\pi}{3}}, \quad z_5 = e^{\imath\frac{4\pi}{3}}, \quad z_6 = e^{\imath\frac{5\pi}{3}}$$

(b) Wegen $z^4 = r^4 e^{i4\phi} = -1$ erhalten wir $r = 1$. Weiterhin muss $e^{i4\phi} = -1$ gelten. Wir wissen, dass der Einheitskreis für $\phi = \pi$, also $e^{i\pi} = (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$ und somit die Gleichung für $\phi = \frac{\pi}{4}$ erfüllt ist. Jetzt wissen wir, dass die Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$$z_1 = e^{\imath\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{\imath\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{\imath\frac{5\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{\imath\frac{7\pi}{4}}$$

(c) wegen $z^3 = r^3 e^{i3\phi} = 8i$ erhalten wir $r = 8^{\frac{1}{3}} = 2$. Weiterhin muss $e^{i3\phi} = i$ gelten. Wir wissen, dass der Einheitskreis für $\phi = \frac{\pi}{2}$, also $e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = i$ und somit die Gleichung für $\phi = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$ erfüllt ist. Jetzt wissen wir, dass die Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$$z_1 = 2e^{\imath\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{\imath\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = 2e^{\imath\frac{9\pi}{6}},$$

(d) wegen $z^4 = r^4 e^{i4\phi} = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)$ und $|\frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)| = 1$ erhalten wir $r = 1$. Weiterhin muss $e^{i4\phi} = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)$ gelten. Wir wissen, dass der Einheitskreis für $\phi = \frac{4\pi}{6}$, also $e^{i\frac{4\pi}{6}} = (\cos(\frac{4\pi}{6}) + i\sin(\frac{4\pi}{6}) = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)$ und somit die Gleichung für $\phi = \frac{\frac{4\pi}{6}}{4}$ erfüllt ist. Jetzt wissen wir, dass die Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$$z_1 = e^{\imath\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{\imath\frac{4\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{\imath\frac{7\pi}{6}}, \quad z_4 = e^{\imath\frac{10\pi}{6}}$$

(e) wegen

$$\begin{aligned} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} &= a^2 + b^2 \\ (a^2 + b^2)(1 - (a^2 + b^2)) &= 0 \\ 1 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

erhalten wir $z \in \left\{\left\{e^{i\phi} | \phi \in [0, 2\pi)\right\} \cup 0\right\}$.

(f) wegen $z^5 = r^5 e^{i5\phi} = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$ erhalten wir $r = \sqrt[10]{8}$. Weiterhin muss $e^{i5\phi} = \frac{\pi}{4}$ gelten und somit ist die Gleichung für $\phi = \frac{\pi}{20}$ erfüllt. Jetzt wissen wir, dass die

Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}, \frac{25\pi}{20}, \frac{33\pi}{20}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$$z_1 = \sqrt[10]{8}e^{\imath\frac{\pi}{20}}, \quad z_2 = \sqrt[10]{8}e^{\imath\frac{9\pi}{20}}, \quad z_3 = \sqrt[10]{8}e^{\imath\frac{17\pi}{20}}, \quad z_4 = \sqrt[10]{8}e^{\imath\frac{25\pi}{20}}, \quad z_5 = \sqrt[10]{8}e^{\imath\frac{33\pi}{20}}$$

Aufgabe 7.3.
Stellen Sie die folgenden Mengen graphisch dar

(a) $\mathbb{M}_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 + i| \leq 3\}$.

(b) $\mathbb{M}_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} + 5i| \geq 1\}$.

(c) $\mathbb{M}_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 7.3.

(a) $\mathbb{M}_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 + i| \leq 3\}$. Das ist der Kreis in der komplexen Zahlenebene mit Radius 3 inklusive Kreisrand um den Mittelpunkt $3 - i$.

Denn wir erhalten mit $z = a + ib$ nach Quadrieren die „innere“ Kreisgleichung

$$(a + ib - 3 + i)(a - ib - 3 - i) \;\leq\; 9 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 3)^2 + (b + 1)^2 \;\leq\; 9$$

(b) $\mathbb{M}_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} + 5i| \geq 1\}$. Das ist der Außenkreis in der komplexen Zahlenebene mit Radius 1 inklusive Kreisrand um den Mittelpunkt $5i$, das heißt, die gesamte komplexe Ebene außer dem erwähnten Kreis.

Denn es gilt mit $z = a + ib$ nach Quadrieren die „äußere“ Kreisgleichung

$$(a - ib + 5i)(a + ib - 5i) \;\geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + (b - 5)^2 \;\geq\; 1.$$

(c) $\mathbb{M}_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\} \;=\; \{1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\}$

oder $\mathbb{M}_3 = \{\cos\frac{k\pi}{8} + i\sin\frac{k\pi}{8},\ k = 0, \ldots, 7\}$.

Dies sind genau sämtliche achten Einheitswurzeln, die sich auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene befinden.

8 Zahlenfolgen

8.1 Wiederholung - Theorie: Zahlenfolgen

(a) Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Zahlenfolge **konvergent**, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, welches die folgende Eigenschaft erfüllt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$.

(in Zeichen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$)

Außerdem heißt a dann **Grenzwert** der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(b) Seien $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen aus $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$$

Im Fall $b \neq 0$ gilt: $\exists\ N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$: $b_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

(c) Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **bestimmt divergent**, falls einer der beiden Fälle auftritt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall L \in \mathbb{R}\ \exists N = N(L) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(L) \Longrightarrow a_n > L)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall L \in \mathbb{R}\ \exists N = N(L) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(L) \Longrightarrow a_n < L)$

Achtung: ∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen, das heißt $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$!

(d) Besitzt die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ den Grenzwert 0, so nennen wir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auch **Nullfolge**.

....

8.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 8.1.
Zeigen Sie direkt mittels der **Definition des Grenzwertes**:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(b) Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge reeller Zahlen und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen $b \in \mathbb{R}$ konvergente Folge reeller Zahlen.

Dann konvergiert die Folge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n = 3a_n - 5b_n$ gegen den Grenzwert $3a - 5b$.

Lösung zu Aufgabe 8.1.

(a) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und fest. Als $N(\varepsilon)$ wählen wir irgendeine natürliche Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, für die $N(\varepsilon) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ gilt.

(Warum gibt es ein solches $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$? $\mathbb{R}$ erfüllt das **Archimedische Axiom**!)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$. Aus $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ folgt dann $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ und schließlich

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \,.$$

(b) Es ist zu zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |c_n - (3a - 5b)| < \varepsilon)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, $\eta := \frac{\varepsilon}{6}$ und $\nu := \frac{\varepsilon}{10}$.

Nach Voraussetzung existiert ein M, so dass $\forall n \geq M$ die Bedingung $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$ gilt.

Weiter existiert nach Vor. ein K, so dass $\forall n \geq K$ die Bedingung $|b_n - b| < \nu = \frac{\varepsilon}{10}$ gilt.

Wir setzen nun $N(\varepsilon) := \max(M, K)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$.

Da $n \geq M$, folgt $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$ und ebenso auch $|b_n - b| < \eta = \frac{\varepsilon}{10}$ wegen $n \geq K$.

Insgesamt folgt nun:

$$|(3a_n - 5b_n) - (3a - 5b)| = |3(a_n - a) - 5(b_n - b)| \leq 3|a_n - a| + 5|b_n - b| < 3\frac{\varepsilon}{6} + 5\frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Aufgabe 8.2.

Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, welche wie folgt definiert sind

$$a_n := \frac{n^2}{2n^2 - 3n + 3}, \quad b_n := \frac{n-1}{n^2+1}, \quad c_n := \frac{4n^4 - 1}{8n - 1}.$$

Lösung zu Aufgabe 8.2.

Wir klammern stets die höchsten n-Potenzen des Nenners aus (und kürzen sie).

(a) Es gilt dann $a_n = \frac{n^2}{2n^2-3n+3} = \frac{1}{2-3\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}$

Für den Nenner erhalten wir dann $\lim\limits_{n\to\infty}\left((2-3\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2})\right) = 2-0+0 = 2$.

Somit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(b) Die zweite Folge kann umgeformt werden zu $b_n := \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$.

Für den Nenner gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1+0 = 1$. Im Zähler stehen jedoch nur Nullfolgen, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ folgt.

(c) Für die dritte Folge haben wir $c_n = \frac{4n^4-1}{8n-1} = \frac{4n^3-\frac{1}{n}}{8-\frac{1}{n}}$

Für den Nenner erhalten wir dann $\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{1}{n}\right) = 8+0 = 8$.

Da $4n^3$ bestimmt gegen ∞ divergiert und $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, folgt dann insgesamt,

dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

Aufgabe 8.3.

Sei $a > 0$. Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) a^n

(b) $\frac{a^n}{1+a^n}$

(c) $\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$

(d) na^n

Lösung zu Aufgabe 8.3.

(a) $$\lim_{n\to\infty}(a^n) = \begin{cases} \infty & \text{d.h. bestimmt divergent gegen } \infty \quad a>1, \\ 1 & a=1, \\ 0 & a<1. \end{cases}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{1+a^n}\right) = \begin{cases} 1 & a>1, \\ \frac{1}{2} & a=1, \\ 0 & a<1. \end{cases}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}\right) = \begin{cases} 1 & a>1, \\ 0 & a=1, \\ -1 & a<1. \end{cases}$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}(na^n) \;=\; \begin{cases} \infty \quad \text{d.h. bestimmt divergent gegen } \infty & a \geq 1, \\ 0 & a < 1. \end{cases}$

Aufgabe 8.4.
Weisen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_\varepsilon-$ Definition des Grenzwertes nach, dass Folgendes gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0\,,$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} \;=\; 0\,,$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-14}{n+1} \;=\; 2\,,$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^5 = 32\,,$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{5n^2+1} \;=\; \frac{1}{5}\,.$

Lösung zu Aufgabe 8.4.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0\,.$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|\frac{1}{n} - 0| \;=\; \frac{1}{n} \;<\; \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 2 \rfloor\,.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} \;=\; 0\,.$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|\frac{1}{4n^2} - 0| \;=\; \frac{1}{4n^2} \;<\; \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon := \lfloor \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + 2 \rfloor\,.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-14}{n+1} \;=\; 2\,.$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|\frac{2n-14}{n+1} - 2| \;=\; |\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{16}{n+1} - 2| \;=\; \frac{16}{n+1} \;<\; \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon := \lfloor \frac{16}{\varepsilon} + 1 \rfloor\,.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^5 = 32\,.$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|2^5 - 32| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon := 1\,.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{5n^2+1} \;=\; \frac{1}{5}\,.$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|\frac{n^2-1}{5n^2+1} - \frac{1}{5}| \;=\; |\frac{n^2+\frac{1}{5}}{5n^2+1} - \frac{\frac{6}{5}}{5n^2+1} - \frac{1}{5}| \;=\; \frac{\frac{6}{5}}{5n^2+1} \;<\; \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon := \lfloor \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{\varepsilon}} + 1 \rfloor\,.$

Aufgabe 8.5.
Setzen Sie a_n jeweils gleich den folgenden Ausdrücken, berechnen Sie hiermit den Grenzwert a der Zahlenfolge $\{a_n\}$ und bestimmen Sie danach $N = N(\epsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N(\epsilon)$ gilt.

(a) $\frac{n-1}{n+1}$

(b) $(1 + \frac{1}{n})^{10}$

(c) $(\sin(n) + \cos^3(n))n^{-\frac{1}{2}}$

Lösung zu Aufgabe 8.5.

(a) Sei $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. Der Grenzwert ist offensichtlich gegeben durch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Es folgt

$$|a_n - a| = |\frac{n-1}{n+1} - 1| = |\frac{-2}{n+1}| = \frac{2}{n+1} < \epsilon,$$

bzw.

$$\frac{2}{\epsilon} - 1 < n.$$

Daher kann man als $N(\epsilon) = [\frac{2}{\epsilon} - 1] + 1$ wählen oder natürlich jedes größere $N(\epsilon)$ ebenfalls.

(b) Sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{10}$. Der Grenzwert ist offensichtlich gegeben durch

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{10} = 1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|a_n - a| = |(1+\frac{1}{n})^{10} - 1| &< \epsilon \\
(1+\frac{1}{n})^{10} &< \epsilon + 1 \\
1 + \frac{1}{n} &< \sqrt[10]{\epsilon+1} \\
\frac{1}{n} &< \sqrt[10]{\epsilon+1} - 1 \\
\frac{1}{\sqrt[10]{\epsilon+1} - 1} &< n
\end{aligned}$$

Daher kann man als $N(\epsilon) = [\frac{1}{\sqrt[10]{\epsilon+1}-1}] + 1$ wählen oder natürlich jedes größere $N(\epsilon)$ ebenfalls.

(c) Sei $a_n = (\sin(n) + \cos^3(n))n^{-\frac{1}{2}}$. Der Grenzwert ist gegeben durch

$$\lim_{n\to\infty} |(\sin(n) + \cos^3(n))|n^{-\frac{1}{2}} < \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Es folgt

$$|a_n - a| = |(\sin(n) + \cos^3(n))n^{-\frac{1}{2}} - 0| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \epsilon,$$

bzw.

$$\frac{4}{\epsilon^2} < n.$$

Daher kann man als $N(\epsilon) = [\frac{4}{\epsilon^2}]+1$ wählen oder natürlich jedes größere $N(\epsilon)$ ebenfalls.

Aufgabe 8.6.
Berechnen Sie mittels $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$ die Grenzwerte a_n, falls a_n gleich ist:

(a) $(1+\frac{1}{3n})^n$

(b) $(1-(n-2)^{-1})^{n+5}$

(c) $(1-n^{-1})^{-87}(1-n^{-1})^{-n}(6+n^{-1000})^{-1}$

Lösung zu Aufgabe 8.6.

(a) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^n = e^{\frac{1}{3}}$

(b) $\lim_{n\to\infty}(1-(n-2)^{-1})^{n+5} = e^{-1}$

(c) $\lim_{n\to\infty}(1-n^{-1})^{-87}(1-n^{-1})^{-n}(6+n^{-1000})^{-1} = \frac{1}{6}e^{-1}$

Aufgabe 8.7.
(a) Sei $a_n = (3+(1/n))^4$ $(n \in \mathbb{N})$. Berechnen Sie den Grenzwert a der Zahlenfolge $\{a_n\}$ und bestimmen Sie zu $\epsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt.
(b) Sei a_n eine Folge, die gegen a konvergiert, und sei $b_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ die aus den arithmetischen Mittelwerten gebildete Folge. Beweisen Sie, dass $b_n \to a$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 8.7.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (3+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n))^4 = 81$ und

$$|(3+(1/n))^4 - 81| < \epsilon \Leftarrow (3+(1/n))^4 < 81+\epsilon \Leftarrow$$
$$1/n < (81+\epsilon)^{1/4} - 3 \Leftarrow n > [(81+\epsilon)^{1/4}-3]^{-1}.$$

Also wähle $N = N(\epsilon)$ als die kleinste natürliche Zahl mit $N \geq [(81+\epsilon)^{1/4}-3]^{-1}$.

(b) Zu zeigen ist, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|b_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N$. Sei also $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es ein N_0 mit $|a_n - a| < \epsilon/2$ für alle $n > N_0$, da a_n gegen a konvergiert. Definiere nun N als die kleinste natürliche Zahl mit $N > N_0$ und $N > 2(\sum\limits_{k=1}^{N_0}|a_k - a|)/\epsilon$, dann gilt für jedes $n > N$ die Abschätzung

$$|b_n - a| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| =$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k - a| < \frac{N}{n}\epsilon/2 + \frac{n-N_0-1}{n}\epsilon/2 \leq \epsilon.$$

Aufgabe 8.8.
Geben Sie Folgen $(a_n),(b_n)$ an mit $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ und
(a) $a_n b_n \to +\infty$;
(b) $a_n b_n \to -\infty$;

(c) $a_n b_n \to c \in R$;
(d) $(a_n b_n)$ beschränkt, aber nicht konvergent.

Lösung zu Aufgabe 8.8.

(a) z.B. $a_n = n^2,\ b_n = 1/n$;

(b) z.B. $a_n = n^2,\ b_n = -1/n$;

(c) z.B. $a_n = n,\ b_n = c/n$;

(d) z.B. $a_n = n,\ b_n = (-1)^n/n$.

Aufgabe 8.9.
Untersuchen Sie die Existenz der folgenden Grenzwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a)
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2\right)$$

Lösung zu Aufgabe 8.9.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{1+\frac{1}{n}})^2 - 1^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} + \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})^2 - 1^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

. . . .

8.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 8.1.
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{3n-1}{5n+7}$$

und beweisen Sie die Konvergenz, indem Sie direkt die **Definition des Grenzwertes** benutzen, d.h. finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.
Berechnen Sie jeweils ein $N(\varepsilon)$ für $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}\}$.

Lösung zu Aufgabe 8.1.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3/5$.

Beweis: Es gilt

$$a_n - \frac{3}{5} = \frac{15n-5}{5(5n+7)} - \frac{15n+21}{5(5n+7)} = -\frac{26}{5(5n+7)}$$

und somit

$$\left|a_n - \frac{3}{5}\right| = \frac{26}{5(5n+7)} \leq \frac{26}{25}\cdot\frac{1}{n}\,.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann setzen wir $N(\varepsilon) := \lceil \frac{26}{25\varepsilon} \rceil + 1$, wobei $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$.

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$. Dann folgt offensichtlich $n > \frac{26}{25\varepsilon}$, was zu $\frac{1}{n} < \frac{25\varepsilon}{26}$ äquivalent ist, und somit

$$\left|a_n - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{26}{25}\cdot\frac{1}{n} < \frac{26}{25}\cdot\frac{25\varepsilon}{26} = \varepsilon\,, \qquad \text{also} \qquad \left|a_n - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon\,.$$

$\square$

Bei unserem $N(\varepsilon)$ ist

ε	$\frac{26}{25\varepsilon}$	$\lceil \frac{26}{25\varepsilon} \rceil$	$N(\varepsilon)$	kleinstmögliches $N(\varepsilon)$
10^{-1}	$\frac{52}{5}$	11	12	10, denn $\frac{26}{5(5\cdot 10+7)} = \frac{26}{285} < \frac{1}{10} = \frac{26}{5(5\cdot 9+7)}$
10^{-3}	1040	1040	1041	1039, denn $\frac{26}{5(5\cdot 1039+7)} = \frac{13}{13005} < \frac{1}{10} < \frac{26}{25985} = \frac{26}{5(5\cdot 1038+7)}$
10^{-6}	1040000	1040000	1040001	1039999, denn $\frac{26}{5(5\cdot 1039999+7)} = \frac{13}{13000005} < \frac{1}{10} < \frac{26}{25999985}$

Hätten wir $N_1(\varepsilon) := \max\left(10^{1000}, \lceil \frac{26}{25\varepsilon} \rceil + 1\right)$ anstelle von $N(\varepsilon) := \lceil \frac{26}{25\varepsilon} \rceil + 1$ genommen, so wäre natürlich

$$N_1(10^{-1}) = N_1(10^{-3}) = N_1(10^{-6}) = 10^{1000}\,,$$

womit wir uns das Rechnen erspart hätten.

Aufgabe 8.2.
Zeigen Sie direkt mittels der **Definition des Grenzwertes**:

(a) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht gegen 1.

(b) Die Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht konvergent.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4-n^2+1} = 0$.

Lösung zu Aufgabe 8.2.

(a) Wir verwenden die Beweismethode mit Widerspruch:

<u>Annahme</u>: $\frac{1}{n} \to 1$.

Dann gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon)$.

Insbesondere gäbe es dann ein $N\left(\frac{1}{2}\right)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$: $\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$.

Es sei nun $n := \max\left(N(\frac{1}{2}), 3\right)$. Dann gilt $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$, also $\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$. Andererseits gilt aber auch $n \geq 3$, also $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$. Es folgt somit

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

Widerspruch.

(b) Wir verwenden die Beweismethode mit Widerspruch:

<u>Annahme</u>: $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = a$

Dann gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |(-1)^n - a| < \varepsilon)$

Insbesondere gäbe es ein $N\left(\frac{1}{2}\right)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$: $|(-1)^n - a| < \frac{1}{2}$.

<u>1. Fall</u>: $N\left(\frac{1}{2}\right)$ ist gerade. Dann ist auch $n := N\left(\frac{1}{2}\right)$ gerade und es gilt

$$|a_n - a| \;=\; |(-1)^n - a| \;=\; |1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Weiterhin ist dann $n' := N\left(\frac{1}{2}\right) + 1$ ungerade und somit

$$|a_{n'} - a| \;=\; |(-1)^{n'} - a| \;=\; |-1 - a| \;=\; |1 + a| \;<\; \frac{1}{2}.$$

Es folgt insgesamt $2 = |1-a+(1+a)| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |1-a|+|1+a| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$. Widerspruch!

<u>2. Fall</u>: $N\left(\frac{1}{2}\right)$ ist ungerade. Dann ist $n := N\left(\frac{1}{2}\right) + 1$ gerade und $n' := N\left(\frac{1}{2}\right) + 2$ ungerade, so dass analog ein Widerspruch konstruiert werden kann.

(c) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und fest. Als $N(\varepsilon)$ wählen wir ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \max\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$. (Dieses existiert nach dem Archimedischen Axiom.)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$. Dann gilt $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Aus $n > \sqrt{2} > 0$ folgt $n^2 > 2$ und $n^4 - n^2 + 1 = n^2(\underbrace{n^2 - 1}_{>1}) + 1 > n^2$ und somit

$$\left|\frac{1}{n^4 - n^2 + 1} - 0\right| = \frac{1}{n^4 - n^2 + 1} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \,.$$

Bemerkung: Wir brauchen nur irgendein $N(\varepsilon)$, nicht zwingend das kleinstmögliche.

Aufgabe 8.3.
Welche der folgenden Zahlenfolgen $\{a_n\}$ sind

(i) konvergent

(ii) bestimmt divergent

(iii) unbestimmt divergent

Bestimmen Sie für (i) und (ii) die Grenzwerte!

(a) $(100 + \frac{1}{n})^2$

(b) $3^{-n}(2^n + (-2)^n)$

(c) $\frac{3n^3-2n^2+2n+4}{4n^4+n^2-n}$

(d) $\frac{2n^3-n^2-n+1}{3n^3-1}$

(e) $(-2)^n$

(f) $3^n + (-2)^n$

(g) $2^{-n}(2^n + (-2)^n)$

Lösung zu Aufgabe 8.3.

(a) Konvergent mit Grenzwert $100^2 = 10.000$, weil

$$\lim_{n\to\infty}(100+\frac{1}{n})^2 = \lim_{n\to\infty}(100+\frac{1}{n})\cdot(100+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(100+\frac{1}{n})\cdot\lim_{n\to\infty}(100+\frac{1}{n}) = 100\cdot 100 = 10.000$$

(b) Konvergent mit Grenzwert 0, weil

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-n}(2^n + (-2)^n) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 & \text{,falls n gerade} \\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-2}{3}\right)^n = 0 & \text{,falls n ungerade} \end{cases}$$

(c) Konvergent mit Grenzwert 0, Weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + 2n + 4}{4n^4 + n^2 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \frac{3 - 2n^{-1} + 2n^{-2} + 4n^{-3}}{4n + n^{-1} - n^{-2}} = 0$$

(d) Konvergent mit Grenzwert $\frac{2}{3}$, weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n^2 - n + 1}{3n^3 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \frac{2 - n^{-1} - n^{-2} + n^{-3}}{3 - n^{-3}} = \frac{2}{3}$$

(e) Unbestimmt divergent, weil

$$\lim_{n\to\infty} (-2)^n = \begin{cases} \infty & \text{,falls n gerade} \\ -\infty & \text{,falls n ungerade} \end{cases}$$

(f) Bestimmt divergent mit Grenzwert ∞, weil

$$\lim_{n\to\infty} 3^n + (-2)^n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} 3^n + 2^n = \infty & \text{falls n gerade} \\ \lim_{n\to\infty} 3^n - 2^n \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

(g) unbestimmt divergent mit Häufungspunkten 2 und 0

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}(2^n + (-2)^n) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{2^n}{2^n} = 2 & \text{,falls n gerade} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2^n}{2^n} = 0 & \text{,falls n ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 8.4.
Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:
(a) $a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;
(b) $b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;
(c) $c_n := \frac{3^n + (-3)^n}{4^n}$;
(d) $d_n := \frac{3^n + (-3)^n}{2^n}$;
(e) $e_1 := 1$, $e_{n+1} := \frac{1}{4}(e_n + 1)$;
(f) $f_n = \frac{n^2+1}{2n+3} - \frac{n^3+1}{2n^2-1}$

Lösung zu Aufgabe 8.4.

(a) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}$.

(b) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(a)$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp(-1)$$

(c) $c_{2k} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2k} \to 0$, $c_{2k-1} = 0$ und somit $c_n \to 0$ $(k, n \to \infty)$.

(d) $d_{2k} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \to \infty$, $d_{2k-1} = 0$. Die Folge divergiert.

(e) Zunächst zeigt man induktiv, dass $e_n > \frac{1}{3}$ für all $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $e_1 = 1 > \frac{1}{3}$ gilt und aus $e_n > \frac{1}{3}$ die Ungleichung

$$e_{n+1} > \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

folgt. Daher ist e_n nach unten beschränkt. Außerdem ist e_n wegen

$$e_{n+1} = \frac{e_n}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e_n}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} < \frac{e_n}{4} + \frac{3}{4} e_n = e_n.$$

monoton fallend. Also konvergiert e_n, und zwar gegen die eindeutige Lösung $e = \frac{1}{3}$ der Gleichung $e = \frac{1}{4}(e+1)$.

(f)

$$f_n = \frac{n^2+1}{2n+3} - \frac{n^3+1}{2n^2-1} = \frac{(n^2+1)(2n^2-1) - (n^3+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n^2-1)} = \frac{-3n^3+n^2-2n-4}{4n^3+6n^2-2n-3} \to -\frac{3}{4}$$

. . . .

9 Monotonie von Zahlenfolgen

9.1 Wiederholung - Theorie: Monotonie

(a) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **monoton wachsend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} \geq a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

(b) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **monoton fallend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} \leq a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.

(c) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} > a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

(d) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **streng monoton fallend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} < a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

9.2 Wiederholung - Theorie: Supremum, Infimum

- Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $K \in \mathbb{R}$ **Supremum** von A (in Zeichen: $\sup A = K$), falls
  - (i) $\forall a \in A \;:\; a \leq K$ $\quad$ (K ist obere Schranke von A),
  - (ii) $\forall K' \in \mathbb{R} \;:\; \big((K' < K) \;\Rightarrow\; (\exists a \in A \;:\; a > K')\big)$ $\quad$ (K ist kleinstmöglich).
- Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $K \in \mathbb{R}$ **Infimum** von A (in Zeichen: $\sup A = K$), falls
  - (i) $\forall a \in A \;:\; a \geq K$ $\quad$ (K ist untere Schranke von A),
  - (ii) $\forall K' \in \mathbb{R} \;:\; \big((K' > K) \;\Rightarrow\; (\exists a \in A \;:\; a < K')\big)$ $\quad$ (K ist größtmöglich).
- Existiert für $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ keine obere Schranke, so definieren wir $\sup A := +\infty$. Ebenso definieren wir $\inf A := -\infty$, falls für $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ keine untere Schranke existiert.
- Ist $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zugrunde liegende Menge, definiert man weiter
  - (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k \;:\; k \geq n\}\big)$ $\quad\ldots$ **Limes superior**
  - (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k \;:\; k \geq n\}\big)$ $\quad\ldots$ **Limes inferior**

. . . .

9.3 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 9.1.
Zeigen Sie, dass die durch die Rekursionsformel $x_1 := \sqrt{2},\; x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, gegebene Folge konvergiert. Untersuchen Sie dazu das Monotonieverhalten und zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge durch 2 nach oben beschränkt ist.

Lösung zu Aufgabe 9.1.
Es ist $x_1 = \sqrt{2}, x_2 := \sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3 := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Wir erkennen, dass $x_{n+1} > x_n$, also $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine streng monoton wachsende Folge (denn die Wurzelfunktion ist selbst streng monoton wachsend).
Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, dass $x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $x_1 = \sqrt{2} < 2$ ist eine wahre Aussage.

Induktionschritt:

Induktionsvoraussetzung: $x_n < 2$.

Induktionsbehauptung: $x_{n+1} < 2$.

Beweis: Ist $x_n < 2$, dann ist $(x_{n+1})^2 = 2 + x_n < 2 + 2 = 4$. Da außerdem $x_n > x_1 = \sqrt{2} > 0$ gilt, ergibt sich nach Wurzelziehen, dass $x_{n+1} < 2$.

Somit ist $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine streng monoton wachsende Folge und nach oben beschränkt, die nach einem Korollar aus dem Satz von Bolzano Weierstraßdann konvergent ist.
Der Grenzwert $x^\star$ muss offenbar die Fixpunktgleichung $x^\star = \sqrt{2 + x^\star}$ erfüllen und positiv sein. Daher folgt, dass $(x^\star)^2 = 2 + x^\star$ und demnach ist $x^\star = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 2$ (da die zweite Lösung $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -1$ negativ ist) der gesuchte Grenzwert.

Aufgabe 9.2.
Untersuchen Sie die Monotonie der nachstehenden Folgen:

(a) $a_n := n$,

(b) $b_n := n^k \; (k \in \mathbb{N})$,

(c) $c_n := \sqrt{n}$,

(d) $d_n := \frac{1}{n}$.

Lösung zu Aufgabe 9.2.

(a) $a_{n+1} - a_n \;=\; (n+1) - n \;=\; > 0$, also ist die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (sogar streng) monoton wachsend.

(b) Die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ positiv und (sogar streng) monoton wachsend, denn es gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^j n^{k-j}}{n^k} = \frac{n^k + \sum\limits_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 1^j n^{k-j}}{n^k} > \frac{n^k}{n^k} = 1.$$

(c) Die Folge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine (sogar streng) monoton wachsende Folge, denn es gilt $c_{n+1} - c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0\,,$
weil sowohl Zähler als auch Nenner positiv sind.

(d) Wegen $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1$ ist die Folge $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ (sogar streng) monoton fallend.

Aufgabe 9.3.
Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte von

(a) $a_n = ((-1)^n(3 - \frac{4}{n}))$

(b) $b_n = (1 + (-1)^n)$

(c) $c_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{3}}(5 - \frac{4}{n}) + (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor}(-2 - \frac{1}{n})$

Lösung zu Aufgabe 9.3.

(a) Wir betrachten die Folgen

$$(n_k) = (2k) \quad \text{und} \quad (m_k) = (2k-1).$$

Dann gilt $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. und es gilt

$$a_{m_k} = (-1)^{2k-1}(3 - \frac{4}{2k-1}) = -3 + \frac{4}{2k-1}$$

und

$$a_{n_k} = (-1)^{2k}(3 - \frac{4}{2k}) = 3 + \frac{2}{k}.$$

Daher ist

$$a^{(1)} = \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty}(3 - \frac{2}{k}) = 3$$

und

$$a^{(2)} = \lim_{n\to\infty} a_{m_k} = \lim_{k\to\infty}(-3 + \frac{4}{2k-1}) = -3.$$

Somit ist die Menge der Häufungspunkte durch $\{-3, 3\}$ gegeben und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3 \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -3.$$

(b) Wir betrachten die Folgen

$$(n_k) = (2k) \quad \text{und} \quad (m_k) = (2k-1).$$

Dann gilt $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. und es gilt

$$b_{m_k} = 0$$

und

$$b_{n_k} = 2.$$

Daher ist

$$b^{(1)} = 2$$

und

$$b^{(2)} = 0.$$

Somit ist die Menge der Häufungspunkte durch $\{0, 2\}$ gegeben und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = 2 \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(c) Wir betrachten die Folgen

$$\begin{aligned}
(n_k^{(1)}) &= 6k \\
(n_k^{(2)}) &= 6k-5 \\
(n_k^{(3)}) &= 6k-4 \\
(n_k^{(4)}) &= 6k-3 \\
(n_k^{(5)}) &= 6k-2 \\
(n_k^{(6)}) &= 6k-1
\end{aligned}$$

und die zugehörigen Teilfolgen von (a_n). Es gilt, dass

$$\left\{ n_k^{(l)} : l = 1, ..., 6, k \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
c_{n_k^{(1)}} &= (5 - \frac{4}{6k}) - 2 - \frac{1}{6k} \\
c_{n_k^{(2)}} &= (5 - \frac{4}{6k-5}) - 2 - \frac{1}{6k-5} \\
c_{n_k^{(3)}} &= (5 + \frac{4}{6k-4}) + 2 + \frac{1}{6k-4} \\
c_{n_k^{(4)}} &= -5 + \frac{4}{6k-3} + 2 + \frac{1}{6k-3} \\
c_{n_k^{(5)}} &= -5 + \frac{4}{6k-2} + 2 + \frac{1}{6k-2} \\
c_{n_k^{(6)}} &= -5 + \frac{4}{6k-1} - 2 - \frac{1}{6k-1}.
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
c^{(1)} = \lim_{k\to\infty} c_{n_k^{(1)}} &= 3 \\
c^{(2)} = \lim_{k\to\infty} c_{n_k^{(2)}} &= 3 \\
c^{(3)} = \lim_{k\to\infty} c_{n_k^{(3)}} &= 7 \\
c^{(4)} = \lim_{k\to\infty} c_{n_k^{(4)}} &= -3 \\
c^{(5)} = \lim_{k\to\infty} c_{n_k^{(5)}} &= -3 \\
c^{(6)} = \lim_{k\to\infty} c_{n_k^{(6)}} &= -7
\end{aligned}$$

Somit ist die Menge der Häufungspunkte durch $\{-7, -3, 3, 7\}$ gegeben und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 7 \qquad \liminf n \to \infty a_n = -7.$$

9.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 9.1.

Es sei (a_n) die rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ definierte Folge. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert. Den Grenzwert könnte man heuristisch als

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$$

schreiben. Berechnen Sie ihn!

Lösung zu Aufgabe 9.1.
Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass (a_n) eine streng monoton wachsende Folge ist, d.h. dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} > a_n$$

IA: $n = 1$

$$a_{n+1} = a_2 = \sqrt{2} > \sqrt{1} = a_1 = a_n$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $a_{n+1} > a_n$ für ein $n \geq 1$
IB: zu zeigen: $a_{n+1} > a_{n+1}$
Beweis der IB:

$$a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} > \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}$$

Als nächstes zeigen wir wieder mittels vollständiger Induktion, dass

$$a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

IA: $n = 1$

$$a_n = a_1 = 1 < 2$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $a_n < 2$
IB: zu zeigen: $a_{n+1} < 2$
Beweis der IB:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} > \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$$

Wir wissen jetzt, dass (a_n) streng monoton wachsend und beschränkt ist, dass heißt sie ist konvergent. Das heißt, es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$. Weiterhin sieht man sofort, dass $a_n > 0$ und daher auch $a > 0$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+a_n}) = \sqrt{1+a}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = a$ aus $(a_{n+1}) = (\sqrt{a_n + 1})$ auch

$$a = \sqrt{1+a}$$

oder

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

Als Lösungen erhalten wir
$$a_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$
Da aber $a \geq 0$ folgt
$$a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$
Die Zahl a wird auch als der goldene Schnitt bezeichnet.

Aufgabe 9.2.
Wir definieren rekursiv eine Folge durch $x_1 = \pi$ und
$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n(x_n-2)^2}{x_n^2-4x_n+5} & \text{,wenn } x_n^2 - 4x_n + 5 \neq 0, \\ \pi & \text{,wenn } x_n^2 - 4x_n + 5 = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass alle x_n nichtnegativ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.

(c) Beweisen Sie mittels (b), dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Anmerkung:

Die falsch definierte Folge
$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n-1)^2}{x_n^2 - 4x_n + 5}$$
ist bestimmt divergent gegen $+\infty$, weil wir zeigen können, dass $x_{n+1} \geq x_n + 1$. Denn es gilt
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n(x_n-1)^2}{x_n^2-4x_n+5} \\ &\overset{\text{Polynomdivision}}{=} x_n + 2 - \frac{4x_n - 10}{(x_n-2)^2+1} \\ &\overset{(*)}{\geq} x_n + 1 \end{aligned}$$
Wobei $(*)$ aus der Tatsache folgt, dass
$$\begin{aligned} \frac{4x_n-10}{(x_n-2)^2+1} &\leq 1 \\ 4x_n - 10 &\leq (x_n-2)^2 + 1 \\ -15 &\leq x_n^2 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9.2.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$
Darum tritt die Bedingung des zweiten Astes nie ein und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass
$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n-2)^2}{x_n^2-4x_n+5} = x_n\frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1}.$$

Da stets $(x_n-2)^2 \geq 0$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} < 1 \tag{*}$$

(a) Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq 0$.
<u>IA:</u> $n = 1$

$$x_1 = \pi > 0$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $x_n \geq 0$
<u>IB:</u> zu zeigen: $x_{n+1} \geq 0$
<u>Beweis der IB:</u>

$$x_{n+1} = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} \overset{(*)}{\geq} 0$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es folgt wegen (*)

$$x_{n+1} = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} < x_n.$$

(c) Folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass (x_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

(d) Sei $g \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von (x_n). Dann folgt aus bekannten Grenzwertsätzen

$$g = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} = g\frac{(g-2)^2}{(g-2)^2+1},$$

da $(g-2)^2+1 \neq 0$. Wäre $g \neq 0$, so wäre

$$1 = \frac{(g-2)^2}{(g-2)^2+1},$$

bzw.

$$(g-2)^2+1 = (g-2)^2,$$

also $0 = 1$, Widerspruch. Also ist $g = 0$ und insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Aufgabe 9.3.
Untersuchen Sie das Monotonie-Verhalten der nachstehenden Zahlenfolgen!

(a) $a_n = \frac{n^2}{2^{n+3}}$,

(b) $b_n = \frac{6n}{n^2+9}$,

(c) $c_n = \frac{n-10}{n}$,

(d) $d_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1)$,

(e) $e_n = \frac{n!}{5^n}$.

Lösung zu Aufgabe 9.3.

(a) $a_n = \frac{n^2}{2^{n+3}}$ ist wegen $2n+1-n^2 = -(n-1-\sqrt{2})(n-1+\sqrt{2})$ und demzufolge

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+4}} - \frac{n^2}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+4}}\,(n^2+2n+1-2n^2) \\ &= \frac{1}{2^{n+4}}\,(2n+1-n^2) \begin{cases} > 0 & \text{für } n = 1,2 \\ < 0 & \text{für } n \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

bis $n = 3$ streng monoton wachsend und dann streng monoton fallend.

(b) $b_n = \frac{6n}{n^2+9}$ ist wegen $n^2+9 \geq 6n \quad \Leftrightarrow \quad (n-3)^2 \geq 0$ durch 1 nach oben beschränkt. Wegen $9-n-n^2 \begin{cases} > 0 & \text{für } n = 1,2 \\ < 0 & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$ und $n^3+2n^2+10n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{6(n+1)}{(n+1)^2+9}}{\frac{6n}{n^2+9}} = \frac{6(n+1)}{6n}\,\frac{n^2+9}{(n+1)^2+9} = \frac{n^3+n^2+9n+9}{n^3+2n^2+10n} = 1+\frac{9-n-n^2}{n^3+2n^2+10n}$$

ist die Folge bis $n = 3$ streng monoton wachsend und danach streng monoton fallend.

(c) $c_n = \frac{n-10}{n}$ ist streng monoton wachsend wegen
$c_{n+1} - c_n = \frac{n+1-10}{n+1} - \frac{n-10}{n} = 1 - \frac{10}{n+1} - \left(1 - \frac{10}{n}\right) = \frac{10}{n} - \frac{10}{n+1} = \frac{10}{n(n+1)} > 0$

(d) $d_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1)$ ist streng monoton fallend wegen

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = a^{-\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[n(n+1)]{a}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \sqrt[n(n+1)]{a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < a.$$

(e) $e_n = \frac{n!}{5^n}$ ist wegen $e_4 = e_5 = \frac{24}{625}$ und

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \frac{n+1}{5} \begin{cases} < 1 & \text{für } n = 1,2,3 \\ = 1 & \text{für } n = 4 \\ > 1 & \text{für } n \geq 5 \end{cases}$$

bis $n = 4$ streng monoton fallend und ab $n = 5$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 9.4.
Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte, $\limsup$ und $\liminf$ für die Folgen

(a) $a_n = (-1)^{n-1}(2 - \frac{4}{n}) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}(1 + \frac{1}{n})$

(b) $b_n = (1 + (-1)^n)n$

(c) $c_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}(5 - \frac{4}{n+3}) + (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor}(7 + \frac{3}{n+1})$

Lösung zu Aufgabe 9.4.

(a) Wir betrachten die Folgen

$$\begin{aligned}(n_k^{(1)}) &= 6k\\ (n_k^{(2)}) &= 6k-5\\ (n_k^{(3)}) &= 6k-4\\ (n_k^{(4)}) &= 6k-3\\ (n_k^{(5)}) &= 6k-2\\ (n_k^{(6)}) &= 6k-1\end{aligned}$$

und die zugehörigen Teilfolgen von (a_n). Es gilt, dass

$$\left\{n_k^{(l)} : l = 1, ..., 6, k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}a_{n_k^{(1)}} &= -(2-\frac{4}{6k})+1+\frac{1}{6k}\\ a_{n_k^{(2)}} &= 2-\frac{4}{6k-5}+1+\frac{1}{6k-5}\\ a_{n_k^{(3)}} &= -(2-\frac{4}{6k-4})+1+\frac{1}{6k-4}\\ a_{n_k^{(4)}} &= 2-\frac{4}{6k-3}-1-\frac{1}{6k-3}\\ a_{n_k^{(5)}} &= -(2-\frac{4}{6k-2})-1-\frac{1}{6k-2}\\ a_{n_k^{(6)}} &= 2-\frac{4}{6k-1}-1-\frac{1}{6k-1}.\end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}a^{(1)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(1)}} &= -1\\ a^{(2)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(2)}} &= 3\\ a^{(3)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(3)}} &= -1\\ a^{(4)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(4)}} &= -1\\ a^{(5)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(5)}} &= -3\\ a^{(6)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(6)}} &= 1\end{aligned}$$

Somit ist die Menge der Häufungspunkte durch $\{-3, -1, 1, 3\}$ gegeben und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3 \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -3.$$

(b) Wir betrachten die Folgen

$$(n_k) = (2k) \quad \text{und} \quad (m_k) = (2k-1).$$

Dann gilt $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ und

$$b_{m_k} = 0$$

und

$$b_{n_k} = 4k.$$

Daher ist

$$b^{(1)} = \lim_{n\to\infty} b_{n_k} = \lim_{k\to\infty} 4k = \infty$$

und

$$b^{(2)} = \lim_{n\to\infty} b_{m_k} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Somit ist die Menge der Häufungspunkte durch $\{0\}$ (weil ∞ per Definition kein Häufungspunkt sein kann) gegeben und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \infty \qquad \liminf n \to \infty b_n = 0.$$

(c) Wir betrachten die Folgen

$$\begin{array}{rcl} (n_k^{(1)}) & = & 6k \\ (n_k^{(2)}) & = & 6k-5 \\ (n_k^{(3)}) & = & 6k-4 \\ (n_k^{(4)}) & = & 6k-3 \\ (n_k^{(5)}) & = & 6k-2 \\ (n_k^{(6)}) & = & 6k-1 \end{array}$$

und die zugehörigen Teilfolgen von (a_n). Es gilt, dass

$$\left\{ n_k^{(l)} : l = 1, ..., 6, k \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} a_{n_k^{(1)}} & = & -(5 - \dfrac{4}{6k+3}) + 7 + \dfrac{3}{6k+1} \\ a_{n_k^{(2)}} & = & (5 - \dfrac{4}{6k-2}) + 7 + \dfrac{3}{6k-4} \\ a_{n_k^{(3)}} & = & (5 - \dfrac{4}{6k-1}) - (7 + \dfrac{3}{6k-3}) \\ a_{n_k^{(4)}} & = & (5 - \dfrac{4}{6k}) - (7 + \dfrac{3}{6k-2}) \\ a_{n_k^{(5)}} & = & -(5 - \dfrac{4}{6k+1}) - (7 + \dfrac{3}{6k-1}) \\ a_{n_k^{(6)}} & = & -(5 - \dfrac{4}{6k+2}) + 7 + \dfrac{3}{6k}. \end{array}$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
a^{(1)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(1)}} &= 2 \\
a^{(2)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(2)}} &= 12 \\
a^{(3)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(3)}} &= -2 \\
a^{(4)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(4)}} &= -2 \\
a^{(5)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(5)}} &= -12 \\
a^{(6)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(6)}} &= 2
\end{aligned}$$

Somit ist die Menge der Häufungspunkte durch $\{-12, -2, 2, 12\}$ gegeben und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 12 \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -12.$$

10 Der Goldene Schnitt

10.1 Definition: Goldener Schnitt

Teilt man die auf $[0,1]$ normierte Strecke so, dass das Verhältnis der Länge der Gesamtstrecke zur Länge der größeren Teilstrecke gleich dem Verhältnis von größerer zu kleinerer Teilstrecke ist, so folt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x} \\
1-x &= x^2 \\
x^2+x-1 &= 0 \\
x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\
x_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033988 \\
x_2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ entfällt, weil negativ}
\end{aligned}$$

Daher kommen wir zur folgenden Definition:

Definition 10.1.1. *Das Verhältnis*

$$\begin{aligned}
\tau := \frac{1}{x_1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\
&= \frac{2\sqrt{5}+2}{5-1} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339
\end{aligned}$$

*nennt man die **Goldene Schnittzahl**.*

Wie kann man den Goldenen Schnitt konstruieren? Wir benutzen den Satz des Pythagoras. Sei also ein Dreieck ΔABC mit den Seitenpunkten $A=(0;0)$, $B=(1;0)$ und $C=(1;\frac{1}{2})$ gegeben. Dann gilt

$$1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}+x\right)^2 = \frac{1}{4}+x+x^2.$$

Es folgt, dass

$$x^2+x-1=0$$

also teilt x das Intervall $[0;1]$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts.

10.2 Eigenschaften des Goldenen Schnitts

Satz 10.2.1. $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ist irrational.*

Beweis. Sei $\tau = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ teilderfremd. Wegen

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \tau = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\tau}$$

folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{\tau} - 1 &= 0 \\ 1 + \tau - \tau^2 &= 0 \\ \tau^2 - \tau - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} - 1 &= 0 \\ p^2 - pq - q^2 &= 0 \\ p(p-q) &= q^2. \end{aligned}$$

Also ist p ein Teiler von q^2. Da p und q teilerfremd gewählt waren, muss $p = 1$ sein. Weiterhin können wir indem wir bei der obigen Gleichung $p \cdot q$ addieren herleiten, dass

$$p^2 = q^2 + pq = q(p+q).$$

Das heißt aber nichts anderes, als dass q ein Teiler von p^2 ist. Da p und q teilerfremd gewählt waren, muss $q = 1$ sein. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $p = q = 1 = \tau$ ist keine Lösung unserer quadratischen Anfangsgleichung. Also war die Annahme falsch und τ ist irrational. □

Satz 10.2.2 (Potenzen von τ). *Sei τ die positive Lösung von $x^2 = x+1$ (goldener Schnitt). Dan gilt für die Potenzen von τ die folgende Formel:*

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

Beweis. Siehe Lösungen zur Übungsserie. □

Satz 10.2.3. *Es gilt*

$$\tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2,$$

wobei die Folge f_n die Fibonacci-Folge ist, also $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, f_1 = f_2 = 1$.

Beweis. Siehe Lösungen zur Übungsserie. □

Satz 10.2.4. *Die Zahl*

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ist die positive Lösung von

$$\tau^2 = \tau + 1.$$

Weiterhin hat τ^2 dieselben Nachkommastellen wie τ

Beweis. Die Lösung der Gleichung

$$x^2 = x + 1$$

erhält man durch

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 1 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} \\
x_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\
x_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \qquad \text{entfällt.}
\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung erhält man, indem man die Gleichung $\tau^2 = \tau + 1$ durch τ dividiert, es folgt

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{\tau} = \tau - 1.$$

Also hat $\frac{1}{\tau}$ dieselben Nachkommastellen wie τ. (0.618033989). □

Satz 10.2.5 (Zusammenhang der Fibonaccizahlen mit dem Goldenen Schnitt)**.** *Sei $\rho = \frac{1}{\tau}$. Dann gilt*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tau^n - (-\rho)^n\right) \qquad \textit{(Binetsche Formel)}$$

Beweis. Siehe Lösungen zur Übungsserie. □

Satz 10.2.6. *Der Quotient aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen konvergiert gegen τ.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+1} - (\rho)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^n - (-\rho)^n\right)} && (10.1) \\
&= \frac{\tau - \tau\left(-\frac{\rho}{\tau}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{\rho}{\tau}\right)^n} && (10.2)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\tau} = \frac{1}{\tau^2} < 1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\tau - 0}{1 - 0} = \tau.$$

□

Satz 10.2.7. *Die rekursiv durch*

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \qquad x_1 = 1$$

definierte Folge konvergiert gegen den Goldenen Schnitt.

Beweis. Siehe Lösungen zur Übungsserie. □

Satz 10.2.8. *Die rekursiv durch*

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \qquad x_1 = 1$$

definierte Folge konvergiert gegen den Goldenen Schnitt.

Beweis. Siehe Lösungen zur Übungsserie. □

. . . .

10.3 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 10.1.
Geben Sie für die folgenden Mengen $\mathbb{M}_k$ jeweils das Supremum $\sup \mathbb{M}_k \in \mathbb{R}$ und das Infimum $\inf \mathbb{M}_k \in \mathbb{R}$, das Maximum $\max \mathbb{M}_k$ und das Minimum $\min \mathbb{M}_k$ an, falls diese existieren:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}_1 := \mathbb{N}\,, &&\mathbb{M}_2 := \{(-1)^n \;:\; n \in \mathbb{N}\}\,, &&\mathbb{M}_3 := \left\{1 + \tfrac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\},\\
&\mathbb{M}_4 := \mathbb{Z}\,, &&\mathbb{M}_5 := \{(-2)^n \;:\; n \in \mathbb{N}\}\,, &&\mathbb{M}_6 := \left\{n + \tfrac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\},\\
&\mathbb{M}_7 := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\,, &&\mathbb{M}_8 := \left\{1 + \tfrac{1}{x} \;:\; x \in [1,2)\right\}, &&\mathbb{M}_9 := \{x \in \mathbb{Q} \;:\; |x| < |x-2|\}\,.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 10.1.

(1) $\mathbb{M}_1 := \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \inf \mathbb{M}_1 = \min \mathbb{M}_1 = 1$; weder $\max \mathbb{M}_1$ noch $\sup \mathbb{M}_1$ existieren.

(2) $\mathbb{M}_2 := \{(-1)^n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \quad \Rightarrow \quad \inf \mathbb{M}_2 = \min \mathbb{M}_2 = -1, \quad \sup \mathbb{M}_2 = \max \mathbb{M}_2 = 1$.

(3) $\mathbb{M}_3 := \left\{1 + \frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \quad \Rightarrow \quad \inf \mathbb{M}_3 = 1, \quad \sup \mathbb{M}_3 = \max \mathbb{M}_3 = 2$; $\min \mathbb{M}_3$ existiert nicht.

(4) $\mathbb{M}_4 := \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$ Diese Menge besitzt weder Infimum, noch Supremum, und kann deshalb auch kein Minimum und Maximum besitzen.

(5) $\mathbb{M}_5 := \{(-2)^n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \quad \Rightarrow$ Diese Menge besitzt ebenfalls weder Infimum, noch Supremum, und kann deshalb auch kein Minimum und Maximum besitzen.

(6) $\mathbb{M}_6 := \left\{n + \frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \quad \Rightarrow \quad \inf \mathbb{M}_6 = \min \mathbb{M}_6 = 2$; weder $\max \mathbb{M}_6$ noch $\sup \mathbb{M}_6$ existieren.

(7) $\mathbb{M}_7 := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sup \mathbb{M}_7 = \max \mathbb{M}_7 = 0$; weder $\min \mathbb{M}_7$ noch $\inf \mathbb{M}_7$ existieren.

(8) $\mathbb{M}_8 := \left\{1 + \frac{1}{x} \;:\; x \in [1,2)\right\} \quad \Rightarrow \quad \sup \mathbb{M}_8 = \max \mathbb{M}_8 = 2, \quad \inf \mathbb{M}_8 = \frac{3}{2}$; diese Menge besitzt kein Minimum.

(9) $\mathbb{M}_9 := \{x \in \mathbb{Q} \;:\; |x| < |x-2|\} \;=\; \{x \in \mathbb{Q} \;:\; x < 1\} \quad \Rightarrow \quad \sup \mathbb{M}_9 = 1$

Diese Menge besitzt kein Maximum, kein Minimum und auch kein Infimum.

Aufgabe 10.2.
Bestimmen Sie $\limsup$ und $\liminf$ der folgenden Folgen:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = n$

(c) $a_n = n^2 - n! + 5$

(d) $a_n = 3(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})$

(e) $a_n = (-1)^n$

(f) $a_n = (-2)^n + (-2)^{n+1}$

(g) $a_n = (-2)^n + 2^n$

Lösung zu Aufgabe 10.2.

(a) $\limsup a_n = \liminf a_n = 0$

(b) $\limsup a_n = \liminf a_n = \infty$

(c) $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$

(d) $\limsup a_n = \liminf a_n = 0$

(e) $\limsup a_n = 1, \liminf a_n = -1$

(f) $\limsup a_n = \infty, \liminf a_n = -\infty$

(g) $\limsup a_n = \infty, \liminf a_n = 0$

10.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 10.1.

(a) Sei τ die positive Lösung von $x^2 = x + 1$ (goldener Schnitt). Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Potenzen von τ die folgende Formel gilt:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt.

(b) Beweisen Sie weiterhin mittels vollständiger Induktion, dass

$$\tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt. Wobei die Folge f_n die Fibonacci-Folge ist, also $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, f_1 = f_2 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 10.1.

(a) IA: $n = 2$

$$\tau^2 = \tau + 1$$

gilt offenbar weil τ Lösung von $x^2 = x + 1$ ist
IS: $n \to n + 1$
IV: Es gelte $\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$ für ein $n \geq 2$.
IB: zu zeigen: $\tau^{n+1} = \tau^n + \tau^{n-1}$
Beweis der IB:

$$\tau^{n+1} = \tau^n \cdot \tau \overset{I.V.}{=} (\tau^{n-1} + \tau^{n-2}) \cdot \tau = \tau^n + \tau^{n-1}$$

(b) IA: $n = 2$

$$\tau^2 = f_2 \cdot \tau + f_1 = \tau + 1$$

IS: $n \to n + 1$
IV: Es gelte $\tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}$ für ein $n \geq 2$.
IB: zu zeigen: $\tau^{n+1} = f_{n+1}\tau + f_n$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
\tau^{n+1} = \tau^n \cdot \tau &\overset{I.V.}{=} (f_n \cdot \tau + f_{n-1})\dot{\tau} \\
&= f_n \cdot \tau^2 + f_{n-1} \cdot \tau \\
&\overset{I.V.}{=} f_n \cdot (\tau + 1) + f_{n-1} \cdot \tau \\
&= \tau(f_n + f_{n-1}) + f_n \\
&= f_{n+1} \cdot \tau + f_n
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.2.

Beweisen Sie, dass die rekursiv durch $\boxed{\text{5 Punkte}}$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \qquad a_1 = 1,$$

definierte Folge konvergiert. Beweisen Sie weiterhin, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 10.2.
Wir bilden die beiden Teilfolgen

$$(n_k) = 2k, \qquad (m_k) = 2k - 1.$$

Dann gilt offenbar, dass $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Jetzt sollte man erkennen, dass die Folge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist und die Folge $\{a_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Dies können wir mittels Induktion beweisen

IA: $k = 1$

$$a_{n_2} - a_{n_1} = a_4 - a_2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} < 0$$

IS: $k \to k+1$
IV: Es gelte $a_{n_k} < a_{n_{k-1}}$ für ein $k \geq 1$.
IB: zu zeigen: $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$

$$\begin{aligned} a_{n_{k+1}} = a_{2k+2} &= 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k}}} \\ &\overset{I.V.}{<} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} \\ &= a_{2k} \\ &= a_{n_k} \end{aligned}$$

IA: $k = 1$

$$a_{m_2} - a_{m_1} = a_3 - a_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

IS: $k \to k+1$
IV: Es gelte $a_{m_k} > a_{m_{k-1}}$ für ein $k \geq 1$.
IB: zu zeigen: $a_{m_{k+1}} > a_{m_k}$

$$\begin{aligned} a_{m_{k+1}} = a_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{a_{2k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} \\ &\overset{I.V.}{>} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{a_{2k-2}} \\ &= a_{2k-1} \\ &= a_{m_k} \end{aligned}$$

Weiterhin können wir zeigen, dass die monoton fallende Teilfolge der geraden Folgeglieder von unten durch die monoton wachsende Teilfolge der ungeraden Glieder begrenzt wird. Andersrum trifft dies natürlich auch zu.
IA: $k = 1$

$$a_{n_1} = a_2 = 2 > 1 = a_1 = a_{m_1}$$

<u>IS:</u> $k \to k+1$
<u>IV:</u> Es gelte $a_{n_k} > a_{m_k}$ für ein $k \geq 1$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $a_{n_{k+1}} > a_{m_{k+1}}$

$$\begin{aligned} a_{n_{k+1}} = a_{2k+2} &= 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k}}} \\ &\overset{I.V.}{>} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} \\ &= 1 + \frac{1}{a_{2k}} \\ &= a_{2k+1} \\ &= a_{m_{k+1}} \end{aligned}$$

Der Satz über die monotone Konvergenz garantiert uns nun, dass beide Teilfolgen konvergieren. Demnach können wir die Fixpunktgleichung aufstellen und es folgt bei beiden Teilfolgen

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \\ a^2 &= a + 1 \\ a_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Wobei die negative Lösung natürlich entfällt, da beide Teilfolgen echt größer Eins waren. Somit erhalten wir $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als Lösung. Da wir mittels unserer beiden Teilfolgen alle $n \in \mathbb{N}$ berücksichtigt haben und beide gegen den selben Grenzwert konvergieren, folgt auch dass die gesamte Folge (a_n) gegen a konvergiert. a ist aber genau der Goldene Schnitt, womit wir alles gezeigt haben.

Aufgabe 10.3.
Es seien Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = a > 0$ und $b_1 = b > 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. (Dieser gemeinsame Grenzwert wird als arithmetisch-geometrisches Mittel bezeichnet.)

Hinweis: Beweisen Sie erst, dass $a_n \geq b_n$, leiten Sie daraus dann die Monotonie/Beschränktheit beider Folgen her und schließlich bilden sie die Differenz und zeigen, dass diese gegen 0 konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 10.3.
Für alle $n \geq 2$ gilt

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \leq \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_n.$$

Dies kann man leicht einsehen, denn seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\geq 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle $n \geq 2$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

und

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$

(a_n) ist für $n \geq 2$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, folglich gegen ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 0$ konvergent. Wir setzen $\alpha_n = a_n - b_n$. Dann gilt für $n \geq 2$, dass $\alpha_n \geq 0$. Wir zeigen durch vollständige Induktion dass für $n \geq 2$

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2^{n-2}} \alpha_2.$$

<u>IA:</u> $n = 2$

$$\alpha_n = \alpha_2 = \frac{1}{2^0} \alpha_2 = \frac{1}{2^{n-2}} \alpha_2$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $\alpha_n \leq \frac{\alpha_2}{2^{n-2}}$
<u>IB:</u> $\alpha_{n+1} \leq \frac{\alpha_2}{2^{n-1}}$
<u>Beweis der IB:</u>

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\alpha_n - b_{n+1} \leq a_n - \frac{1}{2}\alpha_n - b_n = \frac{1}{2}\alpha_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}\alpha_2.$$

Wegen $0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}\alpha_2$ für $n \geq 2$, folgt $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n) = 0$. Wegen $b_n = a_n + \alpha_n$, gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = a + 0 = a$. Im Ergebnis konvergieren also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert.

Aufgabe 10.4.
Berechnen Sie den Limesinferior und den Limessuperior der folgenden Folgen

(i) $a_n = (7)^n + (-7)^n$ (ii) $b_n = 4^{-n}(3^n - (-3)^n)$ (iii) $c_n = (1 - \frac{1}{3n})^{2n}$

(iv) $d_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(3 + \frac{4}{3n}) + (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(-4 - \frac{3}{n})$ (v) $e_n = (-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(3 + \frac{4}{3n}) + (-2)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(-4 - \frac{3}{n})$

Lösung zu Aufgabe 10.4.

(i) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}((7)^n + (-7)^n) = \begin{cases} \infty & \text{, falls n ungerade} \\ 0 & \text{, falls n gerade} \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty}((7)^n + (-7)^n) = \infty, \qquad \liminf_{n\to\infty}((7)^n + (-7)^n) = 0.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(4^{-n}(3^n - (-3)^n)) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{-3}{4}\right)^n = 0.$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0.$$

(iii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3n})^{2n} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3n})^{n}\cdot(1-\frac{1}{3n})^{n} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3n})^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3n})^{n} = \exp(-\frac{1}{3})\cdot\exp(-\frac{1}{3}).$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} c_n = \exp(-\frac{2}{3}).$$

(iv) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(3+\frac{4}{3n}) + (-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-4-\frac{3}{n}) = \begin{cases} -1, & \text{falls } n = 4k \\ -7, & \text{falls } n = 4k-1 \\ 1, & \text{falls } n = 4k-2 \\ 7, & \text{falls } n = 4k-3 \end{cases}$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} d_n = 7, \qquad \liminf_{n\to\infty} = -7.$$

(v) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(-2)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(3+\frac{4}{3n}) + (-2)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-4-\frac{3}{n}) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } n = 4k \\ -\infty, & \text{falls } n = 4k-1 \\ \infty, & \text{falls } n = 4k-2 \\ \infty, & \text{falls } n = 4k-3 \end{cases}$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} e_n = \infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} e_n = -\infty.$$

11 Klausurvorbereitung

11.1 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 11.1.
Lösen Sie die folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$:

(a) $z^3 = 8$

(b) $z^5 = 2 - 2i$

(c) $z^2 = -2$

(d) $z^4 = -3 + 3i$

(e) $z^4 = -16i$

Lösung zu Aufgabe 11.1.

(a) Die erste Lösung ist offensichtlich $z_1 = 2 = 2e^{i\cdot 0}$. Da die Lösungen symmetrisch über dem Kreis mit Radius 2 verteilt sind, erhalten wir $z_2 = 2e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$ und $z_3 = 2e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}}$.

(b) Wir können die Gleichung umschreiben zu

$$z^5 = 2 - 2i = \sqrt{8}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{8}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})) = \sqrt{8}e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}} = r^5 \cdot e^{i5\phi}$$

Wir erhalten also als Betrag $r = \sqrt[10]{8}$. Weiterhin muss gelten, dass

$$\frac{7\pi}{4} = 5\phi.$$

Somit erhalten wir als Winkel $\phi_1 = \frac{7\pi}{20}$. Da die $\exp()$-Funktion im Komplexen 2π-periodisch ist, erhalten wir weiterhin die Lösungen (wir addieren den gefundenen Winkel jeweils mit $\frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{20}$, durch 5, weil wir wissen, dass es 5 Lösungen geben muss)

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{15\pi}{20} \\
\phi_3 &= \frac{23\pi}{20} \\
\phi_4 &= \frac{31\pi}{20} \\
\phi_5 &= \frac{39\pi}{20}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[10]{8}e^{i\frac{7\pi}{20}} \\ z_2 &= \sqrt[10]{8}e^{i\frac{15\pi}{20}} \\ z_3 &= \sqrt[10]{8}e^{i\frac{23\pi}{20}} \\ z_4 &= \sqrt[10]{8}e^{i\frac{31\pi}{20}} \\ z_5 &= \sqrt[10]{8}e^{i\frac{39\pi}{20}} \end{aligned}$$

(c) Wir können die Gleichung umschreiben zu

$$z^2 = -2 = 2(-1) = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 2e^{i\cdot\pi} = r^2 \cdot e^{i2\phi}$$

Wir erhalten also als Betrag $r = \sqrt{2}$. Weiterhin muss gelten, dass

$$\pi = 2\phi.$$

Somit erhalten wir als Winkel $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$. Da die $\exp()$-Funktion im Komplexen 2π-periodisch ist, erhalten wir weiterhin die Lösungen (wir addieren den gefundenen Winkel jeweils mit $\frac{2\pi}{2}$, durch 2, weil wir wissen, dass es 2 Lösungen geben muss)

$$\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

(d) Wir können die Gleichung umschreiben zu

$$z^4 = -3 + 3i = \sqrt{18}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{18}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{18}e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} = r^4 \cdot e^{i4\phi}$$

Wir erhalten also als Betrag $r = \sqrt[8]{18}$. Weiterhin muss gelten, dass

$$\frac{3\pi}{4} = 4\phi.$$

Somit erhalten wir als Winkel $\phi_1 = \frac{3\pi}{16}$. Da die $\exp()$-Funktion im Komplexen 2π-periodisch ist, erhalten wir weiterhin die Lösungen (wir addieren den gefundenen Winkel jeweils mit $\frac{2\pi}{4} = \frac{8\pi}{16}$, durch 4, weil wir wissen, dass es 4 Lösungen geben muss)

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{11\pi}{16} \\ \phi_3 &= \frac{19\pi}{16} \\ \phi_4 &= \frac{27\pi}{16} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[8]{18}e^{i\frac{3\pi}{16}} \\ z_2 &= \sqrt[8]{18}e^{i\frac{11\pi}{16}} \\ z_3 &= \sqrt[8]{18}e^{i\frac{19\pi}{16}} \\ z_4 &= \sqrt[8]{18}e^{i\frac{27\pi}{16}} \end{aligned}$$

(e) Wir können die Gleichung umschreiben zu

$$z^4 = -16i = 16(-i) = 16(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = 16e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = r^4 \cdot e^{i4\phi}$$

Wir erhalten also als Betrag $r = 2$. Weiterhin muss gelten, dass

$$\frac{3\pi}{2} = 4\phi$$

. Somit erhalten wir als Winkel $\phi_1 = \frac{3\pi}{8}$. Da die $\exp()$-Funktion im Komplexen 2π-periodisch ist, erhalten wir weiterhin die Lösungen (wir addieren den gefundenen Winkel jeweils mit $\frac{2\pi}{4} = \frac{4\pi}{8}$, durch 4, weil wir wissen, dass es 4 Lösungen geben muss)

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{7\pi}{8}\\ \phi_3 &= \frac{11\pi}{8}\\ \phi_4 &= \frac{15\pi}{8}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$\begin{aligned}z_1 &= 2e^{i\frac{3\pi}{8}}\\ z_2 &= 2e^{i\frac{7\pi}{8}}\\ z_3 &= 2e^{i\frac{11\pi}{8}}\\ z_4 &= 2e^{i\frac{15\pi}{8}}\end{aligned}$$

Aufgabe 11.2.

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$

(a) $|x+9| > |x+8|$

(b) $|x-7| < |x-6|$

(c) $|x+4| \leq |x|$

Lösung zu Aufgabe 11.2.

(a) Wir lösen die Ungleichung erst über $\mathbb{C}$, da sich daraus die Lösung über $\mathbb{R}$ automatisch ergibt. Es gilt mit $x = a + bi$

$$\begin{aligned}|x+9| &> |x+8|\\ \sqrt{(a+9)^2+b^2} &> \sqrt{(a+8)^2+b^2}\\ (a+9)^2 &> (a+8)^2\\ a^2+18a+81 &> a^2+16a+64\\ 2a &> -17\\ a &> \frac{-17}{2}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungsmenge in $\mathbb{C}$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \frac{-17}{2}\right\}.$$

Da die reellen Zahlen nichts anderes sind, als die Komplexen Zahlen eingeschränkt auf die reelle Achse erhalten wir als Lösungsmenge in $\mathbb{R}$

$$\left\{z \in \mathbb{R} : z > \frac{-17}{2}\right\}.$$

(b) Wir lösen die Ungleichung erst über $\mathbb{C}$, da sich daraus die Lösung über $\mathbb{R}$ automatisch ergibt. Es gilt mit $x = a + bi$

$$\begin{aligned}
|x-7| &< |x-6| \\
\sqrt{(a-7)^2+b^2} &< \sqrt{(a-6)^2+b^2} \\
(a-7)^2 &< (a-6)^2 \\
a^2-14a+49 &< a^2-12a+36 \\
13 &< 2a \\
a &> \frac{13}{2}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungsmenge in $\mathbb{C}$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \frac{13}{2}\right\}.$$

Da die reellen Zahlen nichts anderes sind, als die Komplexen Zahlen eingeschränkt auf die reelle Achse erhalten wir als Lösungsmenge in $\mathbb{R}$

$$\left\{z \in \mathbb{R} : z > \frac{13}{2}\right\}.$$

(c) Wir lösen die Ungleichung erst über $\mathbb{C}$, da sich daraus die Lösung über $\mathbb{R}$ automatisch ergibt. Es gilt mit $x = a + bi$

$$\begin{aligned}
|x+4| &\leq |x| \\
\sqrt{(a+4)^2+b^2} &\leq \sqrt{(a)^2+b^2} \\
(a+4)^2 &\leq (a)^2 \\
a^2+8a+16 &\leq a^2 \\
8a &\leq -16 \\
a &\leq -2
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungsmenge in $\mathbb{C}$

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq -2\}.$$

Da die reellen Zahlen nichts anderes sind, als die Komplexen Zahlen eingeschränkt auf die reelle Achse erhalten wir als Lösungsmenge in $\mathbb{R}$

$$\{z \in \mathbb{R} : z \leq -2\}.$$

Aufgabe 11.3.
Lösen Sie die folgenden Gleichungen über $\mathbb{R}$

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{-2x+3} = 0$

(b) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x^2+1} = 0$

(c) $\sqrt{4-x^2} - 2\sqrt{x+1} = 0$

Lösung zu Aufgabe 11.3.

(a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{-2x+3} &= 0 \\ x+1+2x-3 &= 0 \\ 3x-2 &= 0 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Also erhalten wir als Lösung $x = \frac{2}{3}$.

(b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - \sqrt{x^2+1} &= 0 \\ x-4-x^2-1 &= 0 \\ x^2-x+5 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{20}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} \end{aligned}$$

Da im Reellen das Wurzelziehen aus negativen Zahlen nicht möglich ist, entfallen die beiden Lösungen und die obige Gleichung ist somit nicht über $\mathbb{R}$ lösbar.

(c)

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2} - 2\sqrt{x+1} &= 0 \\ 4-x^2-4x-4 &= 0 \\ x^2 &= -4x \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$, wobei die zweite Lösung aufgrund des Definitionsbereiches entfällt.

Aufgabe 11.4.
Berechnen Sie den Limes der folgenden reellen Zahlenfolgen

(a) $a_n = \frac{n^2-2}{n+1} - \frac{3n+1}{3}$

(b) $b_n = \frac{n^3+n}{2n+1} - \frac{n^2+1}{1}$

(c) $c_n = \frac{3n^2-1}{4n-3} - \frac{6n^2-2}{8n-6}$

(d) $d_n = n(\sqrt{4+\frac{1}{n}} + \sqrt{9+\frac{1}{n^2}} - 5)$

(e) $e_n = n(\sqrt{16-\frac{4}{n}} + \sqrt{25-\frac{6}{n}} - 9)$

(f) $f_n = n(\sqrt{36-\frac{7}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}} - 7)$

Lösung zu Aufgabe 11.4.

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2}{n+1} - \frac{3n+1}{3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-2)(3)-(3n+1)(n+1)}{3n+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6-3n^2-3n-n-1}{3n+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-4n-7}{3n+3} = \frac{-4}{3}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{2n+1} - \frac{n^2+1}{1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-(n^2+1)(2n+1)}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-2n^3-n^2-2n-1}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3-n^2-n-1}{2n+1} = -\infty
\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n-3} - \frac{6n^2-2}{8n-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1-3n^2+1}{4n-6} = 0$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4+\frac{1}{n}} + \sqrt{9+\frac{1}{n^2}} - 5) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4+\frac{1}{n}} - 2) + \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{9+\frac{1}{n^2}} - 3) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{4+\frac{1}{n}})^2 - 2^2)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} + \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{9+\frac{1}{n^2}})^2 - 3^2)}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}+3} \\
&= \frac{1}{4} + 0 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{16-\frac{4}{n}}+\sqrt{25-\frac{6}{n}}-9) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{16-\frac{4}{n}}-4)+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{25-\frac{6}{n}}-5) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{16-\frac{4}{n}})^2-4^2)}{\sqrt{16-\frac{4}{n}}+4}+\lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{25-\frac{6}{n}})^2-5^2)}{\sqrt{25-\frac{6}{n}}+5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-4}{\sqrt{16-\frac{4}{n}}+4}+\lim_{n\to\infty} \frac{-6}{\sqrt{25-\frac{6}{n}}+5} \\
&= \frac{-1}{2}-\frac{6}{10} \\
&= \frac{-11}{10}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{36-\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-7) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{36-\frac{7}{n}}-6)+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{36-\frac{7}{n}})^2-6^2)}{\sqrt{36-\frac{7}{n}}+6}+\lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{1-\frac{1}{n}})^2-1^2)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-7}{\sqrt{36-\frac{7}{n}}+6}+\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} \\
&= \frac{-7}{12}-\frac{1}{2} \\
&= -\frac{13}{12}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.5.
Berechnen Sie jeweils den $\limsup$ und $\liminf$ der folgenden Zahlenfolgen

(a) $a_n = (-1)^n(4^n-(-4)^n)$

(b) $b_n = (-1)^{n+1}(4^n-(-4)^{n+1})$

(c) $c_n = \frac{(-3)^n n^2+4n}{5n^2+1}$

(d) $d_n = \frac{5n+1}{3n^2-1}$

(e) $e_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

(f) $f_n = \left(1-\frac{2}{3n}\right)^{3n}$

(g) $g_n = \left(1+\frac{5}{6n}\right)^{5n}$

Lösung zu Aufgabe 11.5.

(a)

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n(4^n-(-4)^n)=\begin{cases}0, & \text{falls n gerade}\\ -\infty, & \text{falls n ungerade}\end{cases}$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}(4^n-(-4)^{n+1})=\begin{cases}-\infty, & \text{falls n gerade}\\ 0, & \text{falls n ungerade}\end{cases}$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n n^2+4n}{5n^2+1}=\begin{cases}\frac{3}{5}, & \text{falls n gerade}\\ -\frac{3}{5}, & \text{falls n ungerade ist}\end{cases}$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{5}, \qquad \liminf_{n\to\infty} c_n = -\frac{3}{5}.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{3n^2-1}=0.$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} d_n = \liminf_{n\to\infty} d_n = 0.$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n=\exp(4).$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} e_n = \liminf_{n\to\infty} e_n = \exp(4).$$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}\\ &= \exp\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\exp\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\exp\left(\frac{-2}{3}\right)\\ &= \exp(-2)\end{aligned}$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = \exp(-2).$$

(g)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{5n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty} \\
&= \exp\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\exp\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\exp\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\exp\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\exp\left(\frac{5}{6}\right) \\
&= \exp\left(\frac{25}{6}\right)
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} g_n = \exp\left(\frac{25}{6}\right).$$

11.2 Probeklausur mit Lösungen

Aufgabe 11.1.
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{(n+1)n}{2}$. $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 11.1.
IA: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^1 1^2 = -1 = (-1)^1 \frac{(1+1)\cdot 1}{2} \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{(n+1)n}{2}$ für ein $n \geq 1$.
IB: zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &\overset{I.V.}{=} (-1)^n \frac{(n+1)(n)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{-(n+1)(n) + (2n+2)(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 11.2.
Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken den Grenzwert
(a) $\frac{3n^2+1}{4n+2} - \frac{6n^2+5}{8n-2}$ (b) $n(\sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{9+\frac{3}{n^2}} - 4)$ $\boxed{\text{6 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 11.2.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{4n+2} - \frac{6n^2+5}{8n-2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+1)(8n-2) - (6n^2+5)(4n+2)}{(4n+2)(8n-2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{24n^3 - 6n^2 + 8n - 2 - 24n^3 - 12n^2 - 20n - 10}{32n^2 - 8n + 16n - 4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{-18 - 12n^{-1} - 12n^{-2}}{32 + 8n^{-1} - 4n^{-2}} \\ &= -\frac{9}{16}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{9+\frac{3}{n^2}}-4) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{5}{n}}-1)+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{9+\frac{3}{n^2}}-3) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{1+\frac{5}{n}})^2-1^2)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}+\lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{9+\frac{3}{n^2}})^2-3^2)}{\sqrt{9+\frac{3}{n^2}}+3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n^2}}+3} \\
&= \frac{5}{2}+0 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3.
Welche der folgenden Reihen konvergiert bzw. divergiert? Handelt es sich bei der Konvergenz um absolute Konvergenz? Beweisen Sie mittels den Ihnen bekannten Konvergenzkriterien für Reihen!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{n^4+3n+5}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{2^k}$ 9 Punkte

Lösung zu Aufgabe 11.3.

(a) Offensichtlich gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Weil $\frac{1}{n}$ eine streng monoton fallende Nullfolge greift das Leibnizkriterium und die Reihe konvergiert. Sie konvergiert nicht absolut, da man, wenn man den Betrag nimmt, gerade die harmonische Reihe hat, von der wir wissen, dass diese divergiert.

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{n^4+3n+5}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn sie hat die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ als Majorante. Dies kann man so sehen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{n^4+3n+5}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+3n+5}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Da die Majorante lauter nicht negativer Glieder hat, konvergiert unsere Reihe nach dem Majorantenkriterium absolut.

(c) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{2^k}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}}=\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k^3}=\frac{1}{2}\frac{(k+1)^3}{k^3}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{2}$$

Da die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergiert, konvergiert sie somit auch absolut.

Aufgabe 11.4.
Lösen Sie die folgende Gleichung über $\mathbb{R}$

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x^2-2} = 0$$

Lösung zu Aufgabe 11.4.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} - \sqrt{x^2-2} &= 0 \\ 2x+3-x^2+2 &= 0 \\ x^2-2x-5 &= 0 \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Also $x = 1+\sqrt{6}$, da die zweite Lösung aufgrund des Definitionsbereiches der obigen Gleichung entfällt.

Aufgabe 11.5.
Lösen Sie die folgenden Gleichungen, wobei $z \in \mathbb{C}$
(a) $z^3 = -i$ (b) $z^3 = 1-i$ 6 Punkte

Lösung zu Aufgabe 11.5.

(a) $z^3 = -i$ ist äquivalent zu

$$r^3 e^{3i\phi} = e^{\frac{3\pi}{2}}.$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\frac{\pi}{2}} \\ z_2 &= e^{\frac{7\pi}{6}} \\ z_3 &= e^{\frac{11\pi}{6}} \end{aligned}$$

(b) $z^3 = 1-i$ ist äquivalent zu

$$r^3 e^{3i\phi} = \sqrt{2} e^{\frac{7\pi}{4}}.$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} e^{\frac{7\pi}{12}} \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} e^{\frac{15\pi}{12}} \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} e^{\frac{23\pi}{12}} \end{aligned}$$

Aufgabe 11.6.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge von

$|x-5| < |x+1|$ $\boxed{\text{4 Punkte}}$

wenn (a) $x \in \mathbb{C}$ und (b) $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Lösungsmenge.

Lösung zu Aufgabe 11.6.
Wir lösen die Gleichung über $\mathbb{C}$. Weil jedes $x \in \mathbb{C}$ die Dartstellung $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, besitzt, folgt

$$\begin{aligned} |x-5| &< |x+1| \\ \sqrt{(a-5)^2+b^2} &< \sqrt{(a+1)^2+b^2} \\ (a-5)^2 &< (a+1)^2 \\ a^2-10a+25 &< a^2+2a+1 \\ 24 &< 12a \\ 2 &< a \end{aligned}$$

Dementsprechend gilt die Gleichung für alle komplexen Zahlen, deren Realteil echt grøßer als 2 ist also

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 2\}.$$

Für die reelle Lösung folgt unmittelbar, dass es für alle

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$$

gilt.

Aufgabe 11.7.
Bestimmen Sie den Limessuperior und den Limesinferior der folgenden Folgen

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (b) $b_n = 7^n - (-7)^n$. $\boxed{\text{4 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 11.7.

(a) Offensichtlich ist a_n eine konvergente Nullfolge, daher gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(b) Offensichtlich gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} 7^n - (-7)^n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 7^n = \infty & \text{,falls n ungerade} \\ 0 & \text{,falls n gerade} \end{cases}$$

Daher gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Aufgabe 11.8.
Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialreihe, bzw. der Geometrischen Reihe die folgenden

Grenzwerte

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-5}{7^n n!}$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{9^n}$ $\boxed{\text{4 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 11.8.

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5}{7^n n!} = -5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{7})^n}{n!} = -5 \exp(\frac{1}{7}).$$

(b) Es gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{9^n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{7}{9}} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}$$

12 Reihen

12.1 Wiederholung - Theorie: Reihen

(a) Zu jeder Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet $S_N := \sum\limits_{k=1}^{N} a_k$ die N**-te Partialsumme** der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Die **Reihe** einer zugehörigen Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist die Folge $\{S_N\}_{N=1}^{\infty} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\right\}_{N=1}^{\infty}$ der N-ten Partialsummen.

(c) Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn für die Folge $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ der Partialsummen eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existiert.

Bezeichnung: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

ACHTUNG: Häufig ist mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auch die Reihe selbst gemeint, unabhängig davon, ob sie konvergent ist oder nicht.

(d) Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(e) Konvergenzkriterien für Reihen:

- **Cauchy'sches Konvergenzkriterium:** Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_\varepsilon$.

- **Majorantenkriterium:** Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

- **Leibnizkriterium:** Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

- **Quotientenkriterium:** Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiterhin gebe es eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

- **Wurzelkriterium:** Sei $0 < q < 1$ eine feste Zahl und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkungen:

a) Das Quotienten- und Wurzelkriterium sind Anwendungen des Majorantenkriteriums.

b) Das CAUCHY'sches Konvergenzkriterium ist außerdem eine **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe.

c) Eine weitere **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, diese Bedingung ist aber nicht hinreichend (Beispiel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist bestimmt divergent gegen ∞).

....

12.2 Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1.

(a) Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ mit Hilfe der Summenschreibweise.

(b) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{k(k+1)}$.

(c) Berechne den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Lösung zu Aufgabe 12.1.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-1)j} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots.$

(b) Der Ansatz $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)}{k(k+1)} + \frac{bk}{b(k+1)} = \frac{(a+b)\cdot k + a\cdot 1}{k(k+1)}$ liefert die beiden Bedingungen $a + b = 0$ und $a = 1$, welche $a = 1$ und $b = -1$ implizieren. Somit lautet die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

(c) Nach (b) ist die N-te Partialsumme dieser Reihe genau

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1},$$

so dass die Folge der Partialsummen gegen die Zahl 1 strebt. Damit ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Aufgabe 12.2.
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-2}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ wobei $a_n := \begin{cases} 2^n & n \equiv 0 \mod 2, \\ 3^n & n \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5n+2}$.

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-a^n), \qquad$ mit $a \in (0,1)$.

Lösung zu Aufgabe 12.2.

(a) Es gilt $\left|\frac{n}{n^3-2}\right| \le \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, und die Reihe $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert (denn man kann zeigen, dass die zugehörige Folge der Partialsummen monoton wachsend ist und nach oben beschränkt bleibt), also konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-2}$.

Bemerke: Mit dem Quotientenkriterium wäre man wegen

$$\frac{\frac{n+1}{(n+1)^3-2}}{\frac{n}{n^3-2}} = \frac{n^4+n^3-2n-2}{n^4+3n^3+3n^2-n} \to 1$$

zu keiner Aussage gelangt.

(b) Es gilt $\frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0 < 1$ für $n \to \infty$, also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

(c) Es gilt $\sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \le \frac{1}{2}$, somit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

(d) Es gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{5n+2}$ eine alternierende Reihe, und da $\frac{1}{5n+1}$ monoton gegen Null konvergiert, liefert das LEIBNIZ-Kriterium die Konvergenz.

(e) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist eine Nullfolge, denn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

und sie ist monoton fallend, denn

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

(f) Die Reihe divergiert, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Somit ist $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ keine Nullfolge, was für die Konvergenz notwendig ist.

(g) Die Reihe divergiert, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty}a^n = 0.$$

Somit ist $(-1)^n(1-a^n)$ keine Nullfolge, was für die Konvergenz notwendig ist.

Aufgabe 12.3.
Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k+1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{7k-4}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} k3^{-k^2}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+(-1)^{k+1}}$

Lösung zu Aufgabe 12.3.

(a) Bei $a_k = \frac{k}{k^2+1}$ handelt es sich wegen

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k^2+1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}}\right) = \frac{0}{0+1} = 0$$

und wegen

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{k+1}{(k+1)^2+1}}{\frac{k}{k^2+1}} = \frac{(k+1)(k^2+1)}{k((k+1)^2+1)} = \frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+2k^2+2k} < \frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+k^2+k+1} = 1$$

um eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniskriterium ist demnach die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k+1}$ konvergent.

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{7k-4}$ divergiert, da

$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k \frac{k}{7k-4} \neq 0$$

und somit das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe verletzt ist.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ konvergiert nach dem Quotienten- und nach dem Wurzelkriterium absolut, denn es gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}}\right| = \frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{k^3+3k^2+3k+1}{k^3}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

bzw.

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} = \sqrt[k]{k^3 2^k} = \frac{1}{2}\left(\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1.$$

(d) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k3^{-k^2}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, dessn es gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{3^{k^2}}} = \left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3^k}\right)\left(\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\right) = 0\cdot 1 = 0 < 1.$$

(e) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+(-1)^{k+1}}$ divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+(-1)^{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \overset{n=k+1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Aufgabe 12.4.
Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad$ mit $a_k = \begin{cases} 3^{-k} & \text{für gerades k} \\ 5^{-k} & \text{für ungerades k} \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 12.4.

(a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4}$ divergiert (bestimmt gegen $+\infty$) nach dem Minorantenkriterium, denn da $\frac{k}{k^2+4} \geq \frac{1}{2k}$ für $k \geq 2$ folgt dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(b) Die Reihe konvergiert (absolut) nach dem Majorantenkriterium, denn für alle $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

und daher ist die konvergente Teleskopreihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} -\frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 \end{aligned}$$

die Majorante.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1}$ konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(d) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{3} < 1$$

Aufgabe 12.5.
Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

Lösung zu Aufgabe 12.5.

(a) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{3^n}{n^4}} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3}$$

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Wobei die letzte Gleichiet unmittelbar aus der Bernoulli-Ungleichung folgt, denn es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n} \cdot n = 2.$$

(c) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n \cdot n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Aufgabe 12.6.
Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ im Fall $|q| = 1$.

Lösung zu Aufgabe 12.6.

(a) Im Fall $q = 1$ enstpricht die N-te Partialsumme genau $\sum\limits_{n=0}^{N} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{N} 1 = N+1$, so dass die Reihe bestimmt divergent gegen ∞ ist.

(b) Im Fall $q = -1$ enstpricht die N-te Partialsumme genau
$\sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots + (-1)^N = \begin{cases} 0 & N \text{ ungerade}, \\ 1 & N \text{ gerade}. \end{cases}$
Demnach ist die Reihe divergent. Außerdem sehen wir, dass für divergente Reihen nicht das Assoziativgesetz gilt, denn klammern wir $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots$, so konvergiert die entstandene Reihe gegen 0. Klammern wir jedoch in der Form $1 + ((-1)+1) + ((-1)+1) + ((-1)+1) + \ldots$, so konvergiert die entstandene Reihe gegen 1.

Aufgabe 12.7.
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen unter Verwendung der der Reihenentwicklung der geometrischen und der Exponentialreihe!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n n!}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$

Lösung zu Aufgabe 12.7.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 2,1933$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 \cdot \exp(2) = 2e^2 \approx 14,7781$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} = 3^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{10}{3}$

Aufgabe 12.8.
Welche der folgenden Reihen sind konvergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000\cdot n+1}$.

Lösung zu Aufgabe 12.8.

(a) Konvergiert nicht, denn $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e(\neq 0)$;

(b) $\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\to 1$, also konvergent;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n}$. Mit $\frac{(n-1)!}{n}\geq 1$ folgt nach dem Minoranten-Kriterium die Divergenz;

(d) $\frac{1}{1000\cdot n+1}\geq\frac{1}{1001n}\Rightarrow$ Divergenz nach Minoranten-Kriterium durch Vergleich mit der harmonischen Reihe.

Aufgabe 12.9.
Bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=4}^{\infty}\frac{4}{k^2+3k+2}$. Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Lösung zu Aufgabe 12.9.
Es war der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2+3k+2}$ zu bestimmen. Wegen $k^2+3k+2=(k+2)(k+1)$ verwenden wir bei der Partialbruchzerlegung den Ansatz $\frac{4}{k^2+3k+2}=\frac{a}{k+2}+\frac{b}{k+1}$, der uns wegen $\frac{4}{k^2+3k+2}=\frac{(a+b)k+(a+2b)}{k^2+3k+2}$ zu den beiden Bedingungen $a+b=0$ und $a+2b=2$ führt. Es folgen $b=-a$ und $a=-(a+2(-a))=-4$. Somit gilt $\frac{4}{k^2+3k+2}=-\frac{4}{k+2}+\frac{4}{k+1}$. Demnach lässt sich die N-te Partialsumme $N\geq 4$ umschreiben zu

$$\begin{aligned}
S_N := \sum_{k=4}^{N}\frac{4}{k^2+3k+2} &= 4\left(-\sum_{k=4}^{N}\frac{1}{k+2}+\sum_{k=4}^{N}\frac{1}{k+1}\right)\\
&= 4\left(-\sum_{k=4}^{N}\frac{1}{k+2}+\sum_{k=3}^{N-1}\frac{1}{k+2}\right)\\
&= 4\left(-\sum_{k=4}^{N-1}\frac{1}{k+2}-\frac{1}{N+2}+\frac{1}{3+2}+\sum_{k=4}^{N-1}\frac{1}{k+2}\right)\\
&= \frac{4}{5}-\frac{4}{N+2}.
\end{aligned}$$

Es gilt offenbar $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{N+2}\right)=\frac{4}{5}$.
Somit ist der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2+3k+2}$ genau $\frac{4}{5}$, das heißt $\sum\limits_{k=4}^{\infty}\frac{4}{k^2+3k+2}=\frac{4}{5}$.

12.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 12.1.
Untersuchen Sie mit Hilfe der Ihnen bekannten Konvergenzkriterien die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{(2n)!}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi)}{n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-2n} n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n}$. .

Lösung zu Aufgabe 12.1.
Es waren die folgenden Reihen $\sum a_n$ auf Konvergenz zu untersuchen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{(2n)!}$ ist (absolut) konvergent nach dem Quotienten-Kriterium mit $q = \frac{1}{2}$, denn

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)}{(2n)!}} \right| \leq \frac{n+1}{2(n+1)(2n+1)} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. Die (sogar absolute) Konvergenz dieser Reihe kann gezeigt werden mittels

<u>Variante 1</u>: Anwendung des Leibniz-Kriteriums wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

<u>Variante 2</u>: Anwendung des Quotientenkriteriums mit $q = \frac{1}{2}$, denn

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n}{n!}} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi)}{n}$.
Wegen $\cos(2n\pi) = (1)$ und erhalten wir gerade die harmonische Reihe und diese divergiert bekanntermaßen.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-2n} n$.
Wegen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{4^{-2(n+1)}(n+1)}{4^{-2n} n}\right| = \frac{1}{16} \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{8} < 1$ (denn es gilt $\frac{n+1}{n} \leq \frac{n+n}{n} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$) ist hier das Quotientenkriterium anwendbar, womit die Reihe (sogar absolut) konvergiert.

(e) Offensichtlich divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$, da bereits das notwendige Kriterium, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$ eine Nullfolge sein muss, verletzt ist.

Aufgabe 12.2.
Bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+5k+6}$. **Hinweis**: Partialbruchzerlegung.

Lösung zu Aufgabe 12.2.
Es war der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+5k+6}$ zu bestimmen. Wegen $k^2+5k+6 = (k+2)(k+3)$ verwenden wir bei der Partialbruchzerlegung den Ansatz $\frac{2}{k^2+5k+6} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3}$, der uns wegen $\frac{2}{k^2+5k+6} = \frac{(a+b)k+(3a+2b)}{k^2+5k+6}$ zu den beiden Bedingungen $a+b=0$ und $3a+2b=2$ führt. Es folgen $b=-a$ und $a = 3a+2(-a) = 2$. Somit gilt $\frac{2}{k^2+5k+6} = \frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+3}$. Demnach lässt sich die N-te Partialsumme umschreiben zu

$$\begin{aligned} S_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^2+5k+6} &= 2\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+3}\right) \\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k+2}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{N+3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{N+3}. \end{aligned}$$

Es gilt offenbar $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{N+3}\right) = \frac{2}{3}$.
Somit ist der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+5k+6}$ genau $\frac{2}{3}$, das heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+5k+6} = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 12.3.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{n^2-3n+1}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\cdot\cos(n)}{3^n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$;

(d) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \ldots$;

(e) $1 + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{3^2}{2^2\cdot 5} + \frac{3^3}{2^3\cdot 7} + \ldots$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$.

Lösung zu Aufgabe 12.3.

(a) Konvergiert nach Leibnitz-Kriterium: Die Glieder der Reihe sind alternierend und $a_n := \frac{n+4}{n^2-3n+1} \to 0$.

(b) Konvergiert nach Majoranten-Kriterium: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \cdot \cos(n)}{3^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} < \infty$, denn mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^4}\right| = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}(<1)$ gilt nach dem Quotienten-kriterium die Konvergenz.

(c) Folgt aus dem Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n^2}\right| \to 0(<1)$.

(d) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n} < \infty$, denn der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern ist immer $\leq \frac{2}{3} < 1$.

(e) Konvergiert nicht, denn $1+\frac{3}{2 \cdot 3}+\frac{3^2}{2^2 \cdot 5}+\frac{3^3}{2^3 \cdot 7}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$ und der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{2}\frac{2n+1}{2n+3} \to \frac{3}{2}(\geq 1)$.

(f) Konvergiert nicht, denn $\frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

Aufgabe 12.4.
Bestimmen Sie mittel geometrischer Reihe und Exponentialreihe die folgenden Grenzwerte

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7+5^k}{k!}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{15+9(-7)^k}{11^k}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{2^{n-1}}$

Lösung zu Aufgabe 12.4.

(a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 9^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k\right) - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{1}{8}$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7+5^k}{k!} = 7\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = 7\exp(1) + \exp(5)$$

(c)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{(k+1)!} = -\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{k!}\right) + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\exp(-8) + \frac{1}{8}$$

(d)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{15+9(-7)^k}{11^k} = 15\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{11^k} + 9\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-7}{11}\right)^k = 15\frac{1}{1-\frac{1}{11}} + \frac{9}{1+\frac{7}{11}} = \frac{33}{2} + \frac{11}{2} = 22$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{2^{n-1}} = \sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{n-1}}{2^{n-1}} = \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

12.4 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 13.1.
Bestimmen Sie genau die $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^{n-1})^n}{n^2} x^n$$
konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 13.1.
Es sei
$$a_n = \frac{(1+(-1)^{n-1})^n}{n^2} |x|^n.$$
Dann definieren wir noch
$$b_n := \sqrt[n]{|a_n|} = (1+(-1)^{n-1}) \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^2}.$$
Wir betrachten
$$(n_k) = (2k)$$
und
$$(m_k) = (2k-1)$$
und die zugehörigen Teilfolgen von (b_n). Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass
$$b_{n_k} = 0$$
und
$$b_{m_k} = 2 \frac{|x|}{(\sqrt[2k-1]{2k-1})^2}.$$
Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, gilt für die Teilfolge $(\sqrt[2k-1]{2k-1})_k$ ebenfalls
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{2k-1} = 1.$$
Darum gilt $\lim_{k\to\infty} b_{m_k} = 2|x|$. Da $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = 0$ und die Behauptung
$$\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$
erfüllt ist, ist $\{0, 2|x|\}$ die Menge der Häufungspunkte und $\limsup_{n\to\infty} b_n = 2|x|$. Nach dem Wurzelkriterium liegt für $|x| < \frac{1}{2}$ absolute Konvegenz der Reihe vor und für $|x| > \frac{1}{2}$ Divergenz.

Es sei $|x| = \frac{1}{2}$. Dann gilt $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ und da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium absolut.

Wir haben also das Ergebnis, dass die Reihe für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ konvergent und für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ divergent ist.

Aufgabe 13.2.
Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$

Lösung zu Aufgabe 13.2.

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{1}{4}\right)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n)!} = 2 \cdot \exp(2)$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} + \frac{3}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{10}{3}$$

Aufgabe 13.3.
Geben Sie das Supremum für die folgenden Mengen an

(a) $A_1 := \left\{\frac{n}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $A_2 := \left\{\frac{n^2}{2^n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$ vergleiche Zusatzaufgabe 3.3 : $n^2 \leq 2^n$ für $n \neq 3$.

(c) $A_3 := \{x \in \mathbb{R} \;:\; x^{16} \leq 16\}$

Lösung zu Aufgabe 13.3.

(a) $\sup A_1 := \sup\left\{\frac{n}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} = 1$.

(b) $\sup A_2 := \sup\left\{\frac{n^2}{2^n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{9}{8}$.

(c) $\sup A_3 := \sup\{x \in \mathbb{R} \;:\; x^{16} \leq 16\} = 16^{\frac{1}{16}}$.

Aufgabe 13.4.
Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}$ gegen eine Zahl kleiner als $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 13.4.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, denn die Folge $a_n = \frac{1}{3n+1}$ ist wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} = 0$$

und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{13n+4}{\frac{1}{3n+1}} = \frac{3n+1}{3n+4} < \frac{3n+4}{3n+4} = 1$$

eine (streng) monoton fallende Nullfolge. Jedoch konvergiert sie nicht absolut, weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{3n+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Weiterhin gilt für den Grenzwert S der Reihe

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{10} + \frac{1}{13}}_{<0} \underbrace{-\frac{1}{14} + \frac{1}{17}}_{<0} \mp \ldots}_{<0}$$

oder etwas formaler

$$(-1)^{2n+1}\frac{1}{3n+1} + (-1)^{2n}\frac{3n+3}{=} - \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+3} = \frac{-2}{(3n+1)(3n+3)} < 0.$$

Aufgabe 13.5.
Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}, \qquad a_1 = 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und (α_k) eine beschränkte Folge, so ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k$ konvergent.

(c) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und (α_k) eine beschränkte Folge, so ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k$ absolut konvergent.

Lösung zu Aufgabe 13.5.

(a) Diese Aussage ist wahr. Offensichtlich ist (a_n) positiv für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin nehmen wir an, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, also existiert ein $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < C$. Dann gilt notwendigerweise, dass

$$a_{n+1} \geq \frac{1}{C}$$

also ist (a_n) keine Nullfolge. Dies ist jedoch das notwendige Kriterium dafür, dass die Reihe konvergiert. Also haben wir einen Widerspruch erzeugt und unsere Annahme war falsch. Daher divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und daraus folgt sofort, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = 0,$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

(b) Diese Aussage ist falsch. Man Nehme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \qquad \text{und} \qquad \alpha_k = (-1)^k.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ zwar nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, jedoch gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^2 k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

(c) Diese Aussage ist wahr. Weil $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < S, S \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist (α_k) beschränkt, also existiert ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha_k \leq M \forall k \in M$. Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \alpha_k| < \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||\alpha_k| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq M \cdot S < \infty.$$

Aufgabe 13.6.
Beweisen oder widerlegen Sie

(a) Ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right).$$

(b) Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = a$$

Lösung zu Aufgabe 13.6.

(a) Diese Aussage ist wahr. Weil (a_n) monoton wachsend ist, gilt

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_0}.$$

Weiterhin ist (a_n) nach dem Satz über monotone Kovergenz konvergent, sei also $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Es folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \leq \frac{1}{a_0} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{a_0}(a - a_0) < \infty.$$

(b) Die Aussage gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|\sum_{k=1}^{n} a_k - a|}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - a\right|}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_k - a\right|}{n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} |a_k - a|}{n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \epsilon}{n} \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon(n - n_0)}{n} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung.

12.5 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 13.1.
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{8}{7}$ absolut konvergiert. Beweisen Sie weiterhin die Abschätzung:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| < 7$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$.

Lösung zu Aufgabe 13.1.
Es gilt stets $|\sin(n)| \leq 1$ und folglich

$$\left|\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| \leq \left(\frac{6+|\sin(n)|}{8}\right)^n |x|^n \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n |x|^n = q^n$$

mit $q = \frac{7}{8}|x|$. Da $|x| < \frac{8}{7}$ ist $|q| < 1$. Darum ist bekanntlich die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

konvergent und nach dem Majorantenkriterium ist darum

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n$$

absolut konvergent.

Alternativ kann auch das Wurzelkriterium herangezogen werden: weil $|x| < \frac{8}{7}$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{6+|\sin(n)|}{8}|x| \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{7}{8}|x| = \frac{7}{8}|x| < 1$$

und darum konvergiert die Reihe absolut.

Sei nun $|x| < 1 < \frac{8}{7}$. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{6+|\sin(n)|}{8}\right)^n |x|^n \leq \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{7}{8}|x|\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}|x|\right)^n = \frac{7}{8}|x|\frac{1}{1-\frac{7}{8}|x|}$$

und deswegen

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| = \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| \leq \frac{7}{8}|x|\frac{1}{1-\frac{7}{8}|x|} < \frac{7}{8}\frac{1}{1-\frac{7}{8}} = 7.$$

Für $|x| = 1$ funktioniert diese Argumentation so nicht mehr, da das letzte $<$ nicht mehr gilt, sondern dort ein $=$ steht.

Betrachten wir daher nun nicht nur den Fall $|x| =$, sondern allgemeiner den Fall $|x| \leq 1 < \frac{8}{7}$, d.h. der obige Spezialfall $|x| < 1$ ist dann dort enthalten und kann entfallen. Es gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| &\leq \frac{6+\sin(1)}{8} + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{6+|\sin(n)|}{8}\right)^n |x|^n \\
&\leq \frac{6+\sin(1)}{8} + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{7}{8}|x|\right)^n \\
&\leq \frac{6+\sin(1)}{8} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{7}{8}|x|\right)^n \\
&= \frac{6+\sin(1)}{8} + \left(\frac{7}{8}|x|\right)^2 \frac{1}{1-\frac{7}{8}|x|} \\
&\leq \frac{6+\sin(1)}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{7}{8}}
\end{aligned}$$

und deshalb

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| \leq \frac{6+\sin(1)}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{7}{8}}.$$

Da $1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, gilt $\sin(1) < 1$ und darum

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| \leq \frac{6+\sin(1)}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{7}{8}} < \frac{7}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{7}{8}} = 7$$

Aufgabe 13.2.
Berechnen Sie die N-te Partialsumme und die Reihensumme (falls diese existiert) der folgenden unendlichen Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-9}$;

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2-1)}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(d) Beweisen Sie, daß für eine Folge $x_n > 0$ die Reihensumme von $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ genau dann existiert, wenn die Folge x_n gegen eine positive Zahl konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 13.2.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)$. Es ergibt sich für die N-te Partialsumme $s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{3}\frac{1}{2(n+1)-3}-\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{3}\frac{1}{2(n-2)+3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2(N+1)-1}-\frac{1}{2(N+2)-1}\right)$. Daher gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}=\lim_{N\to\infty}s_N=\frac{1}{9}$.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n^2-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$. Somit gilt $s_N=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)((n+1)-1)}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{N(N+1)}$ und $\lim_{N\to\infty}s_N=\frac{1}{2}$.

(c) Da $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln(n)$ erhalten wir $s_N=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{N+1}\ln(n)-\sum_{n=1}^{N}\ln(n)=\ln(n+1)$, und es gilt $s_N=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}s_N=\infty$.

(d) Es gilt $s_N=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{N}(\ln(x_n)-\ln(x_{n+1}))=\ln(x_1)-\ln(x_{N+1})$. Daher existiert die Reihensumme genau dann, wenn $\ln(x_n)$ konvergiert, und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn x_n gegen eine positive Zahl konvergiert.

Aufgabe 13.3.
Beweisen oder Wiederlegen Sie:

(a) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$.

(b) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ absolut, dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ konvergent.

(c) Gegeben sei eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ mit $a_k>0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und $\frac{a_{k+1}}{a_k}\geq 1$ für unendlich viele $k\in\mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ nicht konvergent.

Lösung zu Aufgabe 13.3.

(a) Diese Aussage ist falsch. Wir wissen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert, jedoch trifft dies nicht auf die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ zu.

(b) Diese Aussage ist richtig. Sei also die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ absolut konvergent. Dann ist die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ notwendiger Weise eine Nullfolge. Das heißt es existiert ein Index $N(1)\in\mathbb{N}$, so dass $|a_k|<1$ für alle $k\geq N(1)$. Weil $|a_k|<1$ folgt aber unmittelbar, dass dann auch $|a_k^2|<|a_k|<1$ ist. Weiterhin sind aufgrund der Quadrate die a_k^2 nicht negativ, es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=\sum_{k=1}^{N(1)}a_k^2+\sum_{k=N(1)+1}^{\infty}a_k^2\overset{(*)}{\leq}C+\sum_{k=N(1)+1}^{\infty}|a_k|\leq C+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty.$$

Bei (*) wurde benutzt, dass wir nur endlich viele Summanden haben und diese daher durch eine Zahl $C\in\mathbb{R}$ mit $C<\infty$ abschätzen können.

(c) Die Aussage ist falsch. Dazu sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit} \qquad a_k := \begin{cases} 2^{-k}, & \text{k ungerade} \\ 4^{-k}, & \text{k gerade} \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich, dass $a_k > 0$ und

$$\frac{a_{2m+1}}{s_{2m}} = \frac{2^{-(2m+1)}}{4^{-2m}} = \frac{4^{2m}}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2m} \geq 2.$$

Also $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Jedoch ist die Reihe absolut konvergent nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \max\left\{\sqrt[k]{2^{-k}}, \sqrt[k]{4^{-k}}\right\} = \frac{1}{2} < 1.$$

13 Klausur mit Lösungen

Aufgabe 14.4.
Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist. $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 14.4.
IA: $n = 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Sei die Summe dreier aufeinanderfolgender Kuben für ein $n \geq 1$ durch 9 teilbar.
IB: zu zeigen: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ ist durch 9 teilbar.
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (9n^2 + 27n + 27) \\ &= \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{teilb.n.I.V.} + \underbrace{(n^2 + 3n + 3) \cdot 9}_{teilb.d.9}\end{aligned}$$

Aufgabe 14.5.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $\boxed{\text{4 Punkte}}$

$|x + 1| < |x - 7|$

wenn (a) $x \in \mathbb{C}$ und (b) $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie für (a) die Lösungsmenge.

Lösung zu Aufgabe 14.5.
Wir lösen die Gleichung über $\mathbb{C}$. Weil jedes $x \in \mathbb{C}$ die Dartstellung $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, besitzt, folgt

$$\begin{aligned}|x+1| &< |x-7| \\ \sqrt{(a+1)^2 + b^2} &< \sqrt{(a-7)^2 + b^2} \\ (a+1)^2 &< (a-7)^2 \\ a^2 + 2a + 1 &< a^2 - 14a + 49 \\ 16a &< 48 \\ a &< 3\end{aligned}$$

Dementsprechend gilt die Gleichung für alle komplexen Zahlen, deren Realteil echt kleiner als 3 ist also

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 3\}.$$

Für die reelle Lösung folgt unmittelbar, dass es für alle

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$$

gilt.

Aufgabe 14.6.
Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken den Grenzwert $\boxed{\text{6 Punkte}}$

(a) $\frac{5n^2+1}{4n+3} - \frac{5n^3+5n}{4n^2-7}$ (b) $n(\sqrt{1+\frac{7}{n}} + \sqrt{4-\frac{4}{n}} - 3)$

Lösung zu Aufgabe 14.6.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+1}{4n+3} - \frac{5n^3+5n}{4n^2-7}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(5n^2+1)(4n^2-7)-(5n^3+5n)(4n+3)}{(4n+3)(4n^2-7)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{20n^4-35n^2+4n^2-7-20n^4-15n^3-20n^2-15n}{16n^3-28n+12n^2-21} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}\cdot\frac{-15-51n^{-1}-15n^{-2}-7n^{-3}}{16+12n^{-1}-28n^{-2}-21n^{-3}} \\
&= -\frac{15}{16}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{7}{n}} + \sqrt{4-\frac{4}{n}} - 3) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{7}{n}} - 1) + \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4+\frac{4}{n}} - 2) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{1+\frac{7}{n}})^2 - 1^2)}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1} + \lim_{n\to\infty} n\frac{((\sqrt{4-\frac{4}{n}})^2 - 2^2)}{\sqrt{4+\frac{4}{n}}+2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1} + \lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{4-\frac{4}{n}}+2} \\
&= \frac{7}{2} - 1 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.7.
Welche der folgenden Reihen konvergiert bzw. divergiert? Handelt es sich bei der Konvergenz um absolute Konvergenz? Beweisen Sie mittels den Ihnen bekannten Konvergenzkriterien für Reihen!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n^3(1+n)}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n 3^{n+1}}$ $\boxed{\text{9 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 14.7.

(a) Es handelt sich bei $a_n = \frac{1}{2n-1}$ um eine monoton fallende Nullfolge, denn es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+1} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Daher greift das Leibnizkriterium und die Reihe konvergiert. Die Reihe konvergiert nicht absolut, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(b) Diese Reihe konvergiert, denn sie besitzt die konvergente Reihe $3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als Majorante. Dies sieht man so

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3(1+n)}} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3}} < 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da eine konvergente nichtnegative Majorante vorhanden ist, konvergiert die Reihe absolut.

(c) Diese Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n 3^n}$$

und weiterhin

$$\sqrt[n]{\frac{5^n}{2^n 3^n}} = \frac{5}{6} < 1.$$

Weiterhin konvergiert die Reihe absolut, da Konvergenz aufgrund des Wurzelkriteriums vorliegt.

Aufgabe 14.8.

Lösen Sie die folgende Gleichung über $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{3 Punkte}}$

$\sqrt{2x^2+2} - 2\sqrt{2x+7} = 0$

Lösung zu Aufgabe 14.8.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2+2} - 2\sqrt{2x+7} &= 0 \\ 2x^2 + 2 - 8x - 28 &= 0 \\ x^2 - 4x - 13 &= 0 \\ x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{17} & \end{aligned}$$

Also $x_1 = 2 + \sqrt{17}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{17}$. Die anschließende Probe bestätigt, dass es sich wirklich um zwei Lösungen der Ausgangsgleichung handelt.

Aufgabe 14.9.
Lösen Sie die folgenden Gleichungen, wobei $z \in \mathbb{C}$ $\boxed{\text{6 Punkte}}$

(a) $z^5 = 32i$ (b) $z^4 = -2-2i$

Lösung zu Aufgabe 14.9.

(a) Wegen $z^5 = r^5 e^{i5\phi} = 32i$ erhalten wir $r = 2$. Weiterhin muss $e^{i5\phi} = i$ gelten. Wir wissen, dass der Einheitskreis für $\phi = \frac{\pi}{2}$ den Wert i annimmt, denn es gilt $e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = i$. Somit ist die Gleichung für $\phi = \frac{\pi}{10}$ erfüllt ist. Jetzt wissen wir, dass die Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$z_1 = 2e^{\imath\frac{\pi}{10}}, \quad z_2 = 2e^{\imath\frac{5\pi}{10}}, \quad z_3 = 2e^{\imath\frac{9\pi}{10}}, \quad z_4 = 2e^{\imath\frac{13\pi}{10}}, \quad z_5 = 2e^{\imath\frac{17\pi}{10}}$

(b) Wegen $z^4 = r^4 e^{i4\phi} = -2-2i$ erhalten wir $r = \sqrt[8]{8}$. Weiterhin muss $e^{i5\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$ gelten. Wir wissen, dass der Einheitskreis für $\phi = \frac{5\pi}{4}$ den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$ annimmt, denn es gilt $e^{i\frac{5\pi}{4}} = (\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$. Somit ist die Gleichung für $\phi = \frac{5\pi}{16}$ erfüllt ist. Jetzt wissen wir, dass die Lösungen symmetrisch über dem Einheitskreis verteilt sind, dementsprechend erhalten wir als Winkel $\phi \in \left\{\frac{5\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}\right\}$. Die Lösungen lauten daher:

$z_1 = \sqrt[8]{8}e^{\imath\frac{5\pi}{16}}, \quad z_2 = \sqrt[8]{8}e^{\imath\frac{13\pi}{16}}, \quad z_3 = \sqrt[8]{8}e^{\imath\frac{21\pi}{16}}, \quad z_4 = \sqrt[8]{8}e^{\imath\frac{29\pi}{16}}$

Aufgabe 14.10.
Bestimmen Sie den Limessuperior und den Limesinferior der folgenden Folgen $\boxed{\text{4 Punkte}}$

(a) $a_n = (1 - \frac{1}{3n})^{2n}$ (b) $b_n = 4^{-n}(3^n - (-3)^n)$,

Lösung zu Aufgabe 14.10.

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{3n})^{2n} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{3n})^n \cdot (1 - \frac{1}{3n})^n = \exp(-\frac{1}{3}) \cdot \exp(-\frac{1}{3}) = \exp(-\frac{2}{3})$$

Daher gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \exp(-\frac{2}{3}).$$

(b) Offensichtlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} 4^{-n}(3^n - (-3)^n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{-3}{4}\right)^n = 0 + 0 = 0.$$

Daher gilt wieder

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Aufgabe 14.11.
Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialreihe, bzw. der Geometrischen Reihe die folgenden Grenzwerte (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n-1}}$ $\boxed{\text{4 Punkte}}$

Lösung zu Aufgabe 14.11.

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{3})^n}{n!} = 2\exp(\frac{1}{3}).$$

(b) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n-1}} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 12$$

Literaturverzeichnis

[1] Dipl.-Math. Janine Erdmann, Dr. rer. nat. Jochen Merker und Dipl.-Math. Katja Ihsberner *"Analysis 1 - Zusatzaufgaben, Übungsserien"*, Rostock, 2004-2009

[2] H. Wenzel und G. Heinrich *"Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler"*, B. G. Teubner , Stuttgart/Leipzig, 1999

[3] Otto Forster *"Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen"*, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1983

[4] Otto Forster und Rüdiger Wessoly *"Übungsbuch zur Analysis 1"*, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1995

[5] Konrad Königsberger *"Analysis 1"*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004

[6] Harro Heuser *"Lehrbuch der Analysis, Teil 1"*, B. G. Teubner , Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2003

[7] Karl Bosch *"Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung"*, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999