Übungsskript zur Mathematik 1.2 für Lehrämter

Carsten Erdmann

carsten.erdmann@uni-rostock.de

Universität Rostock

3. März 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines zu Funktionen

1.1 Wiederholung - Theorie

- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn für alle $x_1, x_1 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch immer folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$.
- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
- Eine reellwertige Funktion f auf einer Menge X ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet.
- Die Menge X wird auch als Definitionsbereich bezeichnet.
- Die Menge $f(X) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}$ wir auch als Wertebereich bezeichnet.
- Man schreibt auch $f : X \to \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$.
- Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt. Analog für monoton fallend.
- Sei $f : X \to \mathbb{R}$ injektiv. Die Vorschrift f^{-1}, die jedem $y \in f(Y)$ sein Urbild x zuordnet, heißt die Umkehrfunktion zu f.

  $$f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}, f^{-1}(f(x)) = x$$

  Achtung: f^{-1} ist nicht mit dem Reziproken zu verwechseln.
- Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt auf X, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ exisitiert, so dass $|f(x)| < M$ für alle $x \in X$.
- Sei $X \subset \mathbb{R}$, so dass mit $x \in X$ auch $-x \in X$. Dann heißt eine Funktion gerade, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in X$ und ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in X$.
- Die Funktion f heißt Linearkombination der Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ wenn gilt

  $$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)$$

  mit reellen Zahlen $c_1, c_2, ..., c_n$.
- Das Funktionensystem $f_1, f_2, ..., f_n$ heißt linear unabhängig, wenn aus

  $$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n = 0$$

  folgt, dass $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ ist. Andernfalls heißt das Funktionensystem linear abhängig.

. . . .

1.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1.1.
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

(a) $f_1(x) = x^2 \text{ mit } x \in \mathbb{R}_0^+$

(b) $f_2(x) = 3x + 5 \text{ mit } x \in \mathbb{R}$

(c) $f_3(x) = \sqrt[3]{2x - 2}$

(d) $f_4(x) = \ln(x^2 + 1)$

(e) $f_5(x) = a^{x+3}$

(f) $f_6(x) = \exp(3x + 5)$

Lösung zu Aufgabe 1.1.

(a)
$$f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

(b)
$$f_2^{-1}(y) = \frac{y - 5}{3}$$

(c)
$$f_3^{-1}(y) = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} + 1$$

(d)
$$f_4^{-1}(y) = \sqrt{\exp y - 1}$$

(e)
$$f_5^{-1}(y) = \log_a(y) - 3$$

(f)
$$f_6^{-1}(y) = \ln(y)^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}$$

Aufgabe 1.2.
Prüfen Sie welche der folgenden Funktionen ungerade, bzw. gerade sind

(a) $f_1(x) = x$

(b) $f_2(x) = x^2$

(c) $f_3(x) = \exp(|x|)$

(d) $f_4(x) = \log(|x - 1|)$

(e) $f_5(x) = \sqrt{x}$

Lösung zu Aufgabe 1.2.

(a) Offensichtlich gilt, dass $-f_1(x) = -x = f_1(-x)$, daher ist $f_1(x)$ ungerade.

(b) Offensichtlich gilt, dass $f_2(x) = x^2 = f_2(-x)$, daher ist $f_2(x)$ gerade.

(c) Offensichtlich gilt, dass $f_3(x) = \exp(|x|) = f_3(-x)$, daher ist $f_3(x)$ gerade.

(d) Offensichtlich gilt, dass $-f_4(x) = -\log(|x-1|) \neq \log(|-x-1|) = f_(-x)$, und $f_4(x) = \log(|x-1|) \neq \log(|-x-1|) = f_4(-x)$ daher ist $f_4(x)$ weder gerade noch ungerade.

(e) Offensichtlich ist $\sqrt{x}$ nur für nicht negative x definiert, daher kann $\sqrt{x}$ weder gerade noch ungerade sein.

Aufgabe 1.3.
Zerlegen Sie die folgenden Funktionen jeweils in ihren geraden und ungeraden Teil

(a) $f_1(x) = x^2 - 1$

(b) $f_2(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$

(c) $f_3(x) = \exp(x)$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$

Lösung zu Aufgabe 1.3.

(a)
$$f_1^g(x) = x^2 - 1, \qquad f_1^u(x) = 0$$

(b)
$$f_2^g(x) = 2x^2 + 1, \qquad f_2^u(x) = 3x^3 - x$$

(c)
$$f_3^g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad f_3^u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(d)
$$f_4^g(x) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad f_1^u(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Aufgabe 1.4.
Bilden Sie jeweils die gerade und ungerade 2π-periodische Fortsetzung von

(a) $f_1(x) = \sin(x)$

(b) $f_2(x) = \cos(x)$

Lösung zu Aufgabe 1.4.

(a)

$$f_1^g(x) = \begin{cases} \sin(x) & , \text{für } x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi], k = 2n, n \in \mathbb{Z} \\ -\sin(x) & , \text{für } x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi], k = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f_1^u(x) = \sin(x)$$

(b)

$$f_2^g(x) = \cos(x)$$

$$f_2^u(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \text{für } x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi], k = 2n, n \in \mathbb{Z} \\ -\cos(x), & , \text{für } x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi], k = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Aufgabe 1.5.
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$1, 1+x, 1+x^2, x+x^3$$

linear unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 1.5.
Wir zeigen, dass es keine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2) + \alpha_4(x+x^3) \\ 0 &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_2+\alpha_4)x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \end{aligned}$$

gibt. Aus obigen Gleichungen erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0$$

Offensichtlich hat die Matrix vollen Rang (weil Determinante $= 1$) und daher existiert nur die triviale Lösung. Somit sind die Funktionen linear unabhängig.

Aufgabe 1.6.
Gegeben seien die Funktionen

- $f_1(x) = x^2$
- $f_2(x) = \ln(x)$

- $f_3(x) = \sqrt{x}$
- $f_4(x) = x(1-x)$

Berechnen Sie die folgenden Iterierten

(a) $g_1 = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

(b) $g_2 = f_1 \circ f_3 \circ f_4$

(c) $g_3 = f_2 \circ f_4 \circ f_1$

(d) $g_4 = f_3 \circ f_4 \circ f_1$

Bestimmen Sie die Definitions- und Wertebereiche von $g_i, i = 1,2,3,4$ und zeichnen Sie die Funktionen.

Lösung zu Aufgabe 1.6.

(a) $g_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+\,,\ x \mapsto (\ln(\sqrt{x}))^2$

(b) $g_2 : [0,1] \to [0, \frac{1}{4}]\,,\ x \mapsto (1-x)x$

(c) $g_3 : (-1,1) \to (-\infty, \ln(\frac{1}{4}))\,,\ x \mapsto (\ln(x^2(1-x^2)))$

(d) $g_4 : (-1,1) \to [0, \frac{1}{2}]\,,\ x \mapsto \sqrt{x^2(1-x^2)}$

Aufgabe 1.7.
Finden Sie mittels Polynomdivision die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen

(a) $p_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

(b) $p_2(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 36x$

(c) $p_3(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 14x - 5$

Lösung zu Aufgabe 1.7.

(a) $p_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$

(b) $p_2(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 36x = (x-3)(x+3)(x-4)x$

(c) $p_3(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 14x - 5 = (x+1)^3(x-5)$

1.3 Übungsserie mit Lösungen

Aufgabe 1.1.
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x^2 + 6x + 8}, \qquad g(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12}, \qquad h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to -2-} f(x), \quad \lim_{x\to -2+} f(x), \quad \lim_{x\to -2} f(x), \quad \lim_{x\to \infty} f(x), \quad \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 3} f(x), \quad \lim_{x\to 5} f(x),$$

$$\lim_{x\to 3-} g(x), \quad \lim_{x\to 3+} g(x), \quad \lim_{x\to -4-} g(x), \quad \lim_{x\to -4+} g(x), \quad \lim_{x\to -\infty} g(x), \quad \lim_{x\to \infty} g(x), \quad \lim_{x\to 2} g(x),$$

$$\lim_{x\to -1-} h(x), \quad \lim_{x\to -1+} h(x), \quad \lim_{x\to 1-} h(x), \quad \lim_{x\to 1+} h(x), \quad \lim_{x\to -\infty} h(x), \quad \lim_{x\to \infty} h(x), \quad \lim_{x\to 2-} h(x),$$

$$\lim_{x\to 2+} h(x), \quad \lim_{x\to -2-} h(x), \quad \lim_{x\to -2+} h(x).$$

Lösung zu Aufgabe 1.1.
Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x^2 + 6x + 8} = \frac{(x-5)(x+4)}{(x+2)(x+4)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2-} f(x) &= \infty, \\
\lim_{x\to -2+} f(x) &= -\infty, \\
\lim_{x\to -2} f(x) &= \text{not exists}, \\
\lim_{x\to \infty} f(x) &= 1, \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= 1, \\
\lim_{x\to 3} f(x) &= \frac{-14}{35}, \\
\lim_{x\to 5} f(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+4)(x-3)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3-} g(x) &= -\infty, \\
\lim_{x\to 3+} g(x) &= \infty, \\
\lim_{x\to +4-} g(x) &= \frac{6}{7}, \\
\lim_{x\to +4+} g(x) &= \frac{6}{7}, \\
\lim_{x\to -\infty} g(x) &= 1, \\
\lim_{x\to \infty} g(x) &= 1, \\
\lim_{x\to 2} g(x) &= 0
\end{aligned}$$

Es gilt
$$h(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1-} h(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to -1+} h(x) &= \infty,\\
\lim_{x\to 1-} h(x) &= \infty,\\
\lim_{x\to 1+} h(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to -\infty} h(x) &= 1,\\
\lim_{x\to \infty} h(x) &= 1,\\
\lim_{x\to 2-} h(x) &= 0,\\
\lim_{x\to 2+} h(x) &= 0,\\
\lim_{x\to -2-} h(x) &= 0,\\
\lim_{x\to 2-} h(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2.
Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen und zeichnen Sie jeweils die Ausgangsfunktion und die Umkehrfunktion in einem Bild

(a) $f(x) = \ln(3x+5)+2, \qquad x > -\frac{5}{3}$

(b) $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2+2}, \qquad x \geq 0$

Lösung zu Aufgabe 1.2.

(a)
$$f^{-1}(y) = \frac{\exp(y-2)-5}{3}$$

(b)
$$g^{-1}(y) = Arsinh(y)$$

(c)
$$h^{-1}(y) = \sqrt{y^2-2}$$

Aufgabe 1.3.
Zerlegen Sie die folgenden Funktionen jeweils in ihren geraden und ungeraden Teil

(a) $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad x \in (-1,1)$

(b) $g(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \frac{x^2+x}{x^3+1}, \qquad x \neq -1$

Lösung zu Aufgabe 1.3.

(a) $f_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$, $f_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$,

(b) $g_u(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x$, $g_g(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

(c) $h_u(x) = \frac{x^5-x}{x^6-1}$, $h_g(x) = \frac{x^4-x^2}{x^6-1}$.

Aufgabe 1.4.
Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen linear unabhängig sind

$$f_1(x) = 3x^2 + x + 3, \qquad f_2(x) = x^2 - 5x + 5, \qquad f_3(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

Lösung zu Aufgabe 1.4.
Die Funktionenfamilie $f_i, i = 1,2,3$ ist linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\begin{aligned} \alpha_1(3x^2 + x + 3) + \alpha_2(x^2 - 5x + 5) + \alpha_3(2x^2 + 2x + 1) &= 0 \\ (3\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3) + x^2(3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung besitzt. Das zugehörige Gleichungssystem lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

Offensichtlich hat die Matrix keinen vollen Rang (weil Determinante $= 0$). Somit besitzt das obige Gleichungssystem Lösungen, die ungleich der trivialen Lsung (z.B. $\alpha_3 = 4, \alpha_2 = 1, \alpha_1 = -3$) sind und die Funktionen sind somit linear abhängig.

Aufgabe 1.5.
Zeigen Sie direkt mittels Definition des Grenzwertes für Funktionen:

(a) $\lim\limits_{x\to 7} |x-7| = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to 5} x^3 = 125$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x\lfloor \frac{3}{3} \rfloor = 3$

Lösung zu Aufgabe 1.5.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to 7$ für $n \to \infty$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - 7| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Dies bedeutet aber zugleich auch

$$||x_n - 7| - 0| = |x_n - 7| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Somit konvergiert die Folge $(|x_n - 7|)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen Null. Also folgt aus $x_n \to 7$ sogleich auch $|x_n - 7| \to 0$ für $n \to \infty$, wie behauptet.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$, dann gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

$$\lim_{n\to\infty} x_n^3 = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Also folgt aus $x_n \to 5$ auch $x_n^3 \to 125$ für $n \to \infty$, was zu zeigen war.

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ mit $x_n \neq 2$ für alle n. Dann folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^2-4}{x_n-2}\right) = \lim_{n\to\infty} (x_n+2) = 2+2 = 4.$$

Also folgt aus $x_n \to 2$ auch $\frac{x_n^2-4}{x_n-2} \to 4$ für $n \to \infty$, was zu zeigen war.

(d) Wegen der Einschließung

$$\frac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x}$$

gilt für $x > 0$ demzufolge auch die Einschließung

$$3 - |x| = 3 - x < x \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq 3$$

und für $x < 0$

$$3 + |x| = 3 - x > x \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \geq 3.$$

Somit folgt aus $|x| < \epsilon$ schon $|x \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor - 3| < \epsilon$.

2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

2.1 Wiederholung: Theorie - Grenzwert und Stetigkeit

- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ist die symbolische Abkürzung der Aussage, dass für jede gegen den Punkt a konvergente Folge x_n im Definitionsbereich von f die Bildfolge $f(x_n)$ gegen b konvergiert. Den Punkt b nennt man in diesem Fall den Grenzwert von f bei a.

- Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen übertragen sich auf das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen, z.B. gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad ,$$

  falls die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ gilt.

- Eine Funktion f heißt stetig im Punkt a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt, und stetig auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

- Äquivalent zur Stetigkeit von f im Punkt a ist, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, für das aus $|x - a| \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ folgt.

- Während in der vorigen Definition δ sowohl von ϵ als auch von a abhängen darf, verlangt man für die gleichmäßige Stetigkeit von f auf D die Unabhängigkeit des Wertes δ vom Punkt a: Eine Funktion f heißt gleichmäßig stetig auf $D \subset \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, für das aus $|x - y| \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ folgt (gleichgültig, wo $x, y \in D$ liegen).

- Zwischenwertsatz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und liegt y zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

- Satz vom Maximum und Minimum: Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch beschränkt und nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.

- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig.

- Wir sprechen von einer Unstetigkeitsstelle a, falls der rechts- und linksseitige Grenzwert an der Stelle a nicht übereinstimmen oder einer von beiden nicht existiert.

- Eine hebbare Unstetigkeitsstelle liegt vor, wenn die beiden Grenzwert zwar existieren und identisch sind, aber nicht nicht mit dem Funktionswert übereinstimmt.

- Eine Sprungstelle liegt vor, wenn die beiden Grenzwerte zwar existieren, aber nicht identisch sind.

- Ein Pol liegt vor, falls einer der beiden Grenzwerte $\pm\infty$ ist.
- Allgemein spricht auch von unbestimmten Unstetigkeitsstellen, wenn mindestens einer der beiden Grenzwerte nicht existiert.

. . . .

2.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 2.1.

(a) Beweisen Sie mittels der Definition $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4\,.$

(b) Ist $f(x) := \lfloor x \rfloor$ auf $[0,2)$ stetig, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet ?

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{0\neq x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1\,.$

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ und $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}\,.$

Lösung zu Aufgabe 2.1.

(a) Ist x_n eine Folge mit $x_n \to 2$, dann gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen auch $x_n^2 = x_n \cdot x_n \to 2\cdot 2 = 4$. Also folgt aus $x_n \to 2$ auch $x_n^2 \to 4$, was zu zeigen war.

(b) Auf $[0,1)$ ist die Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$ konstant gleich Null, auf $[1,2)$ konstant gleich 1. Sie hat daher einen Sprung im Punkt $x = 1$, denn es gilt $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = 1$ (da f auf $[0,1)$ konstant Null und auf $[1,2)$ konstant Eins ist). Somit ist f im Punkt $x=1$ nicht stetig.

(c) Wegen der Einschließung $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$ gilt für $x > 0$ die Einschließung $1 - |x| = 1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ und für $x < 0$ die Einschließung $1 + |x| = 1 - x > x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1\,.$

Somit folgt aus $|x| < \epsilon$ schon $|x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - 1| < \epsilon$. Also gilt für jede Folge $x_n \neq 0$ mit $x_n \to 0$, daß $x_n \lfloor \frac{1}{x_n} \rfloor$ gegen 1 konvergiert, was zu beweisen war.

(d) Es gilt

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{5}{6}$$

(genauer: die Funktion ist bei $x = 3$ nicht definiert, aber ihr Grenzwert für $x \to 3$ existiert und ist $\frac{5}{6}$) und

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = 0 \quad .$$

Aufgabe 2.2.

(a) Erinnerung an die Vorlesung: Wieso hat jede Polynomfunktion von ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$?

(b) Beweisen Sie, dass die Polynomfunktion $f(x) = x^6 - x^3 + x - 2$ mindestens zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat.

(c) Zeigen Sie: Ist f eine stetige Funktion mit $a < f(a), f(b) < b$, dann hat f einen Fixpunkt $\xi \in (a, b)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel einer injektiven Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ an, die nicht monoton ist.

Lösung zu Aufgabe 2.2.

(a) Ist $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit ungeradem n und $a_n \neq 0$, so gilt bei $a_n > 0$ gerade $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, während bei $a_n < 0$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ gilt. In beiden Fällen wechselt also $f(x)$ in einem genügend großen Intervall $[-K, K]$ das Vorzeichen, und nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher aufgrund der Stetigkeit eine Nullstelle in $[-K, K]$.

(b) Es gilt $f(0) = -2$ und $f(2) = 56$ und $f(-2) = 68$. Nach dem Zwischenwertsatz liegt daher in $]-2, 0[$ eine Nullstelle und in $]0, 2[$ eine weitere Nullstelle.

(c) Betrachte die Funktion $g(x) := f(x) - x$, dann ist g stetig auf $[a, b]$ und erfüllt $g(a) > 0$, $g(b) < 0$, also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$. Solch ein ξ erfüllt aber gerade $f(\xi) = \xi$, ist also ein Fixpunkt von f.

(d) Beispielsweise ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1/2), \\ 3/2 - x & \text{für } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{2.1}$$

injektiv (sogar bijektiv auf $[0, 1]$), aber nicht monoton. Jedoch sind stetige injektive Funktionen auf Intervallen stets monoton.

Aufgabe 2.3.

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} 1 - ax & \text{für } x < 1 \\ a - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ stetig ?

(b) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Lösung zu Aufgabe 2.3.

(a) Es gilt $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} a - x^2 = a - 1$ und $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} 1 - ax = 1 - a$. Die zusammengesetzte Funktion f ist daher genau dann stetig, wenn $a - 1 = 1 - a$ gilt, d.h. wenn $2a = 2$ und somit $a = 1$ ist.

(b) Es gilt

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = x+1-x = 1,$$

also

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$$

und daher

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0.$$

Aufgabe 2.4.

(a) Beweise: Die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ ist auf jedem Intervall $[a, \infty)$, $a > 0$, gleichmäßig stetig, aber auf $(0, \infty)$ nur stetig und nicht gleichmäßig stetig.

(b) Sei f eine gleichmäßig stetige Funktion auf D und x_n eine Cauchy-Folge in D. Zeige, dass die Bildfolge $f(x_n)$ auch eine Cauchy-Folge ist. Gilt dies auch für nur stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktionen?

Lösung zu Aufgabe 2.4.

(a) Für ein beliebiges $a > 0$ gilt

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{1}{xy}\,|x-y| \leq \frac{1}{a^2}\,|x-y| \quad .$$

Ist also $\epsilon > 0$, so gilt mit $\delta := \epsilon a^2$ die Ungleichung $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| < \epsilon$ für alle $x, y \in [a, \infty)$ mit $|x-y| < \delta$, d.h. $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[a, \infty)$ gleichmäßig stetig.

Angenommem, $f(x) = \frac{1}{x}$ sei auf ganz $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig. Dann findet man zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für $x, y > 0$ mit $|x-y| < \delta$, und oBdA darf man $\delta < \frac{1}{\epsilon}$ annehmen (man verkleinere δ einfach entsprechend). Es gilt aber für $x := \frac{\delta}{2}$ und $y := \delta$ zwar $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, jedoch

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\delta} > \epsilon \quad ,$$

und dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Daher ist f nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$, aber immerhin noch stetig, denn gilt für eine Folge $x_n > 0$ die Konvergenz $x_n \to a > 0$, dann auch $\frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{a}$ nach den Rechenregeln für konvergente Folgen.

(b) Ist f gleichmäßig stetig, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle x, y mit $|x-y| < \delta$. Ist nun x_n eine Cauchy-Folge, so gibt es zu δ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \delta$ für alle $n, m > N$. Also gilt $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ für alle $n, m > N$, und da ϵ beliebig war, hat man somit nachgewiesen, dass $f(x_n)$ eine Cauchy-Folge ist.

Für nicht gleichmäßig stetige Funktionen gilt diese Aussage nicht, beispielsweise ist $f(x) = \frac{1}{x}$ nur stetig auf $(0, \infty)$ und bildet die Cauchy-Folge $\frac{1}{n}$ auf die Folge $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ ab, die keine Cauchy-Folge ist - sie ist sogar nicht konvergent.

Aufgabe 2.5.
Intervalle kann man auch folgendermaßen definieren: Eine nichtleere Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass aus $x, z \in I$ und $x < y < z$ schon $y \in I$ folgt, heißt Intervall.

(a) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Intervall ist, wenn $(\inf I, \sup I) \subset I$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass die Intervalle genau die Teilmengen

- (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$,
- $[a, b)$ $(-\infty < a < b \leq \infty)$,
- $(a, b]$ $(-\infty \leq a < b < \infty)$ und
- $[a, b]$ $(-\infty < a \leq b < \infty)$

sind, also die altbekannte Form haben.

Lösung zu Aufgabe 2.5.

(a) Sei I ein Intervall. Gilt $y \in (\inf(I), \sup(I))$, dann gibt es $x, z \in I$ mit $x < y < z$, und daher gilt auch $y \in I$. Also ist $(\inf I, \sup I) \subset I$.

Habe I nun die Eigenschaft, dass $(\inf I, \sup I) \subset I$. Sei $x, z \in I$ und $x < y < z$. Dann gilt $y \in (\inf I, \sup I)$ und daher auch $y \in I$. Also ist I ein Intervall.

(b) Ist $\inf(I) = \sup(I) =: a$, dann ist $I = [a, a] = \{a\}$ ein einelementiges Intervall. Andernfalls ist $\inf(I) < \sup(I)$, und dann muss man nur noch unterscheiden, ob $\inf(I) = -\infty$, $\inf(I) = \min(I)$ oder das Minimum nicht existiert (und analog ob $\sup(I) = +\infty$, $\sup(I) = \max(I)$ oder das Maximum nicht existiert), und dies liefert die verschiedenen Arten von Intervallen.

Aufgabe 2.6.

(a) Man zeichne die Funktionen (natürlich mit MAPLE)

(i) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

(ii) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

(iii) $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x = 0, \quad 2 \quad \text{und} \quad -2 \\ 4 - x^2 & \text{für} \quad 0 < |x| < 2 \\ 4 & \text{für} \quad |x| > 2 \end{cases}$

in geeigneten Intervallen, bestimme ihre Unstetigkeitsstellen und klassifiziere sie.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \\ a & \text{für} \quad x = 3 \\ b & \text{für} \quad x = -3. \end{cases}$$

Kann man die Zahlen a und b so bestimmen, dass $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist?

Lösung zu Aufgabe 2.6.

(a) Offensichtlich ist die Funktion $\sin(\frac{1}{x})$ unstetig an der Stelle $x = 0$. Weder der Grenzwert $\lim_{x\to 0+} \sin(\frac{1}{x})$ noch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} \sin(\frac{1}{x})$ existieren. Daher liegt dort eine unbestimmte Unstetigkeitsstelle vor.

(b) Offensichtlich ist die Funktion $x\sin(\frac{1}{x})$ unstetig an der Stelle $x = 0$. Jedoch stimmen hier links- und rechtsseitiger Grenzwert überein

$$\lim_{x\to 0+} x\sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0-} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Daher handelt es sich hier um eine hebbare Unstetigkeitsstelle.

(c) Offensichtlich hat die Funktion $g(x)$ an den Stellen $x = \pm 2$ und $x = 0$ Unstetigkeitsstellen. Bei $x = 0$ handelt es sich um eine hebbare Unstetigkeitsstelle, denn hier stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert überein ($\lim_{x\to 0} g(x) = 4$). Bei den Stellen $x = \pm 2$ handelt es sich um Sprungstellen, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte zwar jeweils exisitieren, jedoch nicht übereinstimmen.

(d) Zwar gilt

$$\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{(x+3)(x^2+3x-9)}{(x+3)(x-3)}$$

und daher ist $\lim_{x\to -3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \frac{-9}{6}$ jedoch existiert der Grenzwert bei $x = 3$ nicht. Deshalb kann man die Funktion nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Aufgabe 2.7.
(a) Untersuchen sie die Funktion $x^2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.
(b) Zeige, dass die Funktion $\sqrt[3]{x} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.
(c) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ bestimme man α und β so, dass $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \alpha x - \beta\right) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 2.7.

(a) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist stetig auf $[0,\infty)$: Sei x_0 und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$. Für alle $x \in [0,\infty)$ mit $|x + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| \overset{!}{\leq} 1 + 2|x_0|$ und $|x - x_0| \overset{!}{\leq} \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ gilt dann $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ für alle $x \in [0,\infty)$ mit $|x - x_0| < \delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}, 1\right\}$.
$f(x) = x^2$ ist aber nicht gleichmäßig stetig auf $[0,\infty)$: Sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann folgt aus $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y|$ mit $x := \frac{1}{\delta}, y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ zwar $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, jedoch $|x^2 - y^2| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon = 1$.

(b) Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist gleichmäßig stetig: Es gilt $a^K - b^K = [a - b] \cdot [a^{K-1} + a^{K-2}b + ... + ab^{K-2} + b^{K-1}]$. Somit erhalten wir $|x - y| = |f^3(x) - f^3(y)| = |\sqrt[3]{x}^3 - \sqrt[3]{y}^3| =$

$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}|\cdot|\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}^2|$. (*)
(1) Gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)=\sqrt[3]{x}$ auf dem Intervall $[1,\infty)$: Sei $x,y\geq 1$. Dann gilt nach (*) $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}|\leq|x-y|$. Für $\delta<\varepsilon$ folgt die Behauptung.
(2) Gleichmäßige Stetigkeit auf $[0,1]$: Es genügt die Stetigkeit der Funktion zu zeigen, da $[0,1]$ ein kompaktes Intervall ist. Sei nun $x_0\leq 1$. Mit $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|\leq\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x_0}}$ folgt, dass $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|<\varepsilon$ für alle $x\leq 1$ mit $|x-x_0|<\delta:=\varepsilon\sqrt[3]{x_0}$.
$f(x)=\sqrt[3]{x}$ ist aber nicht Lipschitz-stetig: Angenommen $f(x)$ wäre Lipschitz-stetig. Dann existiert ein $L>0$ mit $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}|\leq L|x-y|$ für alle $x,y\in[0,\infty)$. Mit (*) folgt dann für $y=0$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}\leq L$ für alle $x\in[0,\infty)$ $\Rightarrow$ $1\leq\sqrt[3]{x}^2\cdot L$ für alle $x\in[0,\infty)$. Widerspruch!

(c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta\right)\cdot\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)}{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-\alpha^2)x^2+(b-2\alpha\beta)x+c-\beta^2}{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)}=0$ gilt genau dann, wenn $\alpha=\sqrt{a},\beta=\frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Aufgabe 2.8.
Bestimme die Konstanten $a,b\in\mathbb{R}$, bei denen die Funktion

$$f(x):=\begin{cases}ax+bx^2 & \text{falls } x>1 \text{ oder } x<-2\\ |x| & \text{falls } -2\leq x\leq 1\end{cases}$$

stetig wird.

Lösung zu Aufgabe 2.8.
Nur die Punkte $x=1$ und $x=-2$ sind interessant, da die Funktion nahe aller anderen Punkte ein Polynom bzw. die Betragsfunktion ist, und diese Funktionen stetig sind.

Um Stetigkeit auch in den Punkten $x=1$ und $x=-2$ zu erreichen, muss

$$a\cdot 1+b\cdot 1^2=|1|$$

und

$$a\cdot(-2)+b\cdot(-2)^2=|-2|=2$$

gelten. Die Gleichungen $a+b=1$ und $-2a+4b=2$ werden aber gerade von $a=\frac{1}{3}$ und $b=\frac{2}{3}$ gelöst.

Aufgabe 2.9.
Beweise, dass $\sqrt{x}$ gleichmäßig stetig auf $[0,\infty)$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2.9.
Als stetige Funktion ist $f(x):=\sqrt{x}$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig stetig, insbesondere auf $[0,1]$. Aber f ist wegen

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq|\sqrt{x}+\sqrt{y}||\sqrt{x}-\sqrt{y}|=|x-y|$$

für $x,y\geq 1$ auch auf $[1,\infty)$ und somit auf ganz $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 2.10.
Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.10.
Offensichtlich ist die Funktion $f(x)$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definiert und stetig. Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{x-n}$$

für $x \in (n, n+1), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. In den einzelnen offenen Intervallen gilt:

$$f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x-n} - \frac{1}{y-n}| = |\frac{x-y}{(x-n)(y-n)}|.$$

Setze $|x-y| < \frac{|x|}{2}$ und $|x-y| < \frac{\epsilon|x-n|^2}{2}$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

für alle y mit $\delta := \left\{\frac{|x|}{2}, \frac{\epsilon|x-n|^2}{2}\right\}$.

Aufgabe 2.11.

(a) Geben Sie eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche abzählbar unendlich viele Spungstellen besitzt.

(b) Geben Sie eine monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an, welche abzählbar unendlich viele Spungstellen besitzt.

Lösung zu Aufgabe 2.11.

(a) $f(x) := \lfloor x \rfloor$ ist monoton wachsend und besitzt bei jedem $z \in \mathbb{Z}$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe 1.

(b) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \chi_{]a+\frac{b-a}{n+1}, a+\frac{b-a}{n}]}(x)$ mit der Indikatorfunktion $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A \end{cases}$

Aufgabe 2.12.

Die Funktion zack : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\quad \operatorname{zack}(x) = \left| \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - x \right|$.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion zack und beweisen Sie

a) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $\operatorname{zack}(x) = |x|$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\operatorname{zack}(x+n) = \operatorname{zack}(x)$.

c) zack ist stetig.

Lösung zu Aufgabe 2.12.

(a) Für $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ ist $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = 0$ und außerdem $\operatorname{zack}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

(b) Mit $x = \lfloor x \rfloor + \alpha$ $(0 \leq \alpha < 1)$ gilt

$$\operatorname{zack}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \alpha < \frac{1}{2} \\ 1 - \alpha & \text{falls } \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Jetzt folgt die Behauptung aus $x = \lfloor x \rfloor + \alpha \iff x + n = \lfloor x + n \rfloor + \alpha$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und α so, dass $x = \lfloor x \rfloor + \alpha$ erfüllt ist.
Weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und α_n so, dass $x_n = \lfloor x_n \rfloor + \alpha_n$.

- Falls $\alpha < \frac{1}{2}$, so ist $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor x \rfloor$ und $\alpha_n < \frac{1}{2}$ für genügend große n, und folglich $\operatorname{zack}(x) = \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{zack}(x_n)$.
- Falls $\alpha = \frac{1}{2}$, so ist $|\operatorname{zack}(x) - \operatorname{zack}(x_n)| = |\frac{1}{2} - \alpha_n| \to 0$.
- Falls $\alpha > \frac{1}{2}$, so ist $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor x \rfloor$ und $\alpha_n > \frac{1}{2}$ für genügend große n, und folglich $\operatorname{zack}(x) = 1 - \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{zack}(x_n)$.

Aufgabe 2.13.

(a) Zeigen Sie: Die konstanten Funktionen $f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$ sind in $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist in keinem Punkt stetig.

Lösung zu Aufgabe 2.13.

(a) Es ist zu zeigen: Die konstanten Funktionen $f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$ sind in $\mathbb{R}$ stetig.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f_c(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest gewählt und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dann ist die Folge $(f_c(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ identisch mit der konstanten Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$, welche also wegen $|f_c(a_n) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ für alle ε und für alle $n \in \mathbb{N}$ gegen c konvergiert. Da ebenfalls $f(a) = c$ gilt, ist f_c in a stetig. Da $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewesen war, ist f_c in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Es ist zu zeigen: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist in keinem Punkt stetig.

(1) Sei $x \in \mathbb{Q}$ beliebig, aber fest gewählt.

Wir definieren die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$, die wegen $|x_n - x| = |x + \frac{\sqrt{2}}{n} - x| = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$ für alle $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ offenbar gegen x konvergiert und für die offenbar auch $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Daher entspricht die Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ der konstanten Folge $\{1\}_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim\limits_{x_n\to x} f(x_n) = 1$ wegen $|f(x_n) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ für alle ε und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da jedoch $x \in \mathbb{Q}$ war, gilt $f(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x_n\to x} f(x_n)$. Somit ist f in x nicht stetig. Da $x \in \mathbb{Q}$ beliebig gewählt war, ist f in keinem Punkt aus $\mathbb{Q}$ stetig.

(2) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig, aber fest gewählt.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich x für jedes $b \geq 2$ in einen b-adischen Bruch der Form $\operatorname{sign}(x) \sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ entwickeln lässt, insbesondere demnach in einen Dezimalbruch $\operatorname{sign}(x) \sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

Wir betrachten die Folge der Partialsummen $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $S_N := \operatorname{sign}(x) \sum\limits_{n=-k}^{N} a_n 10^{-n}$, die für $N \to \infty$ gegen x konvergieren, denn es gilt:

$$\begin{aligned} |S_N - x| &= \left| \operatorname{sign}(x) \sum_{n=-k}^{N} a_n 10^{-n} - \operatorname{sign}(x) \sum_{n=-k}^{\infty} a_n 10^{-n} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n 10^{-n} \right| \\ &\leq 10^{-(N+1)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &\leq 9 \cdot 10^{-(N+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \cdot 10^{-(N+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-N}. \end{aligned}$$

Für jede Partialsumme gilt offenbar $S_N \in \mathbb{Z}$ oder $(S_N \cdot 10^N) \in \mathbb{Z}$, also insbesondere $S_N \in \mathbb{Q}$. Daher entspricht die Folge $(f(S_N))_{n\in\mathbb{N}}$ der konstanten Nullfolge. Da aber $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, folgt $\lim\limits_{N\to\infty} f(S_N) = 0 \neq 1 = f(x)$, also ist f in x nicht stetig. Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig gewählt war, ist f in keinem Punkt aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig.

(Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, gibt es kein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n = 0$ für alle $n \geq n_0$. Denn gäbe es ein solches, so wäre $x \cdot 10^k$ für $k = \max(0, n_0 - 1)$ eine ganze Zahl und somit $x \in \mathbb{Q}$ — Widerspruch zu $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Daher gilt insbesondere $S_N \neq x$ für alle $N \in \mathbb{N}$.)

Aus (1) und (2) folgt, dass f in keinem Punkt stetig ist.

Aufgabe 2.14.

(a) Finden Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

(b) Finden Sie alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 2.14.

(a) Für $f(x+y) = f(x) + f(y)$ gilt $f(x) = x \cdot f(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(nx) = f\,\underbrace{(x + x + ... + x)}_{n-\text{mal}} = n \cdot f(x)$.
- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt dann auch $nf(\frac{m}{n}) = f(m) = mf(1)$.
- Wegen $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ folgt $f(0) = 0$.
- Wegen $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ folgt $f(-x) = -f(x)$.

Insgesamt gilt daher $f(q) = qf(1)$ für alle rationalen $q \in \mathbb{Q}$.

Die Stetigkeit von f und die Stetigkeit der Multiplikation liefern schließlich die Gültigkeit von $f(x) = xf(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir unterscheiden die beiden Fälle:

- Ist $g(0) = 0$, so gilt $g(x) = g(0 + x) = g(0)g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $g \equiv 0$.
- Ist $g(0) \neq 0$, so ist $g(x) = g(1)^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:
  - Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(nx) = g\,\underbrace{(x + ... + x)}_{n-\text{mal}} = g(x)^n$.
  - Also gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ auch $g(\frac{m}{n})^n = g(m) = g(1)^m$.
  - Wegen $0 \neq g(0) = g(0+0) = g(0)^2$ folgt $g(0) = 1$.
  - Wegen $1 = g(0) = g(x - x) = g(x)g(-x)$ folgt auch $g(-x) = g(x)^{-1}$.

  Insgesamt gilt daher $g(q) = g(1)^q$ für alle rationalen $q \in \mathbb{Q}$.

  Die Stetigkeit von g und die Stetigkeit der allgemeinen Potenz liefern schließlich die Gültigkeit von $g(x) = g(1)^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 2.1.
Gegeben seien die folgenden Funktionen

(a) $f_1(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $f_3(x) = \frac{x^2+6x+8}{x^2-2x-8}$

(d) $f_4(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-x-12}$

(e) $f_5(x) = \sin(\cos(\frac{1}{x}))$

Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktionen, klassifizieren Sie diese und zeichnen Sie die Funktionen

Lösung zu Aufgabe 2.1.

(a) $f_1(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$, daher liegt bei $x = -2$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle vor.

(b) Bei $f_2(x)$ handelt es sich um eine leichte Abwandlung der Dirichlet Funktion, daher handelt es sich um eine Funktion mit unbestimmten Unstetigkeitsstellen. Unstetigkeitsstellen sind dabei alle rationalen Zahlen.

(c) $f_3(x) = \frac{x^2+6x+8}{x^2-2x-8} = \frac{(x+4)(x+2)}{(x-4)(x+2)}$, daher liegt bei $x = -2$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle vor. Bei $x = 4$ ist die Funktion ebenfalls unstetig, hier liegt eine Polstelle vor.

(d) $f_4(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-x-12} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-4)(x+3)}$, daher liegen bei $x = 4$ und $x = -3$ Unstetigkeitstellen vor. Bei den Unstetigkeitsstellen handelt es sich jeweils um Polstellen.

(e) Es ist nur der Punkt $x = 0$ von Interessen, da die Funktion als Komposition stetiger Funktion überall sonst stetig ist. Jedoch existiert der Grenzwert für $x \to 0$ nicht, da die $\cos()$-Funktion für $x \to \pm\infty$ immer im Intervall $[0, 1]$ 'oszilliert'. Hier liegt demnach eine Oszillation vor, also eine unbestimmte Unstetigkeitsstelle.

Aufgabe 2.2.

(a) Zeigen Sie mittels der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = x^3$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie mittels der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 2.2.

(a) Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) Sei $y \neq 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann setze $\delta = \min\left\{1, \frac{|y|}{2}, \frac{\epsilon}{1+2|y|+\frac{7}{2}y^2}\right\}$. An dieser Stelle bemerke man, dass aus $|x-y| < \frac{|y|}{2}$ folgt, dass $|x| \in \left(\frac{|y|}{2}, \frac{3|y|}{2}\right)$. Dann gilt für $|x-y| < \delta$

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |x^3-y^3| \\
&= |x^2+xy+y^2| \cdot |x-y| \\
&< \delta \cdot |x^2-y^2+2y^2+xy| \\
&\leq \delta \cdot \left(|x^2-y^2|+2y^2+|xy|\right) \\
&< \delta \cdot \left(|x-y||x+y|+2y^2+\frac{3|y|}{2}|y|\right) \\
&< \delta \cdot \left(1 \cdot |x-y+2y|+2y^2+\frac{3y^2}{2}\right) \\
&\leq \delta \cdot \left(1 \cdot |x-y|+2|y|+\frac{7y^2}{2}\right) \\
&< \delta \cdot \left(1+2|y|+\frac{7y^2}{2}\right) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

b) Nun sei $y = 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann setze $\delta = \min\{1, \sqrt[3]{\epsilon}\}$. An dieser Stelle bemerke man, dass aus $|x-y| = |x| < \sqrt[3]{\epsilon}$ folgt, dass $|x|^3 < \epsilon$. Dann gilt für $|x-y| < \delta$

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |x^3| \\
&< \left(\sqrt[3]{\epsilon}\right)^3 \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

(b) Setze $\delta := \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \epsilon \cdot \frac{|x_0|^3}{10}\right\}$ für $\epsilon > 0$ beliebig. An dieser Stelle bemerke man, dass aus $|x-y| < \frac{|y|}{2}$ folgt, dass $|x| \in \left(\frac{|x_0|}{2}, \frac{3|x_0|}{2}\right)$. Dann gilt für $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| \\
&= \left|\frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}\right| \\
&= \frac{|x_0 - x| \cdot |x_0 + x|}{x^2 x_0^2} \\
&\leq \delta \frac{|x_0 + x|}{x^2 x_0^2} \\
&\leq \delta \frac{\frac{3|x_0|}{2} + |x_0|}{\frac{x_0^2}{4} x_0^2} \\
&= \delta \frac{10}{|x_0|^3} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.3.
Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Funktionen stetig werden.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{für } x < -2, x > 3 \\ |x|, & \text{für } x \in [-2, 3] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{für } x < -5, x > 8 \\ |x|, & \text{für } x \in [-5, 8] \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 2.3.

(a) Wir erhalten die beiden Gleichungen $4 - 2b + c = 2$ und $9 + 3b + c = 3$. Daraus ergibt sich die Lösung $c = -\frac{18}{5}$ und $b = -\frac{4}{5}$.

(b) Wir erhalten die beiden Gleichungen $25 - 5b + c = 5$ und $64 + 8b + c = 8$. Daraus ergibt sich die Lösung $c = -\frac{440}{13}$ und $b = -\frac{36}{13}$.

Aufgabe 2.4.
Finden Sie mittels Polynomdivision die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen

(a) $p_1(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$

(b) $p_2(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

(c) $p_3(x) = x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40$

Lösung zu Aufgabe 2.4.

(a) $p_1(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$

(b) $p_2(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$

(c) $p_3(x) = (x+5)(x-4)(x+2)(x-1)$

Aufgabe 2.5.
Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^6 - 3x^5 + x^3 - 5x + 3$ mindestens 2 Nullstellen im Intervall $[0;3]$ hat.

Lösung zu Aufgabe 2.5.
Offensichtlich ist $f(x)$ als Polynomfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Nun ist jedoch $f(0) = 3$, $f(1) = -3$ und $f(3) = 15$. Daher existieren nach dem Zwischenwertsatz $\xi \in (0,1)$ und $\zeta \in (1,3)$ mit $f(\zeta) = f(\xi) = 0$.

2.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 2.1.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \ln(x)$ auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 2.1.
Setze $\delta = \min\{1, (e^\epsilon - 1)\}$, dann gilt für $x > y$, dass

$$0 \leq x - y < 1 \Rightarrow x < y + \delta \Rightarrow \frac{x}{y} < 1 + \frac{\delta}{y} \leq 1 + \delta = e^\epsilon$$

und somit auch

$$|\ln x - \ln y| = \ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y} \leq \ln e^\epsilon = \epsilon$$

Aufgabe 2.2.
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen stetig, gleichmäßig steig oder Lipschitz stetig sind.

(a) $f(x) = x\ln(x), x \in [0, 1]$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{x}, x \in [1, \infty)$

(c) $h(x) = |\sin(x)|, x \in \mathbb{R}$

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von $\exp()$.

Lösung zu Aufgabe 2.2.

(a) Offenbar ist $f(x)$ im Punkt $x = 0$ nicht stetig, denn es gilt zwar, dass

$$\lim_{x \to 0+} x\ln(x) = 0,$$

jedoch ist die Funktion im Nullpunkt nicht definiert, da der Logarithmus dort ∞ wird. Daher kann sie auch nicht gleichmäßig steig, bzw. Lipschitz stetig sein.

(b) Offenbar ist $g(x)$ als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig. Jedoch ist $g(x)$ nicht gleichmäßig stetig, da für $x > y > 1$ und $\epsilon = \frac{1}{24}$ gilt

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\frac{e^x}{x} - \frac{e^y}{y}\right| \\
&= \left|\frac{ye^x - xe^y}{xy}\right| \\
&= \left|\frac{(y - x) + \frac{(yx^2 - xy^2)}{2} + \frac{(yx^3 - xy^3)}{6} + \frac{(yx^4 - xy^4)}{24} + \ldots}{xy}\right| \\
&\geq \left|\frac{yx^4 - xy^4}{24xy}\right| \\
&\geq \left|\frac{x^3}{24}\right| \\
&= \frac{1}{24}x^3 > \frac{1}{24} = \epsilon
\end{aligned}$$

Man hätte auch einfacher argumentieren können, denn wir wissen, dass x^2 auf $[1,\infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist. Jedoch gilt, dass

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + ... \geq x^2 \qquad \forall x \in [0,\infty)$$

also kann $\frac{e^x}{x}$ auch nicht gleichmäßig stetig sein.

(c) Offenbar ist $h(x)$ als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig. $h(x)$ ist auch Lipschtizstetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$, da gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\sin(x) - \sin(y)| \\ &\leq 1 \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wonach ein $\xi \in (x,y)$ existiert mit

$$\left|\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}\right| = |\cos(\xi)| \leq 1.$$

Aufgabe 2.3.
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen Lipschitzstetig sind und geben Sie gegebenenfalls die Lipschitzkonstante an.

(a) $f(x) = \sqrt{1+x}, x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}, x \in [1,\infty)$

Lösung zu Aufgabe 2.3.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}| \\ &= \left|\frac{x-y}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-y}}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y| \end{aligned}$$

Also ist die Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{2}$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |\sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1+\sqrt{y}}| \\ &= \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1+\sqrt{y}}}\right| \\ &= \left|\frac{x-y}{(\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1+\sqrt{y}})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x-y| \end{aligned}$$

Also ist die Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{4}$

Aufgabe 2.4.
Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2 \cdot \sin(x) & \text{,falls } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot \sin(x) + b & \text{,falls } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{,falls } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

überall stetig wird?

Lösung zu Aufgabe 2.4.
Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) &= -a + b \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) &= a + b \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}0} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Demnach ergeben sich die Gleichungen $2 = b - a$ und $a + b = 0$. Somit erhalten wir als Lösung $b = 1$ und $a = -1$.

Aufgabe 2.5.
Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = ax + b, \qquad x \in [z_a, z_b].$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.

- Für $a > 0$ wird das gloabele Minimum bei $x = z_a$ und das globale Maximum bei $x = z_b$ angenommen. Das Minimum beträgt logischerweise $f(z_a) = az_a + b$, währenddessen das Maximum durch $f(z_b) = az_b + b$ gegeben ist.
- Für $a < 0$ wird das gloabele Minimum bei $x = z_b$ und das globale Maximum bei $x = z_a$ angenommen. Das Minimum beträgt logischerweise $f(z_b) = az_b + b$, währenddessen das Maximum durch $f(z_a) = az_a + b$ gegeben ist.
- Für $a = 0$ handelt es sich um eine konstante Funktion, demnach wird das Maximum, bzw. Minimum im gesamten Intervall angenommen. Der Wert des Maximums, bzw. Minimums ist dann durch b gegeben.

Aufgabe 2.6.
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(a) Man zeige $0 \leq f(x) \leq 1$ für jedes $x \in [0,1]$, also $f : [0,1] \to [0,1]$.

(b) Man bestimme die Fixpunkte der Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$, d.h. man bestimme die Lösungen der Gleichung $f(x) = x$.

(c) Man berechne die 3. iterierte Funktion $f_3 := f \circ f \circ f$ und zeichne den Graphen von $f_3(x)$.

Lösung zu Aufgabe 2.6.

(a) Für $x \in [0,1]$ gilt $x \geq 0$ und $1 - x \geq 0$ und somit auch $4x(1-x) \geq 0$. Weiterhin gilt, dass

$$4x(1-x) = 4x - 4x^2 = \underbrace{-4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}_{\leq 0} + 1 \leq 1.$$

Somit gilt für alle $x \in [0,1]$ auch $f(x) \in [0,1]$.

(b) Die Fixpunkte von $f : [0,1] \to [0,1]$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$4x(1-x) = x,$$

die in $[0,1]$ liegen. Offensichtlich wird diese Gleichung für $x_1 = 0$ erfüllt. Für die zweite Lösung gilt

$$4(1-x) = 1$$

und somit $x_2 = \frac{3}{4}$. Somit lauten die Fixpunkte von $f : [0,1] \to [0,1]$ $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{3}{4}$.

(c) Für $x \in [0,1]$ ist

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -64x\,(-1+x)\left(1 - 4x + 4x^2\right)\left(1 - 16x + 80x^2 - 128x^3 + 64x^4\right) \\ &= 64x - 1344x^2 + 10752x^3 - 42240x^4 + 90112x^5 - 106496x^6 + 65536x^7 - 16384x^8 \end{aligned}$$

3 Potenzieren und Logarithmieren

3.1 Wiederholung - Logarithmieren und Potenzieren

(a) Die Potenz a^x besitzt die Basis a und den Exponenten x.

a) Für $a \neq 0$ beliebig und $x \in \mathbb{N}$ bedeutet $a^x = a \cdot \ldots \cdot a$ (x Faktoren),

b) Für $a \neq 0$ beliebig und $x \in \mathbb{N}$ bedeutet $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,

c) Für $a > 0$ und $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ sowie $q > 0$ ist $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Weiterhin lassen sich daraus folgende Eigenschaften ableiten:

$$
\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= a^{x+y}, \\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \\
a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x, \\
\frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x, \\
(a^x)^y &= (a^y)^x = a^{x \cdot y}
\end{aligned}
$$

(b) Seien $x > 0, b > 0$, wobei zusätzlich $b \neq 1$ gelte.
Dann ist der Logarithmus $u = \log_b(x)$ von x zur Basis b diejenige Zahl, für die $b^u = x$ gilt.
Eigenschaften:

a) Jede positive Zahl besitzt für jede beliebige positive Basis ihren Logarithmus, ausgenommen zur Basis $b = 1$.

b) Logarithmen einer gemeinsamen Basis b unterliegen den folgenden Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
\log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y), \\
\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y), \\
\log_b x^n &= n \cdot \log_b(x), \\
\log_b \sqrt[n]{x} &= \frac{1}{n} \cdot \log_b(x).
\end{aligned}
$$

c) Wegen $x = a^{\log_a(x)} \Leftrightarrow \log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$ sehen wir, dass Logarithmen verschiedener Basis zueinander proportional sind, so dass sich die Logarithmen zu einer Basis a über die Logarithmen zur Basis b berechnen lassen

d) Spezielle Logarithmen:

$\lg(x) := \log_{10}(x)$ ... dekadische oder BRIGGSsche Logarithmen,

$\ln(x) := \log_e(x)$ ... natürliche oder NEPERsche Logarithmen,

$$\mathrm{lb}(x) := \log_2(x) \qquad \ldots \quad \text{Duallogarithmen.}$$

(c) Mit $e = 2,718281828459\ldots$ gilt $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

. . . .

3.2 Übungsaufgaben und Lösungen

Aufgabe 3.1.
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{(2n-4)}\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{(3n+2)}\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{(2-4n)}$, (b) $\sqrt{4a^2-9b^2}$, (c) $\log(x\sqrt{y+z})$,
(d) $\log_{\frac{1}{p}} p + \log_p \frac{1}{p}$, (e) $\log(p^2+q^2)$.

Lösung zu Aufgabe 3.1.

(a) Nach den Potenzgesetzen und wegen $\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{a}\right)^{(2n-4)}\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{(3n+2)}\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{(2-4n)} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{(2n-4)+(3n+2)+(2-4n)}\\ &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a^{\frac{n}{n}} = a\end{aligned}$$

(b) $\sqrt{4a^2-9b^2}$ lässt sich nicht wirklich vereinfachen, höchstens zu $2|a|\sqrt{1-\frac{9b^2}{4a^2}} = 2|a|\sqrt{1-\left(\frac{3b}{2a}\right)^2}$.

(c) $\log(x\sqrt{y+z}) = \log x + \log\sqrt{y+z} = \log x + \log(y+z)^{\frac{1}{2}} = \log x + \frac{1}{2}\log(y+z)$.

(d) Wegen $y^{-k} = \frac{1}{y^k}$ und $\log_y y = 1$ gilt

$\log_{\frac{1}{p}} p + \log_p \frac{1}{p} = \log_{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p}\right)^{-1} + \log_p p^{-1} = (-1)\cdot\log_{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}\right) + (-1)\cdot\log_p p = -1 + (-1) = -2\,.$

(e) $\log(p^2+q^2)$ lässt sich nicht wirklich vereinfachen, höchstens umformen zu

$$\begin{aligned}\log\left(p^2\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right)\right) &= \log\left(p^2\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\right)\\ &= \log p^2 + \log\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\\ &= 2\log|p| + \log\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 3.2.
Fassen Sie die folgenden Ausdrücke zusammen:

(a) $\frac{1}{3}\log u + \frac{1}{2}\log v + \frac{1}{5}\log w\,,$

(b) $\frac{1}{3}\log(u^2+v^2) - \frac{1}{2}\log(u-v) - \frac{1}{5}\log(u+v)\,.$

Lösung zu Aufgabe 3.2.

(a) $\frac{1}{3}\log u+\frac{1}{2}\log v+\frac{1}{5}\log w \;=\; \log u^{\frac{1}{3}}+\log v^{\frac{1}{2}}+\log w^{\frac{1}{5}} \;=\; \log\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{5}}\right) \;=\; \log\left(\sqrt[3]{u}\sqrt{v}\sqrt[5]{w}\right).$

(b) Nach den Logarithmengesetzen gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\log(u^2+v^2)-\frac{1}{2}\log(u-v)-\frac{1}{5}\log(u+v) &= \log(u^2+v^2)^{\frac{1}{3}}-\log(u-v)^{\frac{1}{2}}-\log(u+v)^{\frac{1}{5}}\\ &= \log\left(\frac{(u^2+v^2)^{\frac{1}{3}}}{(u-v)^{\frac{1}{2}}\cdot(u+v)^{\frac{1}{5}}}\right)\\ &= \log\left(\frac{\sqrt[3]{(u^2+v^2)}}{\sqrt{(u-v)}\cdot\sqrt[5]{(u+v)}}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 3.3.
Lösen Sie nach x auf: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-6} \;=\; \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}.$

Lösung zu Aufgabe 3.3.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-6} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-6} = \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{x-3} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{6-2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-9}$$

Das ist ebenfalls äquivalent zu $6-2x=3x-9$, was die eindeutige Lösung $x=3$ besitzt.

Aufgabe 3.4.
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmengen von

(a) $a^{x+1} \;=\; 1$, wobei $a>0$ sei,

(b) $e^{ax}\leq -1$, wobei a beliebig sei,

Lösung zu Aufgabe 3.4.

(a) Es gilt die Äquivalenz $a^{x+1} \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; (x+1)\ln(a)=0$.

Fall $a\neq 1$: Dann ist $\ln(a)\neq 0$ und $L=\{-1\}$.

Fall $a=1$: Dann ist $\ln(a)=0$ und $L=\mathbb{R}$.

(b) Die Lösungsmenge ist leer, da für die Exponentialfunktion stets $e^x>0$ gilt.

Aufgabe 3.5.
Berechnen Sie ohne Hilfsmittel!

(a) $\log_2 25$

(b) $\lg 0.001$

(c) $\log_{17} 1$

(d) $\log_2(\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{2^3})$

(e) $\ln(e\sqrt[3]{e})$

(f) $\log_8 \frac{1}{\sqrt{8}}$

Lösung zu Aufgabe 3.5.

(a) $\log_2 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$

(b) $\lg 0.001 = \lg 10^{-3} = -3\lg 10 = -3$

(c) $\log_{17} 1 = \log_{17} 17^0 = 0$

(d) $\log_2(\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{2^3}) = \log_2(2^{\frac{14}{15}}) = \frac{14}{15}\log_2 2 = \frac{14}{15}$

(e) $\ln(e\sqrt[3]{e}) = \ln(e^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}\ln(e) = \frac{4}{3}$

(f) $\log_8 \frac{1}{\sqrt{8}} = \log_8(8^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}\log_8 = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 3.6.
Bestimmen Sie über $\mathbb{R}$ die Lösungsmengen von

(a) $\frac{|x^2-1|}{x-2} = x\,.$ (**Hinweis**: Fallunterscheidung notwendig.)

(b) $\frac{1}{12}(\lg(x))^2 \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg(x)\,.$ (**Hinweis**: Substituiere zunächst $y := \lg(x)$).

(c) $5^{\log_3(\log_4(x))} = 1\,.$

(d) $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x}\sqrt{5^x} = 900\,.$

Lösung zu Aufgabe 3.6.

(a) $\frac{|x^2-1|}{x-2} = x$. Zunächst einmal ist der Ausdruck für 2 nicht definiert.

Fall 1: $x^2 - 1 \geq 0\,.$

$$\frac{|x^2-1|}{x-2} = x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-1}{x-2} = x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-1 = x^2-2x \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{2}$$

Da jedoch $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} < 0$, ist die Lösungsmenge in diesem Fall leer.

Fall 2: $x^2 - 1 < 0\,.$

$$\frac{|x^2-1|}{x-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{x-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2 = x^2-2x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Die letzte Gleichung besitzt die Lösungen $x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

Wegen $x_1^2 - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4} - 1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} - \frac{4}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ liegt x_1 **nicht** im Fall 2.

Wegen $x_2^2 - 1 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{4} - 1 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ ist somit x_2 die einzige Lösung, was die folgende Probe bestätigt:

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}\frac{|x_2^2-1|}{x_2-2} &= \frac{|-\frac{\sqrt{3}}{2}|}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}-2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}-4}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-3} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}\cdot\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3} = \frac{-3+3\sqrt{3}}{3-9} \\ &= \frac{3-3\sqrt{3}}{6} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} = x_2\end{aligned}$$

Damit ist $L = \{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$.

(b) $\frac{1}{12}(\lg(x))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg(x)$.

Wir substituieren zunächst einmal $y := \lg(x)$:

$$\frac{1}{12}(\lg(x))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{12}y^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 3y - 4 = 0.$$

Da die letzte Gleichung die Lösungsmenge $L_y = \{-4, 1\}$ besitzt, erhalten wir nun die zwei zu lösenden Gleichungen $\lg(x) = -4$ und $\lg(x) = 1$. Demnach ist $L = \{10^{-4}, 10\}$.

(c) $5^{\log_3(\log_4(x))} = 1$. Es gilt nach den Potenz- und Logarithmengesetzen

$$\begin{aligned} 5^{\log_3(\log_4(x))} &= 1 \quad \Leftrightarrow \\ \log_5\left(5^{\log_3(\log_4(x))}\right) &= \log_5 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ (\log_3(\log_4(x)))\cdot\log_5 5 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \log_3(\log_4(x)) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ 3^{\log_3(\log_4(x))} &= 3^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \\ \log_4(x)) &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4^{\log_4(x))} = 4^1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4. \end{aligned}$$

Zur Erläuterung der einzelnen Schritte:

Von Zeile 1 zu Zeile 2: Logarithmus zur Basis 5 bilden.

Von Zeile 2 zu Zeile 3: Logarithmengesetz $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$ anwenden.

Von Zeile 3 zu Zeile 4: Anwendung von $\log_b b = 1$.

Von Zeile 4 zu Zeile 5: In die Potenz zur Basis 3 heben.

Von Zeile 5 zu Zeile 6: Anwendung von $b^{\log_b a} = a$.

In Zeile 6: In die Potenz zur Basis 4 heben und Anwendung von $b^{\log_b a} = a$.

Probe: $5^{\log_3(\log_4(4))} = 5^{\log_3(1)} = 5^0 = 1. \quad \Rightarrow L = \{4\}.$

(d) $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x}\sqrt{5^x} = 900$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \sqrt{2^x}\sqrt{3^x}\sqrt{5^x} = 900 &\Leftrightarrow (2^x)^{\frac{1}{2}} \cdot (3^x)^{\frac{1}{2}} \cdot (5^x)^{\frac{1}{2}} = 900 \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^{\frac{x}{2}} = 30^{\frac{x}{2}} = 900 \\ &\Leftrightarrow \log_{30} 30^{\frac{x}{2}} = \log_{30} 900 = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot \log_{30} 30 = \frac{x}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4. \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{2^4}\sqrt{3^4}\sqrt{5^4} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900 \quad \Rightarrow L = \{4\}$.

Aufgabe 3.7.
Es seien a, b, c beliebige reelle Zahlen. Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die gilt

(a) $\sqrt{5^x} \cdot \sqrt{3^x} = 225$,

(b) $e^{ax} \geq -1$,

(c) $e^{ax^2+bx+c} \geq 1$,

(d) $e^{5x^2} = \sqrt{e}$,

Lösung zu Aufgabe 3.7.

(a) $\sqrt{5^x} \cdot \sqrt{3^x} = 225$. Dafür formen wir um:

$$\begin{aligned} \sqrt{5^x} \cdot \sqrt{3^x} = 225 \quad \Leftrightarrow \quad (5 \cdot 3)^{\frac{x}{2}} = 15^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \cdot \ln(15) = \ln(15^2) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \ln(15)}{\ln(15)}. \end{aligned}$$

Aus dem letzten Ausdruck erkennt man leicht die Lösungsmenge $L = \{4\}$.

(b) Da die Exponentialfunktion überall oberhalb der x-Achse verläuft ($e^x > 0$ für alle x), sehen wir hier ohne Rechenaufwand, dass $L = \mathbb{R}$.

(c) Nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus, ergibt sich

$$\ln(e^{ax^2+bx+c}) = (ax^2 + bx + c) \cdot \ln(e) = (ax^2 + bx + c) \cdot 1 \geq 0 = \ln(1).$$

Fall $a > 0$: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel.

Fall $\frac{b^2}{4a} \leq c$: Die Parabel besitzt maximal eine Nullstelle $\Rightarrow L = \mathbb{R}$.

Fall $\frac{b^2}{4a} > c$: Die Parabel besitzt zwei Nullstellen bei $\frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$. Demnach haben wir zwei disjunkte Intervalle als Lösungsmenge:

$$L \; = \; \left] -\infty, \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \right] \; \cup \; \left[\frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}, \infty \right[.$$

Fall $a = 0$: Es handelt sich um eine Gerade.

Falls $b = 0, c \geq 0$, folgt $L = \mathbb{R}$.
Falls $b = 0, c < 0$, folgt $L = \emptyset$.
Falls $b > 0$, folgt $L \; = \; \left[-\frac{c}{b}, \infty \right[$.
Falls $b < 0$, folgt $L \; = \; \left] -\infty, -\frac{c}{b} \right]$

Fall $a < 0$: Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Parabel.

Fall $\frac{b^2}{4a} < c$: Es gibt keine Nullstellen $\Rightarrow L = \emptyset$.

Fall $\frac{b^2}{4a} = c$: Die Parabel besitzt genau eine Nullstelle $\Rightarrow L = \{\frac{-b}{2a}\}$.

Fall $\frac{b^2}{4a} > c$: Die Parabel besitzt zwei Nullstellen bei $\frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$. Demnach ist die Lösungsmenge:

$$L \; = \; \left[\frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}, \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \right].$$

(d) Wir können folgendermaßen umformen:

$$e^{5x^2} \; = \; \sqrt{e} \quad \Leftrightarrow \quad e^{5x^2} \; = \; e^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(e^{5x^2}) \; = \; \ln(e^{\frac{1}{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 \; = \; \frac{1}{2}.$$

Aus der letzten Gleichung erkennen wir, dass $L = \{\pm \frac{1}{\sqrt{10}}\}$.

3.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 3.1.
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

(a) $(-(x^2))^3$

(b) $(x^2)^3$

(c) $(-2)^{11}(-\frac{1}{2})^{12}$

(d) $\frac{2}{x^{-1}} + 3x - x^2\frac{3}{x^{-2}}$

(e) $\frac{(p^2+pq)}{(u^2-v^2)^4}\frac{(u-v)^4}{(p^2-q^2)}$

(f) $\frac{2^4x^5y^7z^8}{4x^2y^5z^{10}} \div \frac{2x^2y^5z^8}{5x^4y^3z^5}$

(g) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}$

(h) $\sqrt{x\sqrt[8]{x^3}}$

(i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}$

(j) $\log\sqrt[3]{u^2v^5}$

Lösung zu Aufgabe 3.1.

(a) $(-(x^2))^3 = -x^6$

(b) $(x^2)^3 = x^6$

(c) $(-2)^{11}(-\frac{1}{2})^{12} = -\frac{1}{2}$

(d) $\frac{2}{x^{-1}} + 3x - x^2\frac{3}{x^{-2}} = 2x + 3x - 3x^4 = 5x - 3x^4$

(e) $\frac{(p^2+pq)}{(u^2-v^2)^4}\frac{(u-v)^4}{(p^2-q^2)} = \frac{(p(p+q))}{(u-v)^4(u+v)^4}\frac{(u-v)^4}{((p+q)(p-q))} = \frac{p}{(u+v)^4}\frac{1}{(p-q)}$

(f) $\frac{2^4x^5y^7z^8}{4x^2y^5z^{10}} \div \frac{2x^2y^5z^8}{5x^4y^3z^5} = \frac{2x^3y^2}{y^2z^5} \div \frac{1}{5x^2} = 10x^5z^{-5}$

(g) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[20]{x}$

(h) $\sqrt{x\sqrt[8]{x^3}} = \sqrt[16]{x^{11}}$

(i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\cdot 3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt[3]{3\cdot 3^{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{13}{9}}} = 3^{\frac{13}{27}} = \sqrt[27]{3^{13}}$

(j) $\log\sqrt[3]{u^2v^5} = \log(u^2v^5)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log(u^2v^5) = \frac{1}{3}(\log u^2 + \log v^5) = \frac{1}{3}(2\log u + 5\log v)\,.$

Aufgabe 3.2.
Man bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$
(b) $\frac{1}{12}(\lg x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lg x$
(c) $\frac{1}{2}\lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} = 1$
(d) $5^{\log_3(\log_4 x)} = 1$
(e) $\frac{1}{4}\lg x^5 + 3\lg\sqrt{x} - 3\lg\sqrt[4]{x} \;=\; 2(\lg 2 + \lg 3)$
(f) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} \;=\; \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$
(g) $\frac{1}{2}\lg(3x+7) + \lg(\sqrt{x}-2) \;=\; 1$
(h) $e^{x^2} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Lösung zu Aufgabe 3.2.

(a) Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
\sqrt{2^x}\sqrt{3^x} \;=\; 36 \;\Leftrightarrow\; & (2^x)^{\frac{1}{2}} \cdot (3^x)^{\frac{1}{2}} \;=\; 36 \\
\Leftrightarrow\; & 2^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{x}{2}} \;=\; (2\cdot 3)^{\frac{x}{2}} \;=\; 6^{\frac{x}{2}} \;=\; 36 \\
\Leftrightarrow\; & \log_6 6^{\frac{x}{2}} \;=\; \log_6 36 \;=\; 2 \\
\Leftrightarrow\; & \frac{x}{2}\cdot\log_6 6 \;=\; \frac{x}{2} \;=\; 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = 4.
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u> $\sqrt{2^4}\sqrt{3^4} \;=\; 2^2\cdot 3^2 \;=\; 4\cdot 9 \;=\; 36 \quad \Rightarrow L \;=\; \{4\}$.

(b) Wir substituieren zunächst einmal $y := \lg(x)$:

$$\frac{1}{12}(\lg(x))^2 \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lg(x) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{12}y^2 \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y \quad\Leftrightarrow\quad y^2 + 4y - 4 \;=\; 0.$$

Da die letzte Gleichung die Lösungsmenge $L_y \;=\; \{-2-\sqrt{8}, -2+\sqrt{8}\}$ besitzt, erhalten wir nun die zwei zu lösenden Gleichungen $\lg(x) \;=\; -2-\sqrt{8}$ und $\lg(x) \;=\; -2+\sqrt{8}$. Demnach ist $L \;=\; \{10^{-2-\sqrt{8}}, 10^{-2+\sqrt{8}}\}$.

(c) Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; & \frac{1}{2}\big(\lg(2x-1) + \lg(x-9)\big) \;=\; 1 \\
\Leftrightarrow\; & \lg((2x-1)\cdot(x-9)) \;=\; 2 \\
\Leftrightarrow\; & (2x-1)(x-9) = 10^2 \wedge x > 9 \\
\Leftrightarrow\; & 2x^2 - 19x - 91 = 0 \wedge x > 9 \\
\Leftrightarrow\; & (2x+7)(x-13) = 0 \wedge x > 9.
\end{aligned}$$

Demnach ist die Lösungsmenge $L = \{13\}$.

(d) Es gilt nach den Potenz- und Logarithmengesetzen

$$\begin{aligned}
5^{\log_3(\log_4(x))} \;&=\; 1 \quad\Leftrightarrow \\
\log_5\left(5^{\log_3(\log_4(x))}\right) \;&=\; \log_5 1 \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow \\
(\log_3(\log_4(x)))\cdot\log_5 5 \;&=\; 0 \quad\Leftrightarrow \\
\log_3(\log_4(x)) \;&=\; 0 \quad\Leftrightarrow \\
3^{\log_3(\log_4(x))} \;&=\; 3^0 \;=\; 1 \quad\Leftrightarrow \\
\log_4(x) \;&=\; 1 \quad\Leftrightarrow\quad 4^{\log_4(x)} \;=\; 4^1 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = 4.
\end{aligned}$$

Zur Erläuterung der einzelnen Schritte:

Von Zeile 1 zu Zeile 2: Logarithmus zur Basis 5 bilden.

Von Zeile 2 zu Zeile 3: Logarithmengesetz $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$ anwenden.

Von Zeile 3 zu Zeile 4: Anwendung von $\log_b b = 1$.

Von Zeile 4 zu Zeile 5: In die Potenz zur Basis 3 heben.

Von Zeile 5 zu Zeile 6: Anwendung von $b^{\log_b a} = a$.

In Zeile 6: In die Potenz zur Basis 4 heben und Anwendung von $b^{\log_b a} = a$.

Probe: $5^{\log_3(\log_4(4))} = 5^{\log_3(1)} = 5^0 = 1. \quad \Rightarrow L = \{4\}.$

(e) $\frac{1}{4}\lg x^5 + 3\lg\sqrt{x} - 3\lg\sqrt[4]{x} = 2(\lg 2 + \lg 3)$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\lg x^5 + 3\lg\sqrt{x} - 3\lg\sqrt[4]{x} &= 2(\lg 2 + \lg 3) \quad \Leftrightarrow \\
\frac{5}{4}\lg x + \frac{3}{2}\lg x - \frac{3}{4}\lg x &= 2\lg(2\cdot 3) \quad \Leftrightarrow \\
\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)\lg x &= 2\lg 6 \quad \Leftrightarrow \\
2\lg x &= 2\lg 6 \quad \Leftrightarrow \quad \lg x = \lg 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow L = \{6\}$.

(f) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$.

Da der Hauptnenner $6x^2 - 6 = 6(x^2-1) = 6(x+1)(x-1)$ ist, sind die Ausdrücke für die Menge $\{-1, 1\}$ nicht definiert und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} &= \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{20+x}{2(x-1)} - \frac{9x^2+x+2}{6(x-1)(x+1)} &= \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{(20+x)3(x+1)}{2(x-1)3(x+1)} - \frac{9x^2+x+2}{6(x-1)(x+1)} &= \frac{15-9x}{3(x+1)} - \frac{10-4x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{(20+x)3(x+1)-(9x^2+x+2)}{6(x-1)(x+1)} &= \frac{5-5x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{3(x^2+21x+20)-(9x^2+x+2)}{6(x-1)(x+1)} &= \frac{5-5x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{(3x^2+63x+60)-(9x^2+x+2)}{6(x-1)(x+1)} &= \frac{5-5x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{-6x^2+62x+58}{6(x-1)(x+1)} &= \frac{5-5x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{-3x^2+31x+29}{3(x-1)(x+1)} &= \frac{5-5x}{3(x+1)} \quad \Leftrightarrow \\
-3x^2+31x+29 &= (5-5x)(x-1) \quad \Leftrightarrow \\
-3x^2+31x+29 &= -5x^2+10x-5 \quad \Leftrightarrow \\
2x^2+21x+34 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{21}{2}x+17 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besitzt die Lösungen

$x_{1/2} \;=\; -\frac{21}{4} \pm \sqrt{\frac{(21)^2}{16} - \frac{17\cdot 16}{16}} \;=\; -\frac{21}{4} \pm \sqrt{\frac{441}{16} - \frac{272}{16}} \;=\; -\frac{21}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16}} \;=\; -\frac{21}{4} \pm \frac{13}{4}\,.$

Damit ist die Lösungsmenge $L \;=\; \{-\frac{17}{2}, -2\}\,.$

<u>Probe 1</u>:

$$\frac{20-\frac{17}{2}}{2(-\frac{17}{2})-2} - \frac{9\cdot(-\frac{17}{2})^2+(-\frac{17}{2})+2}{6\cdot(-\frac{17}{2})^2-6} = \frac{5-3(-\frac{17}{2})}{-\frac{17}{2}+1} - \frac{10-4(-\frac{17}{2})}{3(-\frac{17}{2})+3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{23}{2}}{-19} - \frac{\frac{9(17)^2}{4}-\frac{13}{2}}{\frac{3(17)^2}{2}-6} = \frac{\frac{61}{2}}{-\frac{15}{2}} - \frac{44}{-\frac{45}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{23}{38} - \frac{\frac{2575}{2}}{855} = -\frac{61}{15} + \frac{88}{45} \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{207}{342} - \frac{515}{342} = -\frac{183}{45} + \frac{88}{45} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{722}{342} = -\frac{95}{45}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{19}{9} = -\frac{19}{9} \quad \text{w.A.}$$

<u>Probe 2</u>:

$$\frac{20-2}{2(-2)-2} - \frac{9\cdot(-2)^2+(-2)+2}{6\cdot(-2)^2-6} = \frac{5-3(-2)}{-2+1} - \frac{10-4(-2)}{3(-2)+3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{18}{-6} - \frac{36}{24-6} = \frac{11}{-1} - \frac{18}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad -3-2 \;=\; -11+6 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \;=\; -5 \text{ w.A.}$$

(g) Wir formen äquivalent um:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lg(3x+7)+\lg(\sqrt{x-2}) \;=\; 1 \;&\Leftrightarrow\; \lg(3x+7)+\lg(x-2) \;=\; 2\\ &\Leftrightarrow\; \lg(3x+7)+\lg(x-2) \;=\; 2\\ &\Leftrightarrow\; (3x+7)\cdot(x-2) \;=\; 10^2 \wedge x>2\end{aligned}$$

Die im letzten Ausdruck vorkommende Gleichung besitzt die Nullstellen $\{-\frac{19}{3}, 6\}$. Damit ist die Lösungsmenge $L = \{6\}$.

(h) Bei $e^{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ sehen wir, dass die äquivalente Gleichung $x^2 = -\frac{1}{2}$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt. Folglich ist $L = \emptyset$.

Aufgabe 3.3.
Schreiben Sie folgende Terme als Summen (Differenzen) oder als Produkte (Quotienten)!

(a) $\log_3 3x$

(b) $\log_5 \frac{5a}{x}$

(c) $\lg \frac{\sqrt{a}b^2}{\sqrt[4]{c}}$

(d) $\lg \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}$

(e) $\lg \frac{\sqrt[5]{x^2}(\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{u\sqrt{v}}}$

Lösung zu Aufgabe 3.3.

(a) $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$

(b) $\log_5 \frac{5a}{x} = \log_5 5 + \log_5 a - \log_5 x = 1 + \log_5 a - \log_5 x$

(c) $\lg \frac{\sqrt{a}b^2}{\sqrt[4]{c}} = \frac{1}{2}\lg a + 2\lg b - \frac{1}{4}\lg c$

(d) $\lg \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10} = 10\lg(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}) - \lg c$

(e) $\lg \frac{\sqrt[5]{x^2}(\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{u\sqrt{v}}} = \frac{2}{5}\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \frac{1}{2}\lg u - \frac{1}{4}\lg v$

Aufgabe 3.4.
Schreiben Sie folgende Terme mit nur einen Logarithmus!

(a) $2\lg u + 3\lg v$

(b) $\lg(u+v) + \lg(u+v)^2 - \frac{1}{2}\lg u - \frac{1}{3}\lg v$

(c) $\frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3}$

(d) $\lg(a^2 - 1) - \lg(a - 1) - \lg((a + 1)^2)$

(e) $(\log_4 x^2) \div (\log_4 x) - 2$

Lösung zu Aufgabe 3.4.

(a) $2 \lg u + 3 \lg v = \lg u^2 v^3$

(b) $\lg(u + v) + \lg(u + v)^2 - \frac{1}{2} \lg u - \frac{1}{3} \lg v = \lg \frac{(u+v)^3}{u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{3}}}$

(c) $\frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3} = \ln(x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}})$

(d) $\lg(a^2 - 1) - \lg(a - 1) - \lg((a + 1)^2) = \lg \frac{1}{a+1}$

(e) $(\log_4 x^2) \div (\log_4 x) - 2 = 0$

4 Differenzierbarkeit

4.1 Wiederholung - Theorie Differentierbarkeit

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt im Punkt $a \in D$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert
$$f'(a) := \lim_{x \to a; x \in D \setminus \{x\}} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$
existiert, d.h. der Limes des Differenzenquotienten. Der Grenzwert $f'(a)$ heißt die **Ableitung** von f im Punkt a.

  Man kann die Ableitung äquivalenterweise auch durch
$$f'(a) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
definieren.

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt in D **differenzierbar**, falls f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist.

- Ob die auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f Werte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat, macht beim Ableiten keinen Unterschied: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ und $f(x) = u(x) + iv(x)$ eine Zerelgung in Realteil $u : D \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v : D \to \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

- Ist darüberhinaus die Ableitung $f' : x \mapsto f'(x)$ eine stetige Funktion, so nennt man f stetig differenzierbar.

- Eine Funktion f heißt k-mal (stetig) differenzierbar, wenn f' existiert und $(k-1)$-mal (stetig) differenzierbar ist.

- Für differenzierbare Funktionen f, g gelten vielfältige Rechenregeln, unter anderem die Linearität $(af + bg)' = af' + bg'$ (für $a, b \in \mathbb{R}$), die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$, die Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$ (dort, wo $g \neq 0$) und die Kettenregel $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (bei $f(x)$ im Definitionsbereich von g).

- Ist f differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und hat f nahe x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

- Man sagt, in x liegt ein lokales Maximum, wenn $f(y) \leq f(x)$ für alle y aus einer Umgebung U von x gilt (analog: lokales Minimum).

- Liegt in x ein lokales Maximum / Minimum der differenzierbaren Funktion f, dann gilt $f'(x) = 0$.

- $f' \geq 0$ ist äquivalent dazu, daß f monoton wächst, und analog ist $f' \leq 0$ äquivalent dazu, daß f monoton fällt.

- Insbesondere: Ist f differenzierbar und gilt neben $f'(x) = 0$ auch noch $f' \leq 0$ links von x und $f' \geq 0$ rechts von x, so liegt in x ein lokales Minimum vor (analog für Maxima). Hinreichend für ein lokales Minimum in x ist bei zweimal stetig differenzierbarem f außerdem $f''(x) > 0$ (anlog $f''(x) < 0$ für Maxima).

Differenzierbarkeit

- Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$) heißt im Punkt $a \in \mathbb{D}$ **differenzierbar**, falls der Limes des Differenzenquotienten existiert, d.h. der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{D}\setminus\{x\}}} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \qquad \text{bzw.} \qquad f'(a) \; = \; \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad .$$

Der Grenzwert $f'(a)$ heißt die **Ableitung** von f im Punkt a.

Lokale Extrema, Satz von Rolle, Mittelwertsatz

- Man sagt, in x liegt ein **lokales Maximum**, wenn $f(y) \leq f(x)$ für alle y aus einer Umgebung U von x gilt (analog: **lokales Minimum**).
- **Notwendige Bedingung für lokale Extrema**: Liegt in x ein lokales Maximum/Minimum der differenzierbaren Funktion f, dann gilt $f'(x) = 0$. (vgl. Forster §16 Satz 1)
- Satz von Rolle: (vgl. Forster §16 Satz 2)

  Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

  - Folgerung (Mittelwertsatz):

    Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

- Das Monotonieverhalten wird durch die Ableitung bestimmt: (vgl. Forster §16 Satz 4)
  - $f' \geq 0$ ist äquivalent dazu, dass f monoton wächst
  - $f' \leq 0$ äquivalent dazu, dass f monoton fällt.
- **Hinreichende Bedingung für lokale Extrema**: (vgl. Forster §16 Satz 5)
  - Ist $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$, so besitzt f ein lokales Minimum in $x \in]a, b[$, falls außerdem $f''(x) > 0$ (anlog $f''(x) < 0$ für Maxima).
  - Ist $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt neben $f'(x) = 0$ auch noch $f' \leq 0$ links von x und $f' \geq 0$ rechts von x, so liegt in x ein lokales Minimum vor (analog für Maxima).

Konvexität

- Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D} \, \forall \lambda \in \mathbb{R} \; \Big(0 < \lambda < 1 \implies f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \; \leq \; \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \Big) \; .$$

f heißt **konkav**, falls $-f$ konvex.

- Satz: (vgl. Forster §16 Satz 6)
  Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt
  $$f \text{ konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{D} \ : \ f''(x) \geq 0$$

BERNOULLI- L'HOSPITALsche Regel

- Seien $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) zwei differenzierbare Funktionen. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$, und es gelte $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to b} g(x)$ (bzw. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to b} g(x)$). Existiert $\lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (auch als uneigentlicher Grenzwert), so gilt
  $$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ = \ \lambda \ = \ \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \quad .$$
  (Eine entsprechende Aussage gilt für $x \to a$.)

Fixpunktsatz

- Sei $\mathbb{D} \subset$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Es gebe ein $q < 1$, so dass $|f'(x)| \leq q$ für alle $x \in \mathbb{D}$. Sei $x_0 \in \mathbb{D}$ beliebig und $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die eindeutige Lösung $\xi \in \mathbb{D}$ der Gleichung $f(\xi) = \xi$. Es gilt die Fehlerabschätzung
  $$|\xi - x_n| \ \leq \ \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \ \leq \ \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \quad .$$

. . . .

Aufgabe 4.1.
Überprüfen Sie mittels der Definition, ob die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = 1/x$

(c) $s(x) = |x|$

Lösung zu Aufgabe 4.1.

(a) Es gilt
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = 2x$$
also ist f differenzierbar in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x) = 2x$.

(b) Es gilt
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$
also ist g differenzierbar in jedem Punkt $x \neq 0$ mit Ableitung $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

(c) Da s mit x oder $-x$ in der Nähe jedes Punktes $x \neq 0$ übereinstimmt, ist s in jedem Punkt $x \neq 0$ differenzierbar. Jedoch ist s nicht im Punkt 0 differenzierbar, da $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h}$ nicht existiert, denn $\frac{|h|}{h} = \pm 1$, je nachdem ob h positiv oder negativ war.

Aufgabe 4.2.
Bestimme die Ableitung und den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) a^x bei gegebenem $a > 0$.

(b) $x^2 \sinh(x)$

(c) $\tan(x)$

(d) $\exp(\tan(x)) \cos^2(x)$

Lösung zu Aufgabe 4.2.

(a) $a^x = e^{x\ln(a)}$ und daher $(a^x)' = e^{x\ln(a)} \ln(a) = \ln(a)a^x$. Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(b) Zunächst gilt $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und daher $\sinh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$. Aus der Produktregel folgt damit

$$\big(x^2 \sinh(x)\big)' = 2x \sinh(x) + x^2 \cosh(x) \quad .$$

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(c)

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

und der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

(d)

$$\big(\exp(\tan(x))\cos^2(x)\big)' = \exp(\tan(x))\frac{1}{\cos^2(x)}\cos^2(x) - \exp(\tan(x))2\cos(x)\sin(x) = \exp(\tan(x))\,(1 - 2\cos(x)\sin(x))$$

und der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 4.3.

(a) Bestimme die Ableitung von $\ln(x)$ und $\arctan(x)$ mittels des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

(b) Verallgemeinerung des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion: Berechne die Ableitung der Lösung $\phi(x)$ der Gleichung $f(\phi) = g(x)$.

(c) Nutze dies, um die Ableitung von $x^{1/k}$ und der reellen Lösung ϕ von $\phi^3 = \sinh(x)$ zu bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 4.3.

(a) $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu e^x und es gilt $(e^x)' = e^x$, also

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y} \quad .$$

$\arctan(x)$ ist die Umkehrfunktion zu $\tan(x)$ und es gilt $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$, also

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2} \quad .$$

(b) Ableiten der Gleichung $f(\phi(x)) = g(x)$ auf beiden Seiten liefert $f'(\phi(x))\phi'(x) = g'(x)$ und daher $\phi'(x) = \frac{g'(x)}{f'(\phi(x))}$.

Bei $g(x) = x$ ergibt sich genau die Ableitung der Umkehrfunktion ϕ von f.

(c) $\phi(x) = x^{1/k}$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $\phi^k = x$, also ergibt sich mit $f(\phi) = \phi^k$ und $g(x) = x$ aus der vorigen Aufgabe

$$\phi'(x) = \frac{1}{k\phi^{k-1}(x)} = \frac{\phi(x)}{k\phi^k(x)} = \frac{x^{1/k}}{kx} = \frac{1}{kx^{(k-1)/k}}$$

Achtung: Die Funktion $\phi(x)$ ist nur differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$, nicht aber in 0.

Aus $3\phi^2(x)\phi'(x) = \cosh(x)$ erhält man $\phi'(x) = \frac{\cosh(x)}{3\phi^2} = \frac{1}{3}\coth(x)\phi(x)$.

Aufgabe 4.4.

(a) Zeige, daß eine differenzierbare positive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ genau dann ein lokales Maximum/Minimum in x besitzt, wenn $\ln \circ f$ ein lokales Maximum/Minimum in x besitzt.

(b) Berechne die lokalen Extrema von $f(x) := \frac{e^{x^2-2x-1}}{x^4}$ einerseits direkt und andererseits durch logarithmisches Ableiten.

(c) Bestimme zu gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ die Zahl x, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen $a_1 - x, \ldots, a_n - x$ minimal ist.

Lösung zu Aufgabe 4.4.

(a) Wegen $f(x) > 0$ gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $L(f)(x) := (\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$ gilt. Außerdem hat $\ln \circ f$ wegen des strengen monotonen Wachsens von ln dasselbe Monotonieverhalten wie f, so dass lokale Maxima/Minima fon f auch lokale Maxima/Minima von $\ln \circ f$ sind.

Auch das hinreichende Kriterium gilt genau dann für f, wenn es für $\ln \circ f$ gilt: Ist $\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$, so hat $\left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{ff''-f'f'}{f^2}$ in x den Wert $\frac{f''(x)}{f(x)}$, der wegen $f > 0$ dasselbe Vorzeichen wie $f''(x)$ hat.

(b) Direkt ergibt sich $f'(x) = e^{x^2-2x-1}\frac{x^4(2x-2)-4x^3}{x^8}$, und daher verschwindet f' in den Punkten mit $2x^2 - 2x - 4 = 0$, d.h. in $x = -1$ und $x = 2$. Die zweite Ableitung zu berechnen ist noch langwieriger, sie ergibt aber, dass beide Punkte lokale Minima sind.

Logarithmisches Ableiten ist da wesentlich einfacher: Die Funktion ist offensichtlich in allen Punkten $x \neq 0$ definiert und positiv. Logarithmisches Ableiten liefert wegen $g(x) := \ln(f(x)) = -4\ln(x) + x^2 - 2x - 1$ und $g'(x) = -4/x + 2x - 2 = 0$, d.h. $x^2 - x - 2 = 0$, als Kandidaten für Extrema die Punkte $x = -1$ und $x = 2$. Wegen $g''(x) = 4/x^2 + 2 > 0$ sind beides lokale Minima.

(c) Die Funktion $f(x) := (x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$ hat die Ableitung $f'(x) = 2(x-a_1) + \cdots + 2(x-a_n)$. Diese wird Null genau bei $nx = a_1 + \cdots + a_n$ bzw. $x = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, d.h. beim arithmetischen Mittel. Tatsächlich ist dieses eine Minimalstelle, denn $f''(x) = 2n$ ist positiv.

Aufgabe 4.5.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = f(x) = x^2$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

(b) Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes P ist.

(c) Vom Punkt $P(x_0, y_0)$ eines Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ wird das Lot auf die Abszissenachse gefällt; der Fußpunkt sei L. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt P schneide die Abszissenachse in T. Zeigen Sie, dass $\overline{TL} = 1$ für jeden Punkt P gilt.

Aufgabe 4.6.

Es seien I und J Intevalle, $f : I \to J$ konvex und $g : J \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvex. Zeigen Sie, dass auch die Funktion $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Lösung zu Aufgabe 4.6.

Wir haben zu zeigen, dass für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\lambda \in]0,1[$ die Ungleichung

$$g \circ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g \circ f(x_1) + (1-\lambda) g \circ f(x_2)$$

gilt. Es seien nun $x_1, x_2 \in I$ beliebig und $\lambda \in]0,1[$ beliebig. Es folgt nun nacheinander aus der Konvexität von f, der Monotonie von g und der Konvexität von g

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= g\Big(\overbrace{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}^{\overset{\text{f konvex}}{\leq} \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)} \Big) \overset{\substack{\text{g monoton}\\ \text{wachsend}}}{\leq} g\Big(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\Big) \\ &\overset{\text{g konvex}}{\leq} \lambda g(f(x_1)) + (1-\lambda) g(f(x_2)) \\ &= \lambda g \circ f(x_1) + (1-\lambda) g \circ f(x_2) \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 4.7.

(a) Berechnen Sie nach geeigneter Umformung mit der Regel von L'Hospital (Bernoulli-L'Hospital)

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln(x),\quad \lim_{x\searrow 0} x^x,\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan(x),\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \text{ für } a\in\mathbb{R}.$$

(b) Ist die durch $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ für $x\neq 0$ und $f(0) := 1$ definierte Funktion f differenzierbar im Nullpunkt?

Lösung zu Aufgabe 4.7.

(a) Wegen $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x} = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow 0}(-\ln(x)) = \infty$ folgt nach Anwendung der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln(x) = -\lim_{x\searrow 0}\frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Regel von L'Hospital}}{=} -\lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\searrow 0} x = 0 .$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt nun sofort

$$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0}\exp\left(\ln\left(x^x\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\searrow 0}\left(x\ln\left(x\right)\right)\right) = \exp(0) = 1 .$$

Durch zweimalige Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

wegen $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(2\cos(x)-x\sin(x)) = 2$.

Wiederum durch Anwenden der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cot(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\frac{1}{(\sin(x))^2}} = \frac{-2}{-1} = 2 .$$

Es gilt zunächst $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ und

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\ln(1+t\cdot a) = \ln(1+0\cdot a) = \ln(1) = 0$$

ist die Regel von L'Hospital anwendbar, so dass aufgrund von

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Regel von L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot a\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = a$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

(b) Da mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h)}{h}-1}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-h}{h^2} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{2h} \;=\; \frac{-\sin(0)}{2}$$

folgt, ist f differenzierbar im Nullpunkt mit Ableitung 0.

Aufgabe 4.8.

Beweisen Sie den Fixpunktsatz.

Lösung zu Aufgabe 4.8.

- **Konvergenz**: Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir $|f(x)-f(y)| \;\le\; q|x-y|$ für alle $x,y\in\mathbb{D}$. Daraus folgt nun insbesondere

$$|x_{n+1}-x_n| \;\le\; |f(x_n)-f(x_{n-1})| \;\le\; q|x_n-x_{n-1}|$$

  und durch Induktion über n somit $\quad |x_{n+1}-x_n| \;\le\; q^n|x_1-x_0| \quad$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
  Da $\quad x_{n+1} \;=\; x_0 + \sum\limits_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k) \quad$ und die Reihe $\quad \sum\limits_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k) \quad$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert, existiert $\quad \xi := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
  Aus der Abgeschlossenheit von $\mathbb{D}$ folgt, dass auch $\xi\in\mathbb{D}$ und $\xi=f(\xi)$ erfüllt.

- **Eindeutigkeit**:
  Sei $\nu\in\mathbb{D}$ eine weitere Lösung von $\nu=f(\nu)$, so gilt $\quad |\xi-\nu| \;=\; |f(\xi)-f(\nu)| \le q|\xi-\nu|$. Wegen $q<1$ folgt somit $|\xi-\nu|$, also $\xi=\nu$.

- **Fehlerabschätzung**:
  Aus $\quad |x_{n+k+1}-x_{n+k}|\le q^k|x_{n+1}-x_n| \quad$ für alle $k,n\in\mathbb{N}$ und $\quad \xi-x_n \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty}(x_{n+k+1}-x_{n+k})$ folgt sofort

$$|\xi-x_n| \;\le\; \sum_{k=0}^{\infty}q^k|x_{n+1}-x_n| \;\le\; \frac{1}{1-q}|x_{n+1}-x_n| \;\le\; \frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}| \;\le\; \frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0| \;.$$

Aufgabe 4.9.

Führen Sie für die folgenden Funktionen und Startwerte drei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle durch, und prüfen Sie jeweils, ob das Newton-Verfahren wirklich gegen eine Nullstelle konvergiert:

(a) $4x^2-1$ für $x_0=1$ sowie $x_0=0$ (b) $x^5-x-\frac{1}{5}$ für $x_0=0$ sowie $x_0=1$

Lösung zu Aufgabe 4.9.

(a) Für $f(x) = 4x^2 - 1$, d.h. $f'(x) = 8x$ und $f''(x) = 8$, lautet das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4x_n^2 - 1}{8x_n} ,$$

also sind die ersten Werte $x_0 = 1$, $x_1 = 5/8$, $x_2 = 0.5125$, $x_3 = 0.509256836$ bzw. bei $x_0 = 0$ bricht das Verfahren ab. Im Fall $x_0 = 1$ hat f' z.B. auf $[1/4, 1]$ keine Nullstelle und es gilt $f'' > 0$, $f(1/4) = -3/4$, $f(1) = 3$, so dass das Newton-Verfahren monoton von oben gegen die eindeutige Nullstelle $1/2$ von f in $[1/4, 1]$ konvergiert. Im Fall $x_0 = 0$ gilt $f'(0) = 0$ und somit funktioniert das Newton-Verfahren nicht.

(b) Für $f(x) = x^5 - x - \frac{1}{5}$, d.h. $f'(x) = 5x^4 - 1$ und $f''(x) = 20x^3$, lautet das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n - \frac{1}{5}}{5x_n^4 - 1} ,$$

also sind die ersten Werte $x_0 = 0$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.200770719$, $x_3 = -0.200794114$ bzw. $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$, $x_2 = 1.044823949$, $x_3 = 1.044761709$. Im Fall $x_0 = 0$ hat f' z.B. auf $[-1/2, 0]$ keine Nullstelle, da f' auf diesem Intervall wegen $f''(x) = 20x^3 \leq 0$ monoton fällt und außerdem im linken Rand $f'(-1/2) = -11/16 < 0$ gilt. Desweiteren ist $f(-1/2) = -1/32+1/2-1/5 > 0$, $f(0) = -1/5 < 0$, so dass das Newton-Verfahren monoton von oben gegen die eindeutige Nullstelle von f in $[-1/2, 0]$ konvergiert. Im zweiten Fall $x_0 = 1$ hat f' z.B. auf $[1, 2]$ keine Nullstelle, da f' auf diesem Intervall wegen $f''(x) \geq 0$ monoton wächst und im linken Rand $f'(1) = 4 > 0$ gilt. Da außerdem $f(1) = -1/5 < 0$ und $f(2) = 32-2-1/5 > 0$ gilt, konvergiert das Newton-Verfahren monoton von oben gegen die eindeutige Nullstelle ξ von f in $[1, 2]$, falls man $x_0 \in [\xi, 2]$ wählt. Wir haben aber leider $x_0 = 1 \notin [\xi, 2]$ falsch gewählt, jedoch Glück gehabt, dass wir beim ersten Iterationsschritt wegen $f(1.05) = 0.026\cdots > 0$ in ein Gebiet rechts der Nullstelle springen.

Aufgabe 4.10.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = f(x) = x^2$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

(b) Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes P ist.

(c) Vom Punkt $P(x_0, y_0)$ eines Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ wird das Lot auf die Abszissenachse gefällt; der Fußpunkt sei L. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt P schneide die Abszissenachse in T. Zeigen Sie, dass $\overline{TL} = 1$ für jeden Punkt P gilt.

Lösung zu Aufgabe 4.10.

(a) Es gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

(b) Der Anstieg der Tangente im Punkt x_0 ist durch die Auswertung der 1. Ableitung der Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ an der Stelle $x=x_0$ gegeben. Da die erste Ableitung offenbar durch $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ gegeben ist, erhalten wir als Anstieg $m=-\frac{1}{x_0^2}$. Jetzt müssen wir noch den Rest der Tagentengleichung $t(x)=mx+n$ bestimmen, also n. Wir kennen jedoch den Funktionswert der Tangente an der Stelle $x=x_0$. Das heißt wir erhalten die Gleichung $-\frac{1}{x_0^2}+n=\frac{1}{x_0}$, woraus wir $n=\frac{2}{x_0}$ erhalten.

Der Schnittpunkt der Tangente mit der Ordinate ist durch $t(0)=\frac{2}{x_0}$ gegeben. Der mit der Abzisse durch $2x_0$. Demzufolge lautet der Flächeninhalt des Dreiecks $A=\frac{2}{x_0}\cdot x_0=2$, ist also unabhängig von der Wahl des Punktes P.

(c) Wir suchen wieder die Tangentengleichung im Punkt $x=x_0$. Der Anstieg m ist offenbar durch $m=e^{x_0}$ gegeben. Um n zu erhalten lösen wir die Gleichung $s^{x_0}x_0+n=e^{x_0}$ und erhalten $n=e^{x_0}(1-x_0)$. Somit lautet die Tangentengleichung

$$t(x)=e^{x_0}x+e^{x_0}(1-x_0).$$

Um den Schnittpunkt mit der Abzisse zu bekommen setzen wir die Gleichung gleich Null und erhalten als Schnittpunkt $x=x_0-1$. Somit hat L die Koordinaten $L=(x_0;0)$ und T die Koordinaten $T=(x_0-1;0)$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Aufgabe 4.11.
Gegeben sei die Funktion

$$f:x\mapsto\begin{cases}x^2\sin(1/x) & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Funktion mit Hilfe von MAPLE.
b) Zeigen Sie, dass $f(x)$ überall stetig ist.
c) Berechnen Sie $f'(x)$ mit Hilfe des Differentialquotienten und zeigen Sie, dass $f(x)$ überall differenzierbar ist. Wie groß ist $f'(0)$?
d) Zeichnen Sie $f'(x)$ mit Hilfe von MAPLE.
e) Zeigen Sie, dass $f(x)$ nicht stetig differenzierbar ist, weil $f'(x)$ bei $x=0$ nicht stetig ist.
f) Überprüfen Sie alle Ihre Rechnungen mit Hilfe von MAPLE.

Lösung zu Aufgabe 4.11.

(a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f schon einmal in allen Punkten $x\neq 0$ stetig. Weiterhin ist sie auch in $x=0$ stetig, denn sei x_n eine beliebige Nullfolge, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_n^2\sin(\frac{1}{x_n})\right|\leq\lim_{n\to\infty}|x_n^2|=0.$$

(b) Unter Zuhilfenahme von L'hopital berechnen wir den Differentialquotienten für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2\sin(\frac{1}{x+h})-x^2\sin(\frac{1}{x})}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2(\sin(\frac{1}{x+h})-\sin(\frac{1}{x}))+2xh\sin(\frac{1}{x+h})+h^2\sin(\frac{1}{x+h})}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2(\sin(\frac{1}{x+h})-\sin(\frac{1}{x}))}{h}+2x\sin(\frac{1}{x})\\
&\overset{L'Hopital}{=} \frac{-x^2}{x^2+2hx+h^2}\cos(\frac{1}{x+h})+2x\sin(\frac{1}{x})\\
&= -\cos(\frac{1}{x})+2x\sin(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ erhalten wir als Differentialquotienten und somit als Anstieg in $x = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{1}{h})-0}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} h\sin(\frac{1}{h}) = 0
\end{aligned}$$

(c) Offensichtlich ist die erste Ableitung insgesamt durch

$$f'(x) = \begin{cases} -\cos(\frac{1}{x})+2x\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0\\ 0, & x = 0\end{cases}$$

gegeben. Dies ist jedoch keine stetige Funktion, denn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} -\cos(\frac{1}{x})+2x\sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} -\cos(\frac{1}{x})$$

existiert nicht.

4.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 4.1.
Überprüfen Sie mittels der Definition, ob die folgenden Funktionen auf ihren Definitionsbereich differenzierbar sind.
(a) $f_1(x) = x^3$ (b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

(c) $f_3(x) = \sqrt{x}$ (d) $f_4(x) = \frac{1}{sin(x)}$

Lösung zu Aufgabe 4.1.

(a)
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2$$

(b)
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{x^4 + 2hx^3 + h^2x^2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{x^4 + 2hx^3 + h^2x^2} \\ &= -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

(c)
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(d) Es gilt
$$\lim_{h\to 0} \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(h) - \sin(h)\cos(x)}{h\sin(x)\left(\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)\right)} = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

denn $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, da sin im Punkt 0 die Ableitung $\cos(0) = 1$ besitzt, und $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$, da Cosinus im Punkt 0 die Ableitung $-\sin(0) = 0$ besitzt.
Also ist r in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ differenzierbar mit Ableitung $f_3'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Aufgabe 4.2.
Bestimmen Sie mittels Rechenregeln zum Differenzieren jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen
(a) $f_1(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$ (b) $f_2(x) = \exp\left(x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)$ (c) $f_3(x) = (x^2+2)\sqrt{x+1}$

(d) $f_4(x) = \sin(\cos(x)) \cdot (x^2 + 4x + 1)$ (e) $f_5(x) = \frac{\sqrt{1+x^3} + \ln(x)}{\exp(4x + \sin(x))}$

Lösung zu Aufgabe 4.2.

(a)
$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

(b)
$$\frac{d}{dx}\left(\exp\left(x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\right) = \exp\left(x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \frac{x}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2}\right)$$

(c)
$$\frac{d}{dx}\left((x^2+2)(\sqrt{x+1})\right) = 2x\sqrt{x+1} + (x^2+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(d)
$$\frac{d}{dx}\left(\sin(\cos(x))(x^2+4x+1)\right) = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \cdot (x^2+4x+1) + \sin(\cos(x)) \cdot (2x+4)$$

(e)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\ln(x)}{\exp(4x+\sin(x))}\right)$$
$$= \frac{\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{x}\right)\exp(4x+\sin(x)) + \left(\sqrt{1+x^3}+\ln(x)\right)\exp(4x+\sin(x))(4+\cos(x))}{\exp(8x+2\sin(x))}$$

Aufgabe 4.3.
(i) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die folgenden Funktionen monoton fallend, bzw. monoton wachsend sind! (ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) die lokalen Extrema der Funktionen! (iii) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die folgenden Fzunktionen konkav, bzw. konvex sind! (iv) Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktionen! (v) Zeichnen Sie die Funktionen!

(a) $f_1(x) = x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 18x + 1$ (b) $f_2(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ (c) $f_3(x) = e^{2x}(x^2 - 2x - 55)$

Lösung zu Aufgabe 4.3.

(a) Die ersten beiden Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 15x + 18 \\ f''(x) &= 6x + 15 \end{aligned}$$

(i) Zur Untersucheung der Monotonie setzen wir die 1. Ableitung $=0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2+15x+18 \\ 0 &= x^2+5x+6 \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit als kritische Punkte -3 und -2. Da $f'(x)$ stetig ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Monotonie auf die drei Intervalle $(-\infty,-3),(-3,-2)$ und $(-2,\infty)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns jeweils auf beliebige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned} f'(-1000) &> 0 \Rightarrow \text{ f ist monoton wachsend in } (-\infty,-3) \\ f'(-\frac{5}{2}) &< 0 \Rightarrow \text{ f ist monoton fallen in } (-3,-2) \\ f'(1000) &> 0 \Rightarrow \text{ f ist monoton wachsend in } (-2,\infty) \end{aligned}$$

(ii) Aufgrund des Übergangs der Monotoniearten können wir nun schließen, dass bei $x=-3$ eine lokale Maximalstelle und bei $x=-2$ eine lokale Minimalstelle vorliegt. Dabei handelt es sich auch nicht um globale Extremstellen, da

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

(iii) Zur Untersuchung der Konvexität setzen wir die 2.Ableitung $=0$ und erhalten

$$0=6x+15 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}.$$

Da $f''(x)$ stetig ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Konvexität auf die beiden Intervalle $(-\infty,-\frac{5}{2})$ und $(-\frac{5}{2},\infty)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns auf jeweilige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned} f''(-1000) &< 0 \Rightarrow \text{ f ist konkav in } (-\infty,-\frac{5}{2}) \\ f''(1000) &> 0 \Rightarrow \text{ f ist konvex in } (-\frac{5}{2},\infty) \end{aligned}$$

(iv) Aufgrund des Wechsels bei der Konvexität liegt bei $-\frac{5}{2}$ eine Wendestelle vor.

(b) Die ersten beiden Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 \\ f''(x) &= 4\cos(x)\cdot(-\sin(x)) \end{aligned}$$

(i) Zur Untersucheung der Monotonie setzen wir die 1. Ableitung $=0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 2\cos^2(x)-1 \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit als kritische Punkte $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$. Da $f'(x)$ stetig und 2π-periodisch ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Monotonie auf die vier Intervalle $(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ und $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns jeweils auf beliebige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned}
f'(0) &> 0 \Rightarrow \text{f ist monoton wachsend in } (\frac{(8k-1)\pi}{4}, \frac{(8k+1)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z} \\
f'(\frac{\pi}{2}) &< 0 \Rightarrow \text{f ist monoton fallend in } (\frac{(8k+1)\pi}{4}, \frac{(8k+3)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z} \\
f'(\pi) &> 0 \Rightarrow \text{f ist monoton wachsend in } (\frac{(8k+3)\pi}{4}, \frac{(8k+5)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z} \\
f'(\frac{3\pi}{2}) &< 0 \Rightarrow \text{f ist monoton fallend in } (\frac{(8k+5)\pi}{4}, \frac{(8k+7)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(ii) Aufgrund des Übergangs der Monotoniearten können wir nun schließen, dass bei $\left\{\frac{(4k+1)\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ jeweils eine lokale Maximalstelle und bei $\left\{\frac{(4k+3)\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ jeweils eine lokale Minimalstelle vorliegt. Dabei ist jede lokale Extremstelle zugleich auch globale Extremstelle, da f 2π-periodisch ist.

(iii) Zur Untersuchung der Konvexität setzen wir die 2.Ableitung $= 0$ und erhalten

$$0 = 4\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \Rightarrow x \in \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Da $f''(x)$ stetig und 2π-periodisch ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Konvexität auf die vier Intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ und $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns auf jeweilige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned}
f''(\frac{\pi}{4}) &< 0 \Rightarrow \text{f ist konkav in } (\frac{4k\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z} \\
f''(\frac{3\pi}{4}) &> 0 \Rightarrow \text{f ist konvex in } (\frac{(4k+1)\pi}{4}, \frac{(4k+2)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z} \\
f''(\frac{5\pi}{4}) &< 0 \Rightarrow \text{f ist konkav in } (\frac{(4k+2)\pi}{4}, \frac{(4k+3)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z} \\
f''(\frac{7\pi}{4}) &> 0 \Rightarrow \text{f ist konvex in } (\frac{(4k+3)\pi}{4}, \frac{(4k+4)\pi}{4}), k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(iv) Aufgrund des Wechsels bei der Konvexität liegen bei $x \in \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ jeweils Wendestellen vor.

(c) Es ergeben sich für die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f'(x) = 2e^{2x}(x-8)(x+7) \quad , \qquad f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 - 113) \quad .$$

(i) Es ist $2e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und als nach oben geöffnete Parabel ist

$$(x-8)(x+7) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in [-7, 8] \\ > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-7, 8] \end{cases} .$$

Demnach ist f monoton fallend in $[-7,8]$ (denn dort ist die Ableitung nichtpositiv) und monoton wachsend in $]-\infty,-7]$ bzw. in $[8,\infty[$ (denn dort ist die Ableitung nichtnegativ).

(ii) Wiederum ist $4e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und als nach oben geöffnete Parabel ist

$$x^2 - \frac{113}{2} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in \left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right] \\ > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right] \end{cases}.$$

Demnach ist f konkav in $\left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right]$ (denn dort ist die zweite Ableitung nichtpositiv) und konvex in $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{113}{2}}\right]$ bzw. in $\left]\sqrt{\frac{113}{2}}, \infty\right[$ (denn dort ist die zweite Ableitung nichtnegativ).

(iii) Aus dem Monotonieverhalten der Funktion folgt:

- Bei $x = -7$ besitzt f ein lokales Maximum mit Wert $f(-7) = 8e^{-14}$.
- Bei $x = 8$ besitzt f ein lokales Minimum mit Wert $f(8) = -7e^{16}$.
- Weitere lokale Extremstellen besitzt die Funktion nicht, da alle Punkte des Definitionsintervalls innere Punkte sind und $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{-7, 8\}$.

Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 > -7e^{16} = f(8)$, folgt:

- Die Funktion f besitzt in 8 ein globales Minimum mit Wert $f(8) = -7e^{16}$.
- Die Funktion f besitzt keine weiteren globalen Extremstellen.

Aus dem „Wölbungsverhalten"̃der Funktion folgt:

- Bei $-\sqrt{\frac{113}{2}}$ und $\sqrt{\frac{113}{2}}$ besitzt f Wendepunkte.
- Die Funktion besitzt keine weiteren Wendepunkte, da alle Punkte des Definitionsintervalls innere Punkte sind und $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \left\{-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right\}$.

Aufgabe 4.4.
Berechnen Sie für $a > 0$ und $x > 0$ die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dx}a^x$ (b) $\frac{d}{dx}x^{(x^a)}$ (c) $\frac{d}{dx}x^{(a^x)}$

(d) $\frac{d}{dx}x^x$ (e) $\frac{d}{dx}x^{(x^x)}$ (f) $\frac{d}{dx}(x^x)^x$

Lösung zu Aufgabe 4.4.

(a)
$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\exp(\ln(a^x)) = \frac{d}{dx}\exp(x\ln(a)) = \ln(a)\exp(x\ln(a)) = \ln(a)a^x$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{(x^a)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln(x^{(x^a)})\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(x^a \ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(\ln(x^a)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(a\ln(x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(a\ln(x)\right)\ln(x)\right) \cdot \left(\exp(a\ln(x)) \cdot \frac{a}{x} \cdot \ln(x) + \frac{\exp(a\ln(x))}{x}\right) \\
&= x^{(x^a)} \cdot \left(x^a \cdot \frac{a}{x} \cdot \ln(x) + \frac{x^a}{x}\right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{(a^x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln(x^{(a^x)})\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(a^x \ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(\ln(a^x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(x\ln(a)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(x\ln(a)\right)\ln(x)\right) \cdot \left(\exp(x\ln(a)) \cdot \ln(a) \cdot \ln(x) + \frac{\exp(x\ln(a))}{x}\right) \\
&= x^{(a^x)} \cdot \left(a^x \cdot \ln(a) \cdot \ln(x) + \frac{a^x}{x}\right)
\end{aligned}$$

(d)

$$\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}\exp(\ln(x^x)) = \frac{d}{dx}\exp(x\ln(x)) = (\ln(x)+1)\exp(x\ln(x)) = (\ln(x)+1)x^x$$

(e)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{(x^x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln(x^{(x^x)})\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(x^x \ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(\ln(x^x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(x\ln(x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(x\ln(x)\right)\ln(x)\right) \cdot \left(\exp(x\ln(x)) \cdot (\ln(x)+1) \cdot \ln(x) + \frac{\exp(x\ln(x))}{x}\right) \\
&= x^{(x^x)} \cdot \left(x^x \cdot (\ln(x)+1) \cdot \ln(x) + \frac{x^x}{x}\right)
\end{aligned}$$

(f) Das selbe wie bei (e), da $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

4.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 4.1.
Zeichnen Sie die Funktionen und bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$ c) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{x-10}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{5}{x^2+x-6}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \cot x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+\sin x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\cot(x) - \dfrac{1}{x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to -0} \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}} \arctan x$ l) $\lim\limits_{x\to +0} (\cot x)^{\sin x}$

m) $\lim\limits_{x\to 1-0} x^{\tan \frac{\pi x}{2}}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to +0} (2^x-1)^{\sin x}$

Lösung zu Aufgabe 4.1.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln(x)-1}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

(c)

$$\lim_{x\to 10} \frac{\lg(x)-1}{x-10} = \lim_{x\to 10} \frac{\frac{1}{x\ln(10)}}{1} = \frac{1}{10\ln(10)}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}-be^{bx}}{1} = a-b$$

(e)

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-x^2-8x+16} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{3x^2-2x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{6x-2} = \frac{1}{5}$$

(f)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

(g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

(h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)}{2x\sin(x) + x^2\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - x\cos(x)}{2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) - \cos(x) + x\sin(x)}{2\cos(x) + 4\cos(x) - 4x\sin(x) - 2x\sin(x) - x^2\cos(x)} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(i)

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \exp\left(\frac{1}{1-x}\ln(x)\right) = 1,$$

wobei die letzte Gleichheit aus

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\ln(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^2}{x} = 1$$

folgt.

(j)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

(k)

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\arctan(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{2\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{2xx^2-(1+x^2)2x}{x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2}\frac{-x^{\frac{5}{2}}}{1}\frac{-1}{(^+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

(l)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^{\sin(x)} = \exp\left(\sin(x)\ln(x)\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\right) = 1,$$

wobei die letzte Gleicheit aus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)\frac{-1}{\sin^2(x)}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \tan(x) \cdot \frac{-1}{\cos(x)} = 0$$

folgt.

(m)
$$\lim_{x\to 1} x^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 1} \exp\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x)\right) = 1,$$
wobei die letzte Gleichheit aus
$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan\left(\frac{px}{x}\right)}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \frac{-1}{x\ln(x)} = -\frac{\ln^2(x)x}{\cos^2(x)} = 0$$
folgt.

(n)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x-xe^x} = \frac{1}{2}$$

(o)
$$\lim_{x\to 0}(2^x-1)^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\sin(x)\ln(2^x-1)\right) = 1,$$
wobei die letzte Gleichheit aus
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\frac{1}{\ln(2^x-1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{-\ln(2)2^x}{\ln(2^x-1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)\ln(2^x-1)}{\ln(2)2^x} = 0$$
folgt.

Aufgabe 4.2.

(a) Man beweise die Ungleichung $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.
Hinweis: Man wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf $f(x) = \ln(1+x)$ an.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass
$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$
die $k-$ te Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ ist.

Lösung zu Aufgabe 4.2.

(a) Sei $a = 0$ und $b = x$. Offenbar ist $f(x) = \ln(1+x)$ stetig in $[a;b]$ und differenzierbar in (a,b). Daher existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a,b) = (0,x)$ mit
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi}.$$
Weil $\xi \in (0,x)$ folgt daraus, dass
$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi} > \frac{x}{1+x},$$
sowie
$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi} < x.$$

(b) IA: $k = 1$

$$\frac{d\ln(x+1)}{dx} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \checkmark$$

IS: $k \to k+1$
IV: Es gelte $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ für ein $k \geq 1$.
IB: zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k(k)!(1+x)^{-k-1}$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \frac{d^{k+1}\ln(x+1)}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\frac{d^k\ln(x+1)}{dx^k} &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}\right) \\ &= (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot (-k) \cdot (1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^k(k)!(1+x)^{-k-1} \end{aligned}$$

(c)

Aufgabe 4.3.
Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen jeweils mittels des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion:

(a) $f_1(x) = \arcsin(x)$ (b) $f_2(x) = \arccos(x)$ (c) $f_3(x) = \operatorname{arccot}(x)$

Lösung zu Aufgabe 4.3.

(a) Offensichtlich ist $f_1^{-1}(x) = \sin(x)$ und $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$. Somit gilt

$$f_1'(x) = \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass für $y = \arcsin(x)$ gilt dass

$$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}.$$

(b) Offensichtlich ist $f_2^{-1}(x) = \cos(x)$ und $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Somit gilt

$$f_2'(x) = \frac{-1}{\sin\left(\arccos(x)\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass für $y = \arccos(x)$ gilt dass

$$\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}.$$

(c) Offensichtlich ist $f_3^{-1}(x) = \cot(x)$ und $\frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1-\cot^2(x)$. Somit gilt

$$f_3'(x) = \frac{-1}{1+\cot(\operatorname{arccot}(x))} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4.4 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 4.1.
Auf einer Wiese soll ein Weideplatz rechteckig umzäumt werden. Dafür stehen 595 Meter Zaun zur Verfügung. Desweiteren soll noch eine Öffnung von 5 Meter Durchmesser für ein Tor gelassen werden. Wie groß müssen die einzelnen Seiten der Rechteckfläche gewählt werden, damit die Weidefläche maximiert wird?

Lösung zu Aufgabe 4.1.
Der Umfang ist gegeben durch

$$U(a,b) = 2a + 2b - 5 = 595,$$

und der Flächeninhalt durch

$$A(a,b) = a \cdot b.$$

stellen wir den Umfang nach a um, so erhalten wir

$$a = 300 - b.$$

Dies setzen wir in die Funktion für den Flächeninhalt ein und es folgt

$$A(a,b) = A(b) = 300b - b^2.$$

Dies leiten wir ab und erhalten

$$A'(b) = 300 - 2b.$$

Im Maximaum muss gelten, dass $A'(b) = 0$, also $b = 150$. Wegen

$$A''(b) = -2 < 0$$

handelt es sich wirklich um ein Maximum. Die Seitenfläche a beträgt ebenfalls 150 Meter.

Aufgabe 4.2.
Welcher Punkt auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$ hat zu $(1;1)$ den minimalsten Abstand? Wie groß ist dieser?

Lösung zu Aufgabe 4.2.
Für das Quadrat der Distanfunktion gilt

$$dist^2(x) = (x-1)^2 + (x^{\frac{3}{2}} + 1 - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^3.$$

Um das Minimum zu finden bilden wir die 1.Ableitung und erhalten

$$(dist^2)'(x) = 2x - 2 + 3x^2 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right).$$

Dies setzen wir $= 0$ und erhalten mittels quadratischer Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1+6}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{7}{3}.$$

Logischerweise entfällt die negative Lösung und es beibt $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ als Lösung übrig. Dies ist wirklich ein Minimum, denn es gilt

$$(dist^2)''(x) = 6x + 2, \qquad (dist^2)''\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right) > 0$$

Der minimale Abstand entspricht demnach

$$dist\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right) = ..$$

Aufgabe 4.3.
Es soll ein Tunnel mit möglichst größen Umfang entstehen. Dabei setzt sich der Tunnelquerschnitt aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis zusammen. Der Flächeninhalt soll als konstant angenommen werden. Wie groß ist das Rechteck zu wählen?

Lösung zu Aufgabe 4.3.
Der Flächeninhalt ist gegeben durch

$$A = A(a, r) = a \cdot 2r + \frac{r^2\pi}{2}$$

und der Umfang durch

$$U(a, r) = 2r + 2a + r\pi.$$

Die Formel für den Flächeninhalt stellen wir nach a um und erhalten

$$a = \frac{A}{2r} - \frac{r\pi}{4}.$$

Dies setzen wir in die Funktion für den Umfang ein und erhalten

$$U(a, r) = U(r) = 2r + \frac{A}{r} - \frac{r\pi}{2} + r\pi.$$

Dies leiten wir nach r ab und setzen die Ableitung $= 0$, also

$$U'(r) = 2 - \frac{A}{r^2} - \frac{\pi}{2+\pi} = 0.$$

Somit lautet die Lösung

$$r = \sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}.$$

Dementsprechend hat das Rechteck Seitenlängen von $2 \cdot \sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}$ und $\frac{A}{2\sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}} - \frac{\sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}\pi}{4}$.

4.5 Übungsserie mit Lösungen

Aufgabe 4.1.
Ein Fahrzeug soll in möglichst kurzer Zeit vom Punkt $(0\text{km}, 0\text{km})$ zum Punkt $(30\text{km}, 10\text{km})$ gelangen. Auf der Straße (im Modell die x-Achse) kann es 50kmh^{-1} fahren. Im Gelände (außerhalb der x-Achse) dagegen nur 20kmh^{-1}. An welcher Stelle der Straße muss es abbiegen?

Lösung zu Aufgabe 4.1.
Die Zeitfunktion, in Abhängigkeit vom Punkt x, des Verlassens der Straße, lautet

$$t(x) = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{(30-x)^2+100}}{20}.$$

Wir suchen das Minimum, daher bilden wir die erste Ableitung und setzen diese $= 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dt(x)}{dx} = \frac{1}{50} - \frac{30-x}{20\sqrt{(30-x)^2+100}} &= 0 \\
\frac{1}{50} &= \frac{30-x}{20\sqrt{(30-x)^2+100}} \\
20\sqrt{(30-x)^2+100} &= 1500-50x \\
((30-x)^2+100)400 &= 1500^2 - 150000x + 2500x^2 \\
(1000-60x+x^2)400 &= 1500^2 - 150000x + 2500x^2 \\
0 &= 2100x^2 - 126000x + 1850000 \\
x_{1,2} \approx 30 \pm 4,36435 &
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösung $x \approx 25,6356422\ldots$. Also biegt das Auto bei Kilometer $25,6356422...$ von der Hauptstraße ab.

Dabei handelt es sich wirklich um ein Minimum, denn es gilt

$$\begin{aligned}
t''(x) &= \frac{-(20\sqrt{(30-x)^2+100}) + (30-x)\cdot(\frac{10\cdot(2(30-x))}{\sqrt{(30-x)^2+100}})}{400((30-x)^2+100)} \\
t''(25,63..) &> 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2.
Ein kreiszylindrischer, oben offener Behälter vom Inhalt V (den kann man als gegeben betrachten) und der Wand- und Bodenstärke a ist mit möglichst wenig Material herzustellen. Man bestimme für diesen Fall den Radius r des inneren Grundkreises und den Materialverbrauch M.

Lösung zu Aufgabe 4.2.
Die Volumensformel lautet

$$V = r^2\pi h.$$

Dies stellen wir nach h um un erhalten

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Weiterhin ist der Materialverbrauch gegeben durch

$$\begin{aligned} M(r,h,a) &= 2r\pi ah + r^2\pi a, \\ M(r,a) &= 2\frac{Va}{r} + r^2\pi a. \end{aligned}$$

Um das Minimum zu erhalten, bestimmen wir die erste Ableitung und setzen diese $= 0$

$$\begin{aligned} \frac{dM(r,a)}{dr} = -\frac{2Va}{r^2} + 2r\pi a &= 0 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \end{aligned}$$

Dementsprechend ist der Materialverbrauch minimal, wenn

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Der minimale Materialverbrauch lautet dann

$$M(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, a) = \frac{2Va}{\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}} + \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2 \pi a.$$

Dass es sich wirklich um ein Minimum handelt, folgt aus

$$\frac{d^2}{dr^2}M(r,a) = \frac{4V}{r^3} + 2\pi a > 0.$$

Aufgabe 4.3.
Unter allen Rechtecken von gegebenen Unfang l ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 4.3.
Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist durch

$$A(a,b) = ab$$

gegeben, der Umfang durch

$$U(a,b) = l = 2a + 2b.$$

Da der Umfang gegeben ist, stellen wir einfach nach der Seite a um und setzen das Ergebnis in die Formel für den Flächeninhalt ein. Dann bestimmen wir davon die Ableitung und setzen diese $= 0$.

$$\begin{aligned} A(b) &= \frac{lb - 2b^2}{2} \\ \frac{dA(b)}{db} = \frac{l-4b}{2} &= 0 \\ b &= \frac{l}{4} \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt, dass $a = b = \frac{l}{4}$. Das Ergebnis ist also immer ein Quadrat. Das es sich wirklich um ein Maximum handelt folgt aus

$$\frac{d^2}{db^2}A(b) = -2 < 0.$$

Aufgabe 4.4.
Welche Punkte (x, y) der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ haben vom Punkt $(1; 0)$ die kleinste Entfernung?

Lösung zu Aufgabe 4.4.
Die Distanzfunktion ist offensichtlich durch

$$\operatorname{dist}^2(x) = (x-1)^2 + (1 + x^2) = 2x^2 - 2x + 2$$

gegeben. Leiten wir diese ab und setzen dies dann $= 0$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\operatorname{dist}^2(x)}{dx} = 4x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir für die y-Koordinate $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Dass es sich wirklich um ein Minimum handelt folgt aus

$$\frac{d\operatorname{dist}^2}{dx^2} = 4 > 0.$$

Aufgabe 4.5.
Der Ellipse $(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) = 1$ ist dasjenige Rechteck mit achsenparallelen Seiten einzubeschreiben, dessen Flächeninhalt ein Maximum wird.

Lösung zu Aufgabe 4.5.
Es genügt nur den ersten Quadranten zu betrachten. Dann gilt für den Flächeninhalt

$$A(x) = bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Leiten wir dies wieder ab und setzen die Ableitung $= 0$, dann erhalte wir

$$\begin{aligned} \frac{dA(x)}{dx} = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{bx^2}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} &= 0 \\ x &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Und somit auch $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Somit lauten die Eckpunkte des Rechteckes

$$(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}), (\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}), (-\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}), (-\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}})$$

Damit lautet der Flächeninhalt

$$A_{gesamt} = \frac{ab}{2}.$$

Dass es sich wirklich um ein Maximum handelt folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} A(x) &= \frac{b(\frac{-2x}{a^2})}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} - \frac{2bx(a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}) - bx^2(a^2\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(\frac{-2x}{a^2})}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2})} \\ \frac{d^2}{dx^2} A(\frac{a}{\sqrt{2}}) &< 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.6.
Aus einem Baumstamm (Kreisquerschnitt, Radius r) soll ein Balken mit Rechteckquerschnitt (Breite b, Höhe h) so herausgeschnitten werden, dass er eine möglichst große Tragfähigkeit besitzt, die durch das Widerstandmoment $W = \frac{bh^2}{6}$ gemessen werden kann.

Lösung zu Aufgabe 4.6.
Wir führen die Aufgabe auf ein Koordinatensystem zurück. Offensichtlich gilt dann für die Höhe h und die Breite b, dass

$$h = 2\sqrt{r^2 - x^2} \qquad b = 2x.$$

Somit ist das Widerstandsmoment durch

$$W(x, r) = \frac{8x(r^2 - x^2)}{6} = \frac{8xr^2 - 8x^3}{6}.$$

Dies leiten wir wieder ab und setzen das Ergebnis $= 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x,r)}{\partial x} = \frac{8r^2 - 24x^2}{6} &= 0 \\ x^2 &= \frac{r^2}{3} \\ x_{1,2} &= \pm\frac{r}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Somit lautet die Breite und die Höhe

$$b = \frac{2r}{\sqrt{3}}, \qquad h = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Dass es sich wirklich um ein Maximum handelt, folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W(x,r)}{\partial x^2} &= -8x, \\ \frac{\partial^2 W(\frac{r}{\sqrt{3}}, r)}{\partial x^2} &= -8\frac{r}{\sqrt{3}} < 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.7.
Führen Sie Kurvendiskussionen für folgende Funktionen durch. Nutzen Sie MAPLE für Ihre Berechnungen und für das Zeichnen der Funktionen:
(a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25$
(b) $g(x) = \frac{3x^3-9x}{2x^2-8}$

Lösung zu Aufgabe 4.7.

(a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25$

(i) Definitionsbereich:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

(ii) Symmetrie:
f ist weder gerade noch ungerade, da $f(x) \neq f(-x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$.

(iii) Stetigkeit:
Da f ein Polynom ist, ist es auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(iv) Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$$

(v) Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0 &= x^4 - 12x^3 + 46x^2 + 25 \end{aligned}$$

Da der rechte Ausdruck der obigen Gleichung immer größer als Null ist, existieren keine Nullstellen.

(vi) kritische Punkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 0 &= 4x^3 - 36x^2 + 92x \\ 0 &= x(x^2 - 9x + 23) \\ x_{2,3} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-92}{4}} \end{aligned}$$

Dementsprechend existiert nur ein kritischer Punkt bei $x = 0$.

(vii) Monotonie:
Für $x \in (0, \infty)$ ist

$$f'(x) = 4x\underbrace{(x^2 - 9x + 23)}_{>0} > 0$$

und dementsprechend (streng) monoton wachsend in $(0, \infty)$.
Für $x \in (-\infty, 0)$ ist

$$f'(x) = 4x\underbrace{(x^2 - 9x + 23)}_{>0} < 0$$

und dementsprechend (streng) monoton fallend in $(-\infty, 0)$.

(viii) Art der Extrema:
Aufgrund des Monotonieverhaltens handelt es sich bei $x = 0$ um eine lokale Minimalstelle. Aufgrund des Verhaltens gegen $\pm\infty$ handelt es sich sogar um eine globale Minimalstelle.

(ix) Konvexität:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 0 &= 12x^2 - 72x + 92 \\ 0 &= x^2 - 6x + \frac{23}{3} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{\frac{27-23}{3}} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Da $f''(x)$ stetig ist, genügt es beliebige Punkte aus den Intervallen $(-\infty, 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}), (3 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 3 + \frac{2}{\sqrt{3}})$ und $(3 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$ zu betrachten.

$$\begin{aligned} f''(-1000) &> 0 \qquad \text{konvex in } (-\infty, 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}) \\ f''(3) = -16 &< 0 \qquad \text{konkav in } (3 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}) \\ f''(1000) &> 0 \qquad \text{konvex in } (3 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \infty) \end{aligned}$$

(x) Wendepunkte:
Aufgrund des Krümmungsverhaltens liegt bei $3 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ jeweils eine Wendestelle vor.

(b) $g(x) = \frac{3x^3-9x}{2x^2-8}$

(i) Definitionsbereich:

$$D(g) = \mathbb{R}/\left\{\pm 2\right\}.$$

(ii) Symmetrie:
g ist ungerade, da $g(-x) = \frac{-3x^3+9x}{2x^2-8} = -\left(\frac{3x^3-9x}{2x^2-8}\right) = -f(x)$.

(iii) Stetigkeit:
g ist in $\{\pm 2\}$ unstetig und sonst überall stetig, da Komposition stetiger Funktionen.

(iv) Verhalten im Unendlichen und an den Unstetigkeitsstellen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \pm\infty \\ \lim_{x\to 2\pm} g(x) &= \pm\infty \\ \lim_{x\to -2\pm} g(x) &= \pm\infty \end{aligned}$$

Dementsprechend liegen bei $\{\pm 2\}$ Polstellen vor.

(v) Nullstellen:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 0 &= 3x(x^2-3) \end{aligned}$$

Dementsprechend sind die Nullstellen gegeben durch $\{0, \pm\sqrt{3}\}$.

(vi) kritische Punkte:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{(9x^2-9)(2x^2-8)-(3x^3-9x)(4x)}{(2x^2-8)^2} \\ 0 &= 6(x^4-9x^2+12) \\ 0 &= z^2-9z+12 \\ z_{1,2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-48}{4}} \\ z_{1,2} &= \frac{9\pm\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

Dementsprechend existieren vier kritische Punkte $\left\{\pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}\right\}$.

(vii) Monotonie:
Vorab bemerken wir noch, dass sich an einer Polstelle das Monotonieverhalten nicht ändert.

Für $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}})$ ist

$$f'(x) = \frac{3x^4-27x^2+36}{2(x^2-4)^2} > 0$$

und dementsprechend (streng) monoton wachsend in $(-\infty, -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}})$.
Für $x \in (-\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}, -\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}})$ ist

$$f'(x) = \frac{3x^4-27x^2+36}{2(x^2-4)^2} < 0$$

und dementsprechend (streng) monoton fallend in $(-\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}, -\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}})$.
Für $x \in (-\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}})$ ist

$$f'(x) = \frac{3x^4-27x^2+36}{2(x^2-4)^2} > 0$$

und dementsprechend (streng) monoton wachsend in $(-\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}})$.
Für $x \in (\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}})$ ist

$$f'(x) = \frac{3x^4-27x^2+36}{2(x^2-4)^2} < 0$$

und dementsprechend (streng) monoton fallend in $\left(\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}\right)$.
Für $x \in \left(\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}, \infty\right)$ ist

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 27x^2 + 36}{2(x^2-4)^2} > 0$$

und dementsprechend (streng) monoton wachsend in $\left(\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}\infty\right)$.

(viii) Art der Extrema:
Aufgrund des Monotonieverhaltens handelt es sich bei $x \in \left\{-\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}\right\}$ jeweils um lokale Minimalstellen. Weiterhin handelt es sich bei $x \in \left\{-\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{2}}\right\}$ jeweils um lokale Maximalstellen. Dabei handelt es sich nicht um globale Extrema, da die Funktion z.B. über Polstellen verfügt.

(ix) Konvexität:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{3x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \\ 0 &= 3x(x^2+12) \end{aligned}$$

Da $g''(x)$ außer in $\{\pm 2\}$ stetig ist und es sich dort um Polstellen handelt, bei denen sich die Konvexität nicht ändert, genügt es beliebige Punkte aus den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ zu betrachten.

$$\begin{array}{rcll} g''(-1000) & < & 0 & \text{konkav in } (-\infty, 0) \\ g''(1000) & > & 0 & \text{konvex in } (0, \infty) \end{array}$$

(x) Wendepunkte:
Aufgrund des Krümmungsverhaltens liegt bei 0 eine Wendestelle vor.

5 Taylorentwicklung

5.1 Taylor-Reihe, Taylor-Formel

- **Satz 1: TAYLORsche Formel:**

  Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x, x_0 \in I$ die TAYLORsche Formel

  $$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; R_{n+1}(x)$$

  mit dem Restglied

  $$R_n(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

  oder

  $$R_n(x) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\ d\theta.$$

- **Satz 2: LAGRANGEsche Form des Restgliedes:**

  Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ existiere die n-te Ableitung $f^{(n)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sie sei darüber hinaus noch stetig. Weiterhin existiere die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)} :]a,b[\to \mathbb{R}$ im Inneren. Dann existiert für beliebige $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x und x_0, so dass die TAYLORsche Formel

  $$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

  gilt. Dabei heißt

  $$T_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

  n-tes Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 und

  $$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

  LAGRANGEsches Restglied der TAYLORschen Formel.

  Alternative Aussage: $\exists \theta \in (0,1)$:

  $$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

- Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar, spricht man von der **Entwicklung in eine** Taylor**-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

um den **Entwicklungspunkt** x_0.

. . . .

5.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 5.1.

Nutzen Sie für den Beweis von $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x)=\sqrt{1+x}$ um den Punkt $x_0=0$.

Lösung zu Aufgabe 5.1.

Es gilt $f(0) = 1$ und wegen $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ haben wir $f'(0) = \frac{1}{2}$. Zusammen mit $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ folgt daher mit Hilfe der Taylor-Formel

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8\sqrt{(1+\theta x)^3}}\cdot x^2, \qquad (0\le\theta\le 1).$$

Setzen wir $\eta(x) := -\frac{x}{8\sqrt{(1+\theta x)^3}}$, so ist die Funktion $\eta(x)$ offenbar stetig und erfüllt die Bedingung $\eta(0) = 0$. Demnach gilt nun mit $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+\eta(x)x$ bei $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$ eingesetzt

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\eta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}+\frac{1}{2}+\eta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

woraus nach Umstellen aus der Stetigkeit von $\eta(x)$ und $\eta(0)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\eta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$$

folgt.

Aufgabe 5.2.
Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ der Funktion $f(x)=e^x\cdot\sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0=0$ und zeigen Sie, dass für $|x|<\frac{1}{2}$ gilt:

$$|R_3(x)| = |f(x)-T_3(x)| \le \frac{\sqrt{e}}{6}\cdot|x|^4.$$

Lösung zu Aufgabe 5.2.
Zuerst berechnen wir die ersten 4 Ableitungen der Funktion und werten diese dann bei $x_0=0$ aus.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \sin(x)\\
f(0) &= 0\\
\\
f'(x) &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))\\
f'(0) &= 1\\
\\
f''(x) &= e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x)) = 2e^x \cos(x)\\
f''(0) &= 2\\
\\
f^{(3)}(x) &= 2e^x \cos(x) - 2e^x sin(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x))\\
f^{(3)}(0) &= 2\\
\\
f^{(4)}(x) &= 2e^x(\cos(x) - \sin(x)) - 2e^x(\sin(x) + \cos(x)) = -4e^x \sin(x).
\end{aligned}$$

Daher lautet das Taylorpolynom $T_3(x)$

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + 1 + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

Das Lagrange'sche Restglied ist dann durch

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{-e^x \sin(\xi)}{6}x^4$$

gegeben. Es gilt weiterhin für $|x| < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$|R_3(x)| = \left|\frac{-e^x \sin(\xi)}{6}x^4\right| \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{6}.$$

Aufgabe 5.3.
Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiter Ordnung an der Stelle $x_0 = 1$. Zeigen Sie weiterhin, dass für alle $x \in (1, \frac{11}{10})$ die folgende Restgliedabschätzung gilt

$$|R_2(x)| \leq 10^{-3}.$$

Lösung zu Aufgabe 5.3.
Wir berechnen wiederum zuerst die ersten 3 Ableitungen von f und werten diese an der

Stelle $x_0 = 1$ aus.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{-1}{4}} \\
f(1) &= 1 \\
\\
f'(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} \\
f'(1) &= -\frac{1}{4} \\
\\
f''(x) &= \frac{5}{16}x^{-\frac{9}{4}} \\
f''(1) &= \frac{5}{16} \\
\\
f'''(x) &= -\frac{45}{64}x^{-\frac{13}{4}}.
\end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom $T_2(x)$ gegeben durch

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 1 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{5}{32}(x-1)^2.$$

Für das Restglied $R_2(x)$ ergibt sich

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-x_0)^3 = -\frac{15}{128\xi^{\frac{13}{4}}}(x-1)^3.$$

Und weiterhin für $x \in (1, \frac{11}{10})$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| = \frac{15}{128\xi^{\frac{13}{4}}}(x-1)^3 \leq \frac{15}{128}(x-1)^3 \leq \frac{15}{128}\left(\frac{1}{10}\right)^2 < 10^{-3}.$$

Aufgabe 5.4.
Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und schätzen Sie danach das Restglied mit dem Integralrestglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ für $x \in [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ betragsmäßig ab.

Lösung zu Aufgabe 5.4.
Wir berechnen wieder die ersten 3 Ableitungen und werten diese an der Stelle $x = x_0 = 1$

aus

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-\frac{1}{2}} \\ f(1) &= 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ f'(1) &= -\frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \\ f''(1) &= \frac{3}{4} \\ f'''(x) &= -\frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom $T_2(x)$ gegeben durch

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2.$$

Für das Restglied $R_2(x)$ ergibt sich

$$R_2(x) = \frac{1}{2}\int_1^x x(x-t)^2 \frac{15}{8} t^{-\frac{7}{2}} dt$$

Und weiterhin für $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{15}{16}\frac{1}{10}\frac{1}{10^2} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-\frac{7}{2}}.$$

5.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 5.1.

(a) Jeder vollkommen biegsame, schwere, an zwei Punkten aufgehängte Faden nimmt in Gleichgewichtslage die Form der Kettenlinie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right), \quad a > 0$$

an, wobei $S(0, a)$ der Scheitelpunkt ist. Bestimmen Sie für $a = 10$ durch Taylorentwicklung diejenige Parabel, die sich in der Nähe des tiefsten Punktes S sehr eng an die Kettenlinie anschmiegt. Zeichnen Sie die Kettenlinie und die gefundene Parabel in einem Bild.

(b) Entwickeln Sie das Polynom $p_1(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ nach Potenzen von $x - 2$ und das Polynom $p_2(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ nach Potenzen von $x + 1$. In anderen Worten: Entwickeln Sie das erste Polynom an der Stelle $x = 2$ und das zweite Polynom an der Stelle $x = -1$ in eine Taylorreihe.

(c) Man berechne die Taylorpolynome $10-$ ten Grades jeweils für $x_0 = 0$ für die Funktionen $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = \sqrt{1+x}$ und $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Stellen Sie für jede dieser Funktionen jeweils die Funktion sowie die berechneten Taylorpolynome bis zum Grad 4 in einer Graphik in verschiedenen Farben dar. Es wird empfohlen, hierbei MAPLE zu verwenden. Die Resultate sind in schriftlicher Form abzugeben.

Lösung zu Aufgabe 5.1.

(a) Offensichtlich ist das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion $f(x) = 5(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}})$ um den Entwicklungspunkt $x = x_0 = 0$ gesucht. Für die ersten Ableitungen gilt

$$\begin{array}{lll} & & f(0) = 10 \\ f'(x) & = e^{\frac{x}{5}} - e^{-\frac{x}{5}} & f'(0) = 0 \\ f''(x) & = \frac{1}{5}(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}}) & f''(0) = \dfrac{2}{5} \end{array}$$

Demnach lautet das Tylorpolynom $T_2(x)$

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 10 + \frac{1}{5}x^2$$

(b) Wir berechnen zuerst die ersten Ableitungen und werten diese dann bei $x = x_0 = 2$ aus

$$\begin{array}{rcl} p_1(x) = & x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2 & p_1(2) = 0 \\ p_1'(x) = & 4x^3 - 15x^2 + 10x + 1 & p_1'(2) = 32 - 60 + 20 + 1 = -7 \\ p_1''(x) = & 12x^2 - 30x + 10 & p_1''(2) = 48 - 60 + 10 = -2 \\ p_1'''(x) = & 24x - 30 & p_1'''(2) = 18 \\ p_1^{(4)}(x) = & 24 & \end{array}$$

Dementsprechend lautet das Taylorpolynom

$$T(x) = -7(x-2) - 1(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$$

Wir berechnen zuerst die ersten Ableitungen und werten diese dann bei $x = x_0 = -1$ aus

$$\begin{array}{rcl}
p_2(x) = & x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1 & p_2(-1) = -1 + 2 - 1 - 1 + 1 = 0 \\
p_2'(x) = & 5x^4 + 8x^3 - 2x + 1 & p_2'(-1) = 5 - 8 + 2 + 1 = 0 \\
p_2''(x) = & 20x^3 + 24x^2 - 2 & p_2''(-1) = -20 + 24 - 2 = 2 \\
p_2'''(x) = & 60x^2 + 48x & p_2'''(-1) = 60 - 48 = 12 \\
p_2^{(4)}(x) = & 120x + 48 & p_2^{(4)}(-1) = -72 \\
p_2^{(5)}(x) = & 120 &
\end{array}$$

Dementsprechend lautet das Taylorpolynom

$$T(x) = (x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$$

(c) Offensichtlich ist die Taylorreihe von $f(x) = \exp(2x)$ durch

$$\exp(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$$

gegeben. Demnach lautet das Taylorpolynom vom Grad 10

$$T_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{(2x)^k}{k!}.$$

Die k-te Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ lautet

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k-2} 2j+1}{2^k (1+x)^{\frac{2k-1}{2}}}, \qquad k \geq 1 \tag{$*$}$$

Dies zeigen wir mittels Induktion.

<u>IA:</u> $k = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}} = (-1)^2 \frac{\prod_{j=0}^{1-2}(2j+1)}{2^1 (1+x)^{\frac{2-1}{2}}} \qquad \checkmark$$

<u>IS:</u> $k \to k+1$
<u>IV:</u> Es gelte $(*)$ für ein $k \geq 1$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^{k+1}(1+x)^{\frac{2k+1}{2}}}$
<u>Beweis der IB:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \overset{I.V.}{=} & \frac{d}{dx} (-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k-2}(2j+1)}{2^k (1+x)^{\frac{2k-1}{2}}} \\
= & (-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k-2}(2j+1)}{2^k (1+x)^{\frac{2k+1}{2}}} \cdot \left(\frac{-(2k-1)}{2}\right) \\
= & (-1)^{k+2} \frac{(2(k-1)+1) \prod_{j=0}^{k-2}(2j+1)}{2^{k+1}(1+x)^{\frac{2k+1}{2}}} \\
= & (-1)^{k+2} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^{k+1}(1+x)^{\frac{2k+1}{2}}}
\end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gegeben durch

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k-2}(2j+1)}{k! \cdot 2^k (1+x)^{\frac{2k-1}{2}}} x^k + 1$$

und das Taylorpolynom 10-ten Grades durch

$$T_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k-2}(2j+1)}{k! \cdot 2^k (1+x)^{\frac{2k-1}{2}}} x^k + 1.$$

Die k-te Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ lautet

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^k (1+x)^{\frac{2k+1}{2}}} \qquad k \geq 0 \tag{$**$}$$

Dies zeigen wir mittels Induktion.

<u>IA:</u> $k = 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} = (-1)^1 \frac{\prod_{j=0}^{0}(2j+1)}{2^1 (1+x)^{\frac{2+1}{2}}} \qquad \checkmark$$

<u>IS:</u> $k \to k+1$
<u>IV:</u> Es gelte $(**)$ für ein $k \geq 1$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)}{2^{k+1}(1+x)^{\frac{2k+3}{2}}}$
<u>Beweis der IB:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \quad &\overset{I.V.}{=} \quad \frac{d}{dx}(-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^k(1+x)^{\frac{2k+1}{2}}} \\
&= \quad (-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^k(1+x)^{\frac{2k+3}{2}}} \cdot \left(\frac{-(2k+1)}{2}\right) \\
&= \quad (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^{k+1}(1+x)^{\frac{2k+3}{2}}} \\
&= \quad (-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)}{2^{k+1}(1+x)^{\frac{2k+3}{2}}}
\end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gegeben durch

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{k! \cdot 2^k (1+x)^{\frac{2k+1}{2}}} x^k$$

und das Taylorpolynom 10-ten Grades durch

$$T_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{10}(-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{k! \cdot 2^k (1+x)^{\frac{2k+1}{2}}} x^k.$$

Aufgabe 5.2.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Leiten Sie dazu zuerst eine Formel zur expliziten Berechnung der k-ten Ableitung von $f(x)$ her und beweisen diese dann per Induktion. Setzen Sie diese dann in die allgemeine Taylorformel ein.

Lösung zu Aufgabe 5.2.
Wir beweisen per Induktion, dass

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(2-x)^k} \qquad (*)$$

IA: $k = 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2-x} \qquad \checkmark$$

IS: $k \to k+1$
IV: Es gelte $(*)$ für ein $k \geq 1$.
IB: zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = \frac{(k)!}{(2-x)^{k+1}}$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(f(x)) = \frac{d}{dx}f^{(k)}(x) &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\frac{(k-1)!}{(2-x)^k} \\ &= \frac{(k-1)!}{(2-x)^{k+1}} \cdot (-k) \cdot (-1) \\ &= \frac{k!}{(2-x)^{k+1}}\end{aligned}$$

Also lautet die Taylorreihe $T(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k! \cdot 2^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 2^k}.$$

Das n-te Taylorpolynom $T_n(x)$ lautet dementsprechend

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k! \cdot 2^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 2^k}.$$

Das Restglied $R_n(x)$ lautet demnach

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}.$$

6 Integrale

6.1 Wiederholung - Theorie Integrale

Riemann-Summen, Ober- und Untersumme, Riemann-Integrierbarkeit

- Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann kann man zu jeder Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ die **Riemannsche Obersumme**

$$OS(Z, f) := \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in]x_{k-1}, x_k[} f(x) \right) (x_k - x_{k-1})$$

  und die **Riemannsche Untersumme**

$$US(Z, f) := \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{x \in]x_{k-1}, x_k[} f(x) \right) (x_k - x_{k-1})$$

  definieren.

- Mit Hilfe der Ober- und Untersummen kann man
  - das **Oberintegral** $\int_a^{b^*} f(x)\, dx := \inf_Z OS(Z, f)$,
  - das **Unterintegral** $\int_{a\,*}^{b} f(x)\, dx := \sup_Z US(Z, f)$

  definieren. Es gilt immer $\int_{a\,*}^{b} f(x)\, dx \leq \int_a^{b^*} f(x)\, dx$. Stimmen die beiden Werte sogar überein, dann nennt man f **Riemann-integrierbar** und bezeichnet ihren gemeinsamen Wert einfach mit $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)\, dx}$.

- Jede stetige und auch jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

- Das Riemann-Integral ist **linear**, das bedeutet: Summen und Vielfache Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

- Das Riemann-Integral ist **monoton**: Sind $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f \leq g$ auf $[a, b]$, dann gilt auch $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

- Beträge, Potenzen $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$, und Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

- Ist f Riemann-integrierbar, so kann man $\int_a^b f(x)\, dx$ durch **Riemann-Summen** annähern:

  Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

der Feinheit $|Z| := \max_{k=1,\dots,n} |x_k - x_{k-1}| < \delta$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ die Beziehung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon$$

gilt.

- Ist also f Riemann-integrierbar und Z_m eine Folge von Zerlegungen mit Knoten $x_k^{(m)}$ und Stützstellen $\xi_k^{(m)}$, die $\lim_{m\to\infty} |Z_m| = 0$ erfüllt, und bezeichnet

$$R_m S := \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(m)})(x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)})$$

die zu $Z_m, \xi^{(m)}$ gehörige Riemann-Summe, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} R_m S.$$

Mittelwertsätze, Stammfunktion, Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

- **Mittelwertsatz der Differentialrechnung:**
  Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $x \in]a,b[$ existiere die Ableitung $f'(x)$.
  Dann existiert ein $c \in]a,b[$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ gilt.
  Setzt man $b = a + h$, lautet der Satz: $\exists \theta\ (0 < \theta < 1)\ :\ f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h)$.

- **Mittelwertsatz der Integralrechnung:**
  Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$, so dass $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx$. Im Spezialfall $g \equiv 1$ gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f (auf I), wenn F differenzierbar ist und $f = F'$ auf I gilt.

- Je zwei Stammfunktionen von f auf I unterscheiden sich höchstens um eine Konstante.

- **Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**
  Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann besitzt f eine Stammfunktion, z.B. die zu $a \in I$ durch $F_a(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ definierte Funktion $F_a : I \to \mathbb{R}$.

- **Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine RIEMANN-integrierbare Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und F eine Stammfunktion von f auf I. Dann gilt für alle $a, b \in I$ die Gleichung

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad .$$

Partielle Integration, Substitution

- **Partielle Integration:**

  Besitzen $u(x)$, $v(x)$ stetige Ableitungen, dann gilt

$$\int u(x)\;v'(x)\;dx \;=\; u(x)\;v(x) - \int u'(x)v(x)\;dx \quad .$$

- **Substitutionsmethode:**

  Ist $x = \varphi(t)$ bzw. $t = \psi(x)$ die Umkehrfunktion zu $x = \varphi(t)$, dann gilt

$$\int f(x)\;dx \;=\; \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int f(x)\;dx \;=\; \int \frac{f(\varphi(t))}{\psi'(\varphi(t))}\;dt \quad .$$

Partialbruchzerlegung

- Jeder echte Bruch $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $n = \deg(P) < \deg(Q) = m$ und P und Q teilerfremd, dh. mit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$ und $Q(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} b_l x^l$ $(b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R})$, kann eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden; wird der höchste Koeffizient des Nenners b_m auf den Wert 1 gebracht, besitzen die Partialbrüche die Form

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l} \qquad \text{mit} \qquad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

  Bei reellen Koeffizienten treten demnach vier Fälle auf:

  A: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt nur einfache reelle Wurzeln α_l $(l = 1, \ldots, m)$. Dann besitzt die Zerlegung die Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\prod\limits_{l=1}^{m} (x-\alpha_l)} = \sum_{l=1}^{m} \frac{A_l}{x-\alpha_l} \qquad \text{mit} \qquad A_l = \frac{P(\alpha_l)}{Q'(\alpha_l)}$$

  B: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt mehrfach auftretende reelle Nullstellen, etwa $r < m$ verschiedene reelle Nullstellen α_l $(l = 1, \ldots, r)$ der Mehrfachheit k_l mit $\sum\limits_{l=1}^{r} k_l = m$, dann erfolgt die Zerlegung nach der Formel

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\prod\limits_{l=1}^{r} (x-\alpha_l)^{k_l}} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{l,s}}{(x-\alpha_l)^s}.$$

C: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt neben $r < m$ verschiedenen reellen Nullstellen α_l $(l = 1, \ldots, r)$ der Mehrfachheit k_l mit $\sum\limits_{l=1}^{r} k_l = t < m$ noch $\frac{m-t}{2} (\in \mathbb{N})$ Paare von einfachen komplexen Nullstellen, dann erfolgt die Zerlegung nach der Formel

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\left(\prod\limits_{l=1}^{r} (x-\alpha_l)^{k_l}\right)\left(\prod\limits_{v=1}^{\frac{m-t}{2}} (x^2 + p_v x + q_v)\right)} \\
&= \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{l,s}}{(x-\alpha_l)^s} + \sum_{v=1}^{\frac{m-t}{2}} \frac{B_v x + C_v}{x^2 + p_v x + q_v}.
\end{aligned}$$

D: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt neben $r < m$ verschiedenen reellen Nullstellen α_l $(l = 1, \ldots, r)$ der Mehrfachheit k_l mit $\sum\limits_{l=1}^{r} k_l = t < m$ noch z Paare von komplexen Nullstellen der Mehrfachheit j_v $(v = 1, \ldots, z)$ mit $\sum\limits_{v=1}^{z} j_v = \frac{m-t}{2} \in \mathbb{N}$, dann erfolgt die Zerlegung nach der Formel

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\left(\prod\limits_{l=1}^{r} (x-\alpha_l)^{k_l}\right)\left(\prod\limits_{v=1}^{z} (x^2 + p_v x + q_v)^{j_v}\right)} \\
&= \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{l,s}}{(x-\alpha_l)^s} + \sum_{v=1}^{z} \sum_{i=1}^{j_v} \frac{B_{v,i} x + C_{v,i}}{(x^2 + p_v x + q_v)^i}.
\end{aligned}$$

- Jede rationale Funktion kann in der Form $P_0(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$ dargestellt werden, wobei P_0, P, Q Polynome sind, $\deg(P) < \deg(Q)$ und P und Q teilerfremd. Da die Integration über P_0 trivial ist, betrachten wir nur den echt gebrochenen Teil.

  Mit Partialbruchzerlegung (siehe voriger Punkt) wird $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in Summanden der Form

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \tag{6.1}$$

  und

$$\frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^l}, \quad x^2 + px + q \text{ besitzt keine reelle Nullstelle,} \tag{6.2}$$

  wobei $(x-\alpha)^k | Q(x)$ und $(x^2 + px + q)^l | Q(x)$, zerlegt. Die Integration von Funktionen (6.1) ist trivial. Es bleibt die Integration von Funktionen der Form (6.2) zu betrachten. Siehe unten.

Uneigentliche Integrale

- Die Funktion f sei für $x \geq a$ definiert und in jedem Intervall $[a, u]$ Riemann-integrierbar. Wenn

$$\lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\, dx$$

existiert und endlich ist, so heißt der Grenzwert das **uneigentliche** RIEMANN-**Integral** und wird mit

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

bezeichnet.

- Für den Fall, dass $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ in a nicht definiert ist, aber dennoch $\lim\limits_{s \searrow a} \int\limits_s^b f(t)\,dt$ existiert und endlich ist, sprechen wir auch hier vom **uneigentlichen** RIEMANN-**Integral**.

. . . .

6.2 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6.1.

(a) Die Funktion x^2 ist als stetige Funktion auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. Berechnen Sie die Riemann-Summe von $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0,\ldots,n$, und den durch das geometrische Mittel gegebenen Stützstellen $\xi_k := \sqrt{x_{k-1}x_k}$, sowie durch Limesbildung $n \to \infty$ den Wert des Integrals.

(b) Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist als stetige Funktion auf $[1,2]$ Riemann-integrierbar. Berechnen Sie die Riemannsche Untersumme des Integrals $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ bzgl. der äquidistanten Zerlegung $x_k := 1 + \frac{k}{n}$, $k = 0,\ldots,n$, sowie unter Verwendung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \ln(2)$ den Wert des Integrals durch Limesbildung $n \to \infty$.

(c) Berechnen Sie die Riemann-Summe von $\int\limits_0^1 c^x\,dx$, $c > 0$, bzgl. der äquidistanten Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0,\ldots,n$, und den rechten Knoten als Stützstellen, sowie durch Limesbildung $n \to \infty$ den Wert des Integrals.

Lösung zu Aufgabe 6.1.

(a) Die Riemann-Summe ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)k}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n(n+1)}{2n^3} = \frac{2n^3+n^2-n}{6n^3} \quad ,$$

und für $n \to \infty$ ergibt sich als Grenzwert $\frac{1}{3}$, dies ist also der Wert des Integrals $\int_0^1 x^2\,dx$.

(b) Als monoton fallende Funktion ergibt sich hier für die Untersumme

$$US\left(Z, \frac{1}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\inf_{x\in]x_{k-1},x_k[}\frac{1}{x}\right)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

Wie man leicht sieht, gilt für die Summe jedoch

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\ &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Daher konvergiert sie für $n \to \infty$ gegen $\ln(2)$. Der Wert des Integrals $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ ist somit $\ln(2)$.

(c) Die Riemann-Summe lautet

$$\sum_{k=1}^{n} c^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{c}\right)^{k}=\frac{1}{n}\left(\frac{1-\sqrt[n]{c}^{\,n+1}}{1-\sqrt[n]{c}}-1\right)=\frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{c}-\sqrt[n]{c}^{\,n+1}}{1-\sqrt[n]{c}}=\sqrt[n]{c}(c-1)\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{c}-1}\qquad.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$ (falls $c>0$) strebt der erste Faktor für $n\to\infty$ gegen $c-1$. Für den zweiten Faktor folgt mit $\sqrt[n]{c}=c^{\frac{1}{n}}=e^{\ln c^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{1}{n}\ln c}$ und der Regel von L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{c}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[n]{c}(-\frac{\ln(c)}{n^2})}=\frac{1}{\ln(c)}\qquad,$$

so dass sich insgesamt $\int\limits_0^1 c^x\,dx=\frac{c-1}{\ln(c)}$ ergibt.

Aufgabe 6.2.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, welche durch

$$f(x):=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

definiert ist, über keinem Intervall $[a,b]$, $a<b$, Riemann-integrierbar ist.

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ und $1_y(x)$ die Funktion, welche durch

$$1_y(x):=\begin{cases}1\,, & x=y\\ 0\,, & x\neq y\end{cases}$$

definiert wird. Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass durch $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} 1_{a_k}(x)$ eine Folge RIEMANN-integrierbarer Funktionen definiert ist, die auf $[0,1]$ punktweise gegen eine nicht-RIEMANN-integrierbare Funktion f konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 6.2.

(a) Das Unterintegral ist 0, das Oberintegral ist $b-a$, denn für alle x, y mit $x < y$ gilt einerseits $\sup_{\xi \in]x,y[} f(\xi) = 1$ und andererseits $\inf_{\xi \in]x,y[} f(\xi) = 0$.

(b) Jedes f_n ist als Treppenfunktion RIEMANN-integrierbar mit $\int f_n(x)\,dx = 0$, da sowohl Unter- als auch Oberintegral 0 sind. Um dies zu sehen, wählen wir bei $a_{k_1} < \cdots < a_{k_n}$ einfach die durch diese Knoten gegebene Zerlegung und bilden Ober- und Untersumme.
Ist $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, dann ist $f_n(x) = 0$ für alle n.
Ist $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, dann ist x in der Abzählung $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthalten und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x = a_N$, so dass somit $f_n(x) = 1$ für alle $n \geq N$ gilt.
Also gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für jedes x, d.h. die Folge RIEMANN-integrierbarer Funktionen f_n konvergiert punktweise gegen eine nicht-RIEMANN-integrierbare Funktion f, nämlich diejenige aus (a) eingeschränkt auf das Intervall $[0,1]$.

Aufgabe 6.3.

(a) Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Beweisen Sie den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(c) Zeigen Sie: Potenzen $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$, Riemann-integrierbarer Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind wieder Riemann-integrierbar.

(d) Zeigen Sie: Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

(e) Finden Sie ein Beispiel für eine RIEMANN-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die keine Stammfunktion besitzt.

(f) Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion besitzt, aber nicht RIEMANN-integrierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 6.3.

(a) Aufgrund der Monotonie des Intergrals folgt

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \int_a^b g(x)dx \;\leq\; \int_a^b f(x)g(x)dx \;\leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) \int_a^b g(x)dx$$

Demnach existiert auch ein $\mu \in \left[\inf_{x\in[a,b]} f(x),\ \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right]$ mit $\mu \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.
Aufgrund der Stetigkeit von f finden wir somit nach dem Zwischenwertsatz ein ξ, so dass $f(\xi) = \mu$, woraus alles Weitere folgt.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit Stammfunktion F, d.h. $F' = f$. Zunächst ist f dann auch Riemann-integrierbar für jedes Intervall $[a,b] \subseteq I$.
Für jede Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ des Intervalls $[a,b]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big) \\ &\overset{\substack{\text{Mittelwertsatz} \\ \text{d.Differential}- \\ \text{rechnung}}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{|Z|\to 0} \int\limits_a^b f(x)\ dx \end{aligned}$$

mit den aus dem Mittelwertsatz stammenden $\xi_k \in]x_k, x_{k-1}[$.

(c) Aufgrund der Linearität (d.h. dass mit f auch λf Riemann-integrierbar ist) und da mit f auch f_+ und f_- Riemann-integrierbar sind (und somit auch $|f|$), genügt es, die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|^p$ für den Fall $0 \le f \le 1$ zu beweisen.

Aufgrund der Riemann-Intergrierbarkeit von f finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $0 \le \varphi \le f \le \psi \le 1$ und

$$0 \le \int\limits_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \le \frac{\varepsilon}{p} \quad .$$

Es sind weiterhin auch φ^p und ψ^p Treppenfunktionen, für die aufgrund der strengen Monotonie der Potenz ebenso $0 \le \varphi^p \le f^p \le \psi^p \le 1$ gelten. Wegen $(x^p)' = px^{p-1}$ folgt nun mit Hilfe des Mittelwertsatzes (angewendet auf x^p eingeschränkt auf das Intervall $[0,1]$)

$$0 \le \psi^p - \varphi^p \le p(\psi - \varphi) \implies 0 \le \int_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x)dx \le p\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \le p\cdot\frac{\varepsilon}{p} \le \varepsilon \ ,$$

also die Riemann-Integrierbarkeit von f.

(d) Wegen $|f|^2 = f^2$ und mit Hilfe der Linearität des Riemann-Integrals folgt für Riemann-integrierbare Funktionen f, g, dass $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ Riemann-integrierbar ist.

(e) Beispielsweise sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch $f := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \ne 0) \end{cases}$ definiert. Für jede Zerlegung Z gilt dann $US(Z,f) = 0$ und $0 \le OS(Z,f) \le |Z|$, also

$$\int\limits_{-1\ *}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1^*} f(x)\,dx = 0.$$

Angenommen, es existiert eine Stammfunktion F, d.h. $\forall x \in [-1,1] :\ F'(x) = f(x)$.
Dann gilt $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt + C = C$ (vgl. Hauptsatz), aber in diesem Fall $F'(x) \equiv 0 \ne f(x)$ bei $x = 0$. Widerspruch.

(f) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & t=0 \\ 2t\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\,, & t \in]0,1[\end{cases} \qquad,$$

besitzt offenbar $t^2\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ als Stammfunktion, ist jedoch aufgrund der Unbeschränktheit nicht RIEMANN-integrierbar.

Aufgabe 6.4.

Zeigen Sie mittels Berechnung des Limes des Differenzenquotienten, dass die Funktion

$F(x) := \int\limits_0^x \sin(x+s)\,ds$ $\qquad(x > 0)$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung $F'(x)$.

Lösung zu Aufgabe 6.4.
Wir haben zunächst

$$\begin{aligned}
F(x+\Delta x) - F(x) \;&=\; \int\limits_0^{x+\Delta x} \sin(x+\Delta x+s)\,ds - \int\limits_0^{x} \sin(x+s)\,ds \\
&=\; \int\limits_x^{x+\Delta x} \sin(x+\Delta x+s)\,ds + \int\limits_0^{x} (\sin(x+\Delta x+s) - \sin(x+s))\,ds \\
\text{(MWS d Int-R)} \;&=\; \Delta x\cdot\sin(x+\Delta x+x+\theta_0\Delta x) + \int\limits_0^{x} (\sin(x+\Delta x+s) - \sin(x+s))\,ds \\
&=\; \Delta x\cdot\left(\sin(2x+(1+\theta_0)\Delta x) + \int\limits_0^{x} \frac{\sin(x+\Delta x+s) - \sin(x+s)}{\Delta x}\right) \\
\text{(MWS d Diff-R)} \;&=\; \Delta x\cdot\left(\sin(2x+(1+\theta_0)\Delta x) + \int\limits_0^{x} \cos(x+\theta(x)\Delta x+s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

(Mittelwertsatz der Integral- bzw. Differentialrechnung) mit $0 < \theta_0, \theta(x) < 1$.
Indem man Δx gegen 0 fallen lässt, folgt daraus

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \sin 2x + \int\limits_0^{x} \cos(x+s)\,ds = 2\sin 2x - \sin x.$$

Aufgabe 6.5.

Berechnen Sie die folgenen Integrale und führen Sie jeweils die Probe durch:
(a) $\int x\sin(x)\ dx$, (b) $\int x\sin(x^2)\ dx$, (c) $\int (\sin x)^2\ dx$.

Lösung zu Aufgabe 6.5.

(a) Partielle Integration liefert

$$\int x\sin(x)\ dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = \sin(x) - x\cos(x) + C.$$

Probe:

$$(\sin(x) - x\cos(x))' = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = x\sin(x).$$

(b) Mit der Substitution $z = x^2$, d.h. $dz = 2xdx$, ergibt sich

$$\int x\sin(x^2)\ dx = \int \frac{\sin(z)}{2} dz = -\frac{\cos(z)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C$$

Probe:

$$\left(-\frac{\cos(x^2)}{2}\right)' = \frac{\sin(x^2)2x}{2} \quad .$$

(c) Partielle Integration mit $u'(x) = \sin x, u(x) = -\cos x$ und $v(x) = \sin x, v'(x) = \cos x$ führt zu

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2\ dx &= \int \sin x \sin x\ dx \\ &= -\sin x\cos x + \int (\cos x)^2\ dx \\ &= -\sin x\cos x + \int (1 - (\sin x)^2)\ dx \end{aligned}$$

Umstellen führt zu

$$\int (\sin x)^2\ dx = \frac{x - \sin x\cos x}{2} + C$$

Probe:

$$\left(\frac{x - \sin x\cos x}{2}\right)' = \frac{1 - (\cos x)^2 + (\sin x)^2}{2} = \frac{(\sin x)^2 + (\sin x)^2}{2} = (\sin x)^2.$$

Aufgabe 6.6.

Integrieren Sie $\displaystyle\int \frac{Ex + F}{x^2 + px + q}\, dx$, falls $x^2 + px + q$ keine reelle Nullstelle besitzt.

Lösung zu Aufgabe 6.6.

Da x^2+px+q keine reelle Nullstelle besitzt, ist $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+D$ mit $D:=q-\frac{p^2}{4}>0$. (Achtung: D ist hier genau das Negative der Diskriminanten $\frac{p^2}{4}-q$, welche im Falle von zwei echt komplexen Wurzeln ihrerseits negativ sein muss.) Insbesondere gilt dann $x^2+px+q>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Wegen $Ex+F = Ex+\frac{pE}{2}-\frac{pE}{2}+F = \frac{E}{2}(2x+p)+\left(F-\frac{pE}{2}\right)$ können wir das Integral folgendermaßen aufspalten und berechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D}\,dx \\ &= \frac{E}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)+C,\end{aligned}$$

wobei wir für das erste Integral die Substitutionsmethode mit $t=\varphi(x)=x^2+px+q$ und folglich $\frac{dt}{dx}=2x+p$ angewendet haben. Für das zweite Integral haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D} = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1}, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$$

und die Substitutionsmethode mit $t=\varphi(x)=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{D}}$.

Bemerkung:

Offenbar gilt für $l>1$ analog stets

$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^l}\,dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l}\,dx + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+D)^l}\,dx \\ &= -\frac{E}{2(l-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{l-1}} \\ &\quad + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\frac{1}{D^l}\int\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1\right)^{-l}dx,\end{aligned}$$

so dass wie zuvor nach Substitution mit $t=\varphi(x)=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{D}}$ nur Integrale der Form

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^l}\,dt \tag{6.3}$$

zu berechnen sind, für die es Rekursionsformeln in $l>1$ gibt, die mit partieller Integration hergeleitet werden können.

Aufgabe 6.7.

(a) Zeigen Sie, dass für $l>1$ und $D>0$

$$\int \frac{1}{(t^2+D)^l}\,dt = \frac{1}{2(l-1)D}\left[\frac{t}{(t^2+D)^{l-1}} + (2l-3)\int \frac{1}{(t^2+D)^{l-1}}\,dt\right].$$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+D)^2}, \quad D>0\,.$

Lösung zu Aufgabe 6.7.

(a) Ableiten der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(l-1)D}\left[\frac{(t^2+D)^{l-1}-2(l-1)t^2(t^2+D)^{l-2}}{(t^2+D)^{2(l-1)}}+(2l-3)\frac{1}{(t^2+D)^{l-1}}\right]\\
&\quad=\quad \frac{1}{2(l-1)D}\left[\frac{(t^2+D)-2(l-1)t^2}{(t^2+D)^l}+(2l-3)\frac{(t^2+D)}{(t^2+D)^l}\right]\\
&\quad=\quad \frac{1}{(2l-2)D}\left[\frac{(2l-2)(t^2+D)-(2l-2)t^2}{(t^2+D)^l}\right] \quad=\quad \frac{1}{(t^2+D)^l}
\end{aligned}$$

(b) Nach der Rekursionsformel aus der vorhergehenden Aufgabe haben wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t^2+D)^2}\,dt &= \frac{1}{2(2-1)D}\left[\frac{t}{(t^2+D)^{2-1}}+(2\cdot 2-3)\int\frac{1}{(t^2+D)^{2-1}}\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2D}\left[\frac{t}{t^2+D}+\frac{1}{D}\int\frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{D}})^2+1}\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2D}\frac{t}{t^2+D}+\frac{1}{2D^{3/2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{D}}\right)+C.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder die Substitutionsmethode mit $x=\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{D}}$ sowie $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$ verwendet.

Aufgabe 6.8.

Berechnen Sie für die folgenden rationalen Funktionen den Definitionsbereich in $\mathbb{R}$, die reelle Partialbruchzerlegung und eine Stammfunktion. (Führen Sie ggf. eine Probe durch.)

a) $\dfrac{1}{x^3-x}$, (b) $\dfrac{1}{1+x^4}$, (c) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$, (d) $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ (e) $\dfrac{1}{x^4-1}$.

Lösung zu Aufgabe 6.8.

(a) Da $x^3-x=x(x+1)(x-1)$ die einfachen Nullstellen $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$ besitzt, ergibt sich für die rationale Funktion

$$r_1 := \frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)}$$

der Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ und für die Partialbruchzerlegung der Ansatz

$$r_1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{x+1} \quad .$$

Die Koeffizienten können entweder mittels Koeffizientenvergleich oder einfacher mit der Grenzwertmethode $\quad a_i = \lim\limits_{x \to x_i} (x - x_i) r_1 \quad , \; i = 1, 2, 3$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(x+1)(x-1)} &= -1 \;, \\
a_2 &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{2} \;, \\
a_3 &= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x(x-1)} &= \frac{1}{2} \;.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$r_1 = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

mit einer Stammfunktion $R_1 \; = \; -\ln(x) + \frac{1}{2} \left(\ln(x+1) + \ln(x-1) \right) \; = \; \ln \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right)$.

Probe:

$$\left(\ln \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right) \right)' = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2} = \frac{1}{x^3 - x}$$

(b) Da $1 + x^4$ keine reellen Nullstellen besitzt, ergibt sich für die rationale Funktion

$$r_2 := \frac{1}{1 + x^4}$$

der Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Ferner kann der Nenner in $1 + x^4 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ zerlegt werden, was sich wegen $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i = -\frac{1}{i}$ sowie $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 &= (x^2 - i)(x^2 + i) \\
&= \left(x^2 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(x^2 - e^{i\frac{3\pi}{2}}\right) \\
&= \left(x + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x + e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&= \left(\left(x - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x + e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right) \cdot \left(\left(x + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right) \\
&= \left(x^2 + xe^{-i\frac{\pi}{4}}(e^{i\pi} - e^{i\frac{\pi}{2}}) + 1\right) \cdot \left(x^2 + xe^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) + 1\right) \\
&= \left(x^2 - 2x\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} + 1\right) \cdot \left(x^2 + 2x\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i} + 1\right) \\
&= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{1}{1 + x^4} = \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \;.$$

Mit dem Anzatz

$$r_2 \;=\; \frac{E_1x+F_1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{E_2x+F_2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; (E_1x+F_1)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(E_2x+F_2)(x^2-\sqrt{2}x+1) \\ &=\; x^3(E_1+E_2)+x^2(E_1\sqrt{2}+F_1-E_2\sqrt{2}+F_2) \\ &\quad\; +x(E_1+F_1\sqrt{2}+E_2-F_2\sqrt{2})+(F_1+F_2) \end{aligned}$$

Somit ergeben sich nacheinander $E_1=-E_2$, $F_1=1-F_2$ und

$$x^2(2E_1\sqrt{2}+1)+x(-2F_2\sqrt{2}+\sqrt{2})=0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_1=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\,,\quad E_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,,\quad F_1=F_2=\frac{1}{2}\,.$$

Wir erhalten die Partialbruchdarstellung

$$r_1 \;=\; \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

und (wegen $\frac{E_{1,2}}{2} = \mp\frac{1}{4\sqrt{2}}$, $F_{1,2}-\frac{p_{1,2}E_{1,2}}{2} = \frac{1}{4}$ und $D_{1,2} = q_{1,2}-\frac{p_{1,2}^2}{4} = \frac{1}{2}$) eine Stammfunktion

$$R_2 \;=\; \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(\sqrt{2}x-1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)\Big)\;.$$

Probe:

$$\begin{aligned} R_2' \;&=\; \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x-1)^2}+\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x+1)^2}\right) \\ &=\; \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x^2-2\sqrt{2}x+2}+\frac{1}{2x^2+2\sqrt{2}x+2}\right) \;=\; r_2 \end{aligned}$$

(c) Die Funktion

$$r_3 \;:=\; \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

besitzt die doppelte Polstelle -1. Somit ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ und wir verwenden für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$r_3 \;=\; \frac{A_{1,1}}{x+1}+\frac{A_{1,2}}{(x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\;.$$

Nach der Grenzwertmethode erhalten wir nacheinander

$$A_{1,2} \;=\; \lim_{x\to-1}(x+1)^2r_3 \;=\; \lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2+1} \;=\; \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \lim_{x\to -1}(x-1)\left(r_3 - \frac{A_{1,2}}{(x+1)^2}\right)\\
&= \lim_{x\to -1}\left((x+1)r_3 - \frac{A_{1,2}}{x+1}\right)\\
&= \lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{2(x+1)(x^2+1)}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{1-x}{2(x^2+1)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Somit folgt nun für E und F die Bedingung

$$\frac{1}{2}(x+1)(x^2+1) + \frac{1}{2}(x^2+1) + (Ex+F)(x+1)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad E = -\frac{1}{2}\ , \quad F = 0$$

und wir erhalten die Partialbruchzerlegung

$$r_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}\right)\ .$$

Eine Stammfunktion ist

$$R_3 = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\ .$$

Probe:

$$\begin{aligned}
R_3' &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x+1}\right)'\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)\\
&= r_3
\end{aligned}$$

(d) Für die Funktion $r_4 = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ liefert der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

den Koeffizientenvergleich $A(x-3)+B(x-2) = 2x-1$ mit dem linearen Gleichungssystem

$$\left\{\begin{aligned} A + B &= 2,\\ -3A - 2B &= -1 \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad A = -3,\ B = 5.$$

Eine Stammfunktion R_4 ist demnach

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6} &= -3\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-3}\\
&= -3\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C\\
&= \ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-2)^3}\right| + C.
\end{aligned}$$

(e) Mit dem Ansatz

$$r_5 \;=\; \frac{1}{x^4-1} \;=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

für die entsprechende Partialbruchzerlegung gelangen wir nach Ausmultiplizieren zu

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \;=\; \frac{(A+B)x}{x^2-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\\ &= \frac{((A+B)x+(A-B))(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}\\ &= \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{x^4-1},\end{aligned}$$

so dass sich aus dem Koeffizientenvergleich

$$(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D) \;=\; 1$$

demnach das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\\ D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

ergibt, welches die eindeutige Lösung $(A,B,C,D)^T = (\frac{1}{4},-\frac{1}{4},0,-\frac{1}{2})^T$ besitzt. Somit erhält man eine Stammfunktion

$$R_5 \;=\; \int\frac{dx}{x^4-1} \;=\; \frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} \;=\; \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

Bemerkung:

Oft können bestimmte Integrale nach Substitution in Integrale von rationalen Funktionen überführt werden. Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion zweier Variablen, dann leisten für Integrale der Form

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

die drei EULERschen Substitutionen (in verschiedenen Fällen) das Gewünschte; siehe folgende Aufgabe für ein Beispiel zur 1. EULERschen Substitution.

Hier noch ein anderes Beispiel:

Aufgabe 6.9.

Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion zweier Variablen. Führen Sie durch die Substitution $t \;=\; \tan\frac{x}{2}$ für $-\pi < x < \pi$ das Integral $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion von t zurück.

Lösung zu Aufgabe 6.9.

Die Substitution liefert zunächst $x = 2\arctan t$ sowie $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ (siehe Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion).
Mit $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ und wegen $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ sowie

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \frac{1}{1 + \frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{1 + (\tan\alpha)^2}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

und somit

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Die rechte Seite ist ein Integral einer rationalen Funktion, die wir bereits integrieren können.

Aufgabe 6.10.

(a) Überprüfen Sie die Existenz der uneigentlichen Integrale $(a)\ \int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,\quad (b)\ \int\limits_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Lösung zu Aufgabe 6.10.

(a) Wegen $\int\limits_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_{x=s}^{x=9} = 2(3-\sqrt{s})$ für $s \in (0,3)$ folgt

$$\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\searrow 0}\int\limits_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\searrow 0} 2(3-\sqrt{s}) = 6.$$

(b) Wegen $\int\limits_s^3 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=s}^{x=3} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3}$ existiert das uneigentliche Riemann-Integral $\int\limits_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ **nicht**.

Aufgabe 6.11.

(a) Man berechne die folgenden Integrale:

(b) Man berechne die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int \frac{3\,dx}{\cos^2(4x-2)}, \qquad \text{b)} \int \sin(ax+b)\,dx \quad (a \neq 0), \qquad \text{c)} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+7}\,dx,$$

$$\text{d)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx \quad (a \neq 0,\ b \neq 0), \qquad \text{e)} \int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$$

(c) Man berechne folgende Integrale:

$$\text{a)} \int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\,dx, \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{x^2+4x+5}, \qquad \text{c)} \int \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}\,dx.$$

Aufgabe 6.12.
Bestimmen Sie mittels partieller Integration oder Substitution Stammfunktionen zu

(a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \qquad x > 0$

(b) $g(x) = x\sqrt{1+x^2}$

(c) $h(x) = \cos(x)(1-2x\sin(x))$

Lösung zu Aufgabe 6.12.

(a) Substituiert man $y = \ln(x)$, so erhält man wegen $dy = \frac{1}{x}dx$ gerade

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx \overset{y=\ln(x)}{=} \int ydy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

(b) Substituiert man $y = 1+x^2$, so erhält man wegen $dy = 2xdx$ gerade

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx \overset{y=1+x^2}{=} \frac{1}{2}\int \sqrt{y}dy = frac13y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$$

(c) Wegen $((\cos(x))^2)' = -2\cos(x)\sin(x)$ gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \cos(x)(1-2x\sin(x))dx &= \sin(x) + \int x(-2\cos(x)\sin(x))dx \\ &= \sin(x) + \left(x(\cos(x))^2 - \int (\cos(x))^2dx\right)\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich mittel partieller Integration

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx$$

und daraus wegen $\sin^2 = 1 - \cos^2$ auch

$$2\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + x,$$

also insgesamt

$$\int \cos(x)(1 - 2x\sin(x))dx = \sin(x) + x(\cos(x))^2 - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6.13.
Für das folgende Integral $I_n (n \in \mathbb{N})$ ist eine Rekursionsformeln aufzustellen. Außerdem gebe man jeweils I_0, I_1, I_2, I_3 an.

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx \qquad a \neq 0$$

Lösung zu Aufgabe 6.13.

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}x^n - \int \frac{n}{a}x^{n-1}e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}x^n - \frac{n-1}{n}I_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{e^{ax}}{a} \\
I_1 &= \frac{e^{ax}}{a}x - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a} \\
I_2 &= \frac{e^{ax}}{a}x^2 - \frac{2}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}x - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a}\right) \\
I_3 &= \frac{e^{ax}}{a}x^3 - \frac{3}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}x^2 - \frac{2}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}x - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.14.
Ein stromlinienförmiger Auftriebskörper wird durch Rotation eines Graphen der Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq k^2, k \in \mathbb{R}_+$$

um die x-Achse beschrieben.

(a) Für welchen Wert von k beträgt das Volumen des Rotationskörpers $\frac{64\pi}{192}$ Volumeneinheiten.

(b) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser des Rotationskörpers in Abhängigkeit von k.

(c) Bei Annäherung an $x = 0$ läuft der Rotationskorper spitz zu. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Tangente an den Graphen von f_k mit der x-Achse für $x \to 0$ bildet.

(d) Beit Rotation um die x-Achsen und bei homogener Massenverteilung liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers aus Symmetriegründen auf der x-Achse. Für seine Abzisse x_s gilt

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}.$$

Dabei ist V das Volumen des Rotationskörpers. Berechnen Sie x_s für den Auftriebskörper.

(e) In den Rotationskörper, der von f_k für $k = 3$ erzeugt wurde, soll ein Zylinder mit dem Radius 0.5 und dr Höhe 6 untergevracht werden. Prüfen Sie, ob dieser Zylinder in den Rotationskörper hineinpasst. Bergünden Sie Ihre Entascheidung.

Lösung zu Aufgabe 6.14.

(a) Zuerst bestimmen wir die Schnittpunkte mit der x-Achse, damit wir die Integrationsgrenzen erhalten, dazu setzen wir $f_k(x) = 0$, also

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 0 \\ \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} &= 0 \\ \frac{x^2}{16k^2}(k^2 - x) &= 0 \\ x^2(k^2 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = k^2$.

Nun berechnen wir das Volumen, das bei Rotation von f_k um die x-Achse entsteht. Dieses ist natürlich von k abhängig. Also

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b f_k^2(x) dx \\ &= \pi \int_0^{k^2} \frac{x^2}{16k^2}(k^2 - x) dx \\ &= \frac{\pi}{16k^2} \int_0^{k^2} (k^2x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{\pi}{16k^2} \left(\frac{1}{3}k^2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^{k^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{16k^2} (\frac{1}{3}k^2k^6 - \frac{1}{4}(k^2)^4) \\ &= \frac{\pi}{192}k^6 \end{aligned}$$

Nach Aufgabenstellung gilt, dass $V_x = \frac{64\pi}{192}$, also erhalten wir die Gleichung

$$V_x = \frac{64\pi}{192} = \frac{\pi}{192}k^6$$

und somit die Lösung $k = 2$.

(b) Wir berechnen das lokale Maximum zwischen 0 und k^2. Also bilden wir die erste Ableitung und setzen diese gleich Null.

$$\begin{aligned} f_k'(x) = \frac{\sqrt{k^2-x}}{4k} - \frac{x}{8k\sqrt{k^2-x}} &= 0 \\ k^2 - x &= 2x \\ x &= \frac{2}{3}k^2 \end{aligned}$$

Daher beträgt der maximale Durchmesser d_{max}

$$\begin{aligned} d_{max} &= 2 \cdot f_k(\frac{2}{3}k^2) \\ &= \frac{1}{3}k^2\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(c) Offensichtlich ist

$$\lim_{x\to 0} f_k'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{k^2-x}}{4k} - \frac{x}{8k\sqrt{k^2-x}} = \frac{1}{4}$$

und somit ist der Winkel durch $\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$ gegeben.

(d) Das Volumen hatten wir bereits berechnet, nämlich $V_x = \frac{\pi}{192}k^6$, somit gilt

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\pi\int_0^{k^2} x(f_k(x))^2 dx}{\frac{\pi}{192}k^6} \\ &= \frac{12}{k^8}\int_0^{k^2}(k^2x^3 - x^4)dx \\ &= \frac{12}{k^8}\left(\frac{k^2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^{k^2}\right) \\ &= \frac{13}{k^8}\left(\frac{k^2\cdot(k^2)^4}{4} - \frac{(k^2)^5}{5}\right) \\ &= \frac{3}{5}k^2 \end{aligned}$$

(e) Wir setzen $f_3(x) = \frac{1}{2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{x}{12}\sqrt{9-x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{144}(9-x) &= \frac{1}{4} \\ x^2(9-x) &= 36 \\ -x^3 + 9x^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Probieren erhalten wir näherungsweise die Nullstellen $x_1 \approx 2.322$ und $x_2 \approx 8.502$, somit passt der Zylinder offensichtlich rein ,da $x_2 - x_1 > 6$.

6.3 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 6.1.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie das Integral $\int_a^b \sqrt{x}dx$ als Grenzwert der Riemannschen Obersummen für die Funktion $\sqrt{x}$, $x \in [a, b]$, bzgl. der Zerlegung durch die Punkte $x_k = (\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n})^2$, $k = 0, ..., n$.

Lösung zu Aufgabe 6.1.
Es folgt mit $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$

$$\begin{aligned}
OS(Z_n, f) &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n}\right) \left(\left(\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k-1}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n}\right) \left(2\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{2k-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \sum_{k=1}^{n} \left(2a + \sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{4k-1}{n} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \frac{2k^2 - k}{n^2}\right) \\
&= (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \left(2a + \sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{2n(n+1) - n}{n^2} + \right. \\
&\quad \left. + (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \frac{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

und darum

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{x}dx &= \lim_{n\to\infty} OS(Z_n, f) = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(2a + 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + \frac{2}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2) \\
&= (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{ab} + \frac{2}{3}b\right) \\
&= \frac{2}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(a + \sqrt{ab} + b) \\
&= \frac{2}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{b}\right)^3 - \left(\sqrt{a}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie als Grenzwert von Riemann-Summen $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ den Wert des Integrals $\int_a^b \frac{1}{x^2}dx$ wie folgt: Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung Z_n mit $x_k := a + d\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$, $d := b - a$ und als $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$ das geometrische Mittel von x_{k-1} und x_k.

Lösung zu Aufgabe 6.2.

Es gilt $\xi_k := \sqrt{(a+d\frac{k}{n})(a+d\frac{k-1}{n})}$ und

$$\begin{aligned}
RS(Z_n, f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+d\frac{k}{n})(a+d\frac{k-1}{n})}\frac{d}{n} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{(na+kd)(na+(k-1)d)} \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+(k-1)d} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+kd}\right) \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{na+kd} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+kd}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{na} - \frac{1}{na+nd}\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Wobei wir

$$\frac{d}{(na+kd)(na+(k-1)d)} = \frac{1}{na+(k-1)d} - \frac{1}{na+kd}$$

benutzt haben. Also ist

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{n\to\infty} RS(Z_n, f) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Aufgabe 6.3.

(a) Geben Sie eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ an, die auf (a,b) differenzierbar ist, deren Ableitung jedoch unbeschränkt ist und somit nicht Riemann-integrierbar.

(b) Geben sie eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die nicht Riemann-integrierbar ist, deren betrag $|g|$ es aber ist.

Lösung zu Aufgabe 6.3.

(a) Die Funktion $F(x) = \sqrt{x}$ tut das Gewünschte.

(b) Die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \end{cases}$$

tut das Gewünschte.

Aufgabe 6.4.

Bestimmen Sie mittels partieller Integration oder Substitution Stammfunktionen zu

(a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \qquad x > 0$

(b) $g(x) = x\sqrt{1+x^2}$

(c) $h(x) = \cos(x)(1-2x\sin(x))$

Lösung zu Aufgabe 6.4.

(a) Substituiert man $y = \ln(x)$, so erhält man wegen $dy = \frac{1}{x}dx$ gerade

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx \overset{y=\ln(x)}{=} \int ydy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

(b) Substituiert man $y = 1+x^2$, so erhält man wegen $dy = 2xdx$ gerade

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx \overset{y=1+x^2}{=} \frac{1}{2}\int \sqrt{y}dy = frac13y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$$

(c) Wegen $((\cos(x))^2)' = -2\cos(x)\sin(x)$ gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \cos(x)(1-2x\sin(x))dx &= \sin(x) + \int x(-2\cos(x)\sin(x))dx &\quad (6.4)\\ &= \sin(x) + \left(x(\cos(x))^2 - \int (\cos(x))^2dx\right) &\quad (6.5)\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich mittel partieller Integration

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx$$

und daraus wegen $\sin^2 = 1-\cos^2$ auch

$$2\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + x,$$

also insgesamt

$$\int \cos(x)(1-2x\sin(x))dx = \sin(x) + x(\cos(x))^2 - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6.5.
(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)}\ -\int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^2 (x^5 - 3x^2 + x - 7)\,dx, \qquad \text{(c)}\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx,$$

(ii) Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an

$$\text{(d)}\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \text{(e)}\ \int r\cos t\,dt, \qquad \text{(f)}\ \int \frac{dx}{2x}, \qquad \text{(g)}\ \int x\sqrt{x}\,dx, \qquad \text{(h)}\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

(i) $\int \frac{x^2-3x+4}{x}\,dx$, (j) $\int \frac{x^2-x+1}{x-2}\,dx$, (k) $\int \frac{x^4}{x-1}\,dx$, (l) $\int e^{-x}\,dx$.

Lösung zu Aufgabe 6.5.

(a)

$$-\int \cos(x)dx = -\left(\sin(x)\Big|_{x=\pi}^{x=2\pi}\right) = 0$$

(b)

$$\int_0^2 (x^5-3x^2+x-7)dx = \left(\frac{1}{6}x^6 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7x\Big|_{x=0}^{x=2}\right) = \frac{64}{6} - 8 + 2 - 14 = \frac{-28}{3}$$

(c)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2(x)} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \left(-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

(d)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left(\arctan(x)\Big|_{x=0}^{x=1}\right) = \arctan(1)$$

(e)

$$\int r\cos(t)dt = r\sin(t)$$

(f)

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln(2x)$$

(g)

$$\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

(h)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}$$

(i)

$$\int \frac{x^2-3x+4}{x}dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln(x)$$

(j)

$$\int \frac{x^2-x+1}{x-2}dx = \int x+1+\frac{3}{x-2}dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln(x-2)$$

(k)

$$\int \frac{x^4}{x-1}dx = \int x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1)$$

(l)

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

6.4 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 6.1.
Man berechne folgende Integrale durch partielle Integration:

(a) $\int x^2 \ln x \, dx$, (b) $\int\limits_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$, (c) $\int (x^2+x) \ln(x+1) \, dx$, (d) $\int x^2 \sin x \, dx$,

(e) $\int \ln x \, dx$, (f) $\int x \ln x^2 \, dx$, (g) $\int x \arctan x \, dx$, (h) $\int\limits_1^2 x^{-2} \ln x \, dx$

Lösung zu Aufgabe 6.1.

(a)
$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3$$

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = -\cos(x)x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(c)
$$\begin{aligned}
\int (x^2+x)\ln(x+1) dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\ln(x+1) - \int \frac{2x+1}{x+1} dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\ln(x+1) - \int \frac{2x+2}{x+1} - \frac{1}{x+1} dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\ln(x+1) - 2x + \ln(x+1)
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x) dx &= -\cos(x)x^2 + \int 2x\cos(x) dx \\
&= -\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x) dx \\
&= -\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x)
\end{aligned}$$

(e)
$$\int \ln(x) dx = \frac{1}{x}$$

(f)
$$\begin{aligned}
\int x \ln(x^2) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x^2) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x^2} 2x dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\int x\arctan(x)dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x^2}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan(x)\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\ln(x)}{x^2}dx &= -\frac{\ln(x)}{x}\Big|_{x=1}^{x=2}+\int_1^2\frac{1}{x}\frac{1}{x}dx\\ &= -\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=2}\\ &= -\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2.
(a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{9}(x^2+10x+9)\sqrt{x+1}dx$$

Tipp: Substituiere $y := x+1$.

(b)Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $E := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.2.

(a) Mit der Substitution $y := x+1$ erhält man

$$\int_0^{10}(y^2+8y)\sqrt{y}dy = \int_0^{10}(y^{\frac{5}{2}}+8y^{\frac{3}{2}})dy = \left(\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}+\frac{16}{5}y^{\frac{5}{2}}\Big|_{y=0}^{y=10}\right) = 4240\frac{\sqrt{10}}{7}$$

(b) Der Flächeninhalt A ist gegeben durch $A = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$. Wir verwenden die Substitution $x := a\sin(t)$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$; diese ist in der Tat eine Bijektion. Für $t\in[0\frac{\pi}{2}]$ gilt $\sqrt{1-\sin^2(t)}=\sqrt{\cos^2(t)}=\cos(t)$, da dann $\cos(t)\geq 0$. Darum gilt

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt.$$

Mit der Identität $\cos(2t) = 2\cos^2(t)-1$ gilt dann

$$A = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t)dt = 2ab\left(t+\frac{\sin(2t)}{2}\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\right) = \pi ab.$$

Aufgabe 6.3.
Berechnen Sie mittels Substitution die Integrale

(a) $\int_{-5}^{0} \frac{6}{1-3x} dx$

(b) $\int_{1}^{4} 3\sqrt{8x-4} dx$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-7}}$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} dx$

(e) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx$

(f) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+8} dx$

(g) $\int_{0}^{1} (6x+3)e^{x^2+x+5} dx$

(h) $\int_{2}^{5} 3e^x \sqrt{e^x+1} dx$

Lösung zu Aufgabe 6.3.

(a)

$$\int_{-5}^{0} \frac{6}{1-3x} dx \overset{y=1-3x}{=} 6\int_{16}^{1} \frac{1}{y} \frac{dy}{(-3)} = 2\ln(y)\Big|_{1}^{16} = 2\ln(16)$$

(b)

$$\int_{1}^{4} 3\sqrt{8x-4} dx \overset{y=8x-4}{=} 3\int_{4}^{28} \sqrt{y} \frac{dy}{8} = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{4}\Big|_{4}^{28} = \frac{1}{4}\left(28^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$$

(c)

$$\int \sqrt[3]{5x-7} dx \overset{y=5x-7}{=} \int \sqrt[3]{y} \frac{dy}{5} = \frac{3}{20} y^{\frac{4}{3}} = \frac{3(5x-7)^{\frac{4}{3}}}{20}$$

(d)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} dx \overset{y=x^2+8}{=} \int \frac{\sqrt{y-8}}{\sqrt{y}} \frac{dy}{2\sqrt{y-8}} = \sqrt{y} = \sqrt{x^2+8}$$

(e)

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx \overset{y=x^2+4x+7}{=} \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) = \ln(x^2+4x+7)$$

(f)

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+8} dx \overset{y=x^2-5x+8}{=} \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) = \ln(x^2-5x+8)$$

(g)

$$\int_{0}^{1} (6x+3)e^{x^2+x+5} dx \overset{y=x^2+x+5}{=} \int_{5}^{7} (6x+3)e^{y} \frac{dy}{2x+1} = 3e^y\Big|_{5}^{7} = 3(e^7 - e^5)$$

(h)

$$\int_{2}^{5} 3e^x\sqrt{e^x+1} dx \overset{y=e^x+1}{=} \int_{e^2+1}^{e^5+1} 3\sqrt{y} dy = 2y^{\frac{3}{2}}\Big|_{e^2+1}^{e^5+1} = 2\left((e^5+1)^{\frac{3}{2}} - (e^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$$

6.5 Aufgabenserie mit Lösungen

Aufgabe 6.1.
Für die folgenden Integrale $I_n (n \in \mathbb{N})$ sind Rekursionsformeln aufzustellen. Außerdem gebe man jeweils I_0, I_1, I_2, I_3 an.

(a) $I_n = \int x(\ln(x))^n dx$

(b) $I_n = \int \cos^n(x) dx$

Lösung zu Aufgabe 6.1.

(a)

$$\begin{aligned} I_n = \int x(\ln(x))^n dx &= \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^n - \int \frac{1}{2}x^2 n(\ln(x))^{n-1}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^n - \frac{n}{2}\int x(\ln(x))^{n-1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^n - \frac{n}{2}I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2}x^2 \\ I_1 &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right) \\ I_3 &= \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^3 - \left(\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} I_n = \int \cos^n(x)dx &= \int \cos(x)\cdot\cos^{n-1}(x)dx \\ &= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^2(x)\cos^{n-2}(x)dx \\ &= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int (1-\cos^2(x))\cos^{n-2}(x)dx \\ &= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

also

$$I_n = \sin(x)\cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= x \\ I_1 &= \sin(x) \\ I_2 &= \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x \\ I_3 &= \sin(x)\cos^2(x) + \frac{2}{3}\left(\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2.

(a) Geben Sie einen Ansatz für die Partialbruchbruchzerlegung von

$$\frac{x^7 - 7x^6 + 6x^4 - 3x^5 + 17x^2 + 25}{x^3(x-2)^2(x+3)^3(x^2+x+1)^4}$$

an. Die unbekannten Koeffizienten sollen nicht berechnet werden.

(b) Man berechne folgende Integrale:

$$(a) \int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx,$$
$$(b) \int \frac{x^2-31x+94}{x^3+4x^2-19x+14}\,dx,$$
$$(c) \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx,$$
$$(d) \int \frac{2x^4+5x^3-2x^2+3x}{x(x+3)^2}\,dx.$$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit MAPLE. Es bietet sich an, eine rationale Funktion $f(x)$ mit $convert(f(x), parfrac)$ in Partialbrüche zu zerlegen.

Literaturverzeichnis

[1] Dipl.-Math. Janine Erdmann, Dr. rer. nat. Jochen Merker und Dipl.-Math. Katja Ihsberner *“Analysis 1 - Zusatzaufgaben, Übungsserien”*, Rostock, 2004-2009

[2] H. Wenzel und G. Heinrich *“Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler”*, B. G. Teubner , Stuttgart/Leipzig, 1999

[3] Otto Forster *“Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen”*, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1983

[4] Otto Forster und Rüdiger Wessoly *“Übungsbuch zur Analysis 1”*, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1995

[5] Konrad Königsberger *“Analysis 1”*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004

[6] Harro Heuser *“Lehrbuch der Analysis, Teil 1”*, B. G. Teubner , Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2003

[7] Karl Bosch *“Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung”*, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999