Übungsskript Spieltheorie II

Carsten Erdmann

13. April 2010

Aufgabenblatt I – Superspiele

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende 2 x 2-Spiel G:

1 \ 2	a	b
A	7, 7	1, 9
B	10, 1	6, 6

G sei nun Quellenspiel eines Superspiels mit 4 Perioden.

a) Wie viele Strategien hat Spieler 1 in diesem Superspiel?

b) Ist ein Paar von Tit-for-Tat-Strategien ein Nash-Gleichgewichtspaar für dieses Superspiel? Begründen Sie Ihre Feststellung.

c) Angenommen, Spielerin 2 setzt in diesem Superspiel eine *Tit-for-Tat-Strategie* ein. Was ist die höchste Auszahlung, die Spieler 1 dann (durch Wahl einer geeigneten (Gegen-) Strategie) in diesem Superspiel erreichen kann?

Aufgabe 2

Gegeben sei das folgende 3 x 3-Spiel G:

1 \ 2	A	B	C
A	5, 5	0, 6	0, 20
B	6, 0	3, 3	0, 0
C	20, 0	0, 0	1, 1

G sei nun Quellenspiel eines Superspiels mit 4 Perioden.

a) Wie viele Strategien hat Spieler 1 in diesem Superspiel?

b) Angenommen, Spielerin 2 folgt einer sinngemäß auf dieses Superspiel übertragene Tit-for-Tat-Strategie, d.h., Spielerin 2 setzt in Periode 1 die Quellenspiel-Strategie A ein und initiiert in nachfolgenden Perioden das Verhalten von Spieler 1 aus der jeweiligen Vorperiode. Was ist die höchste Auszahlung, die Spieler 1 dann in diesem Superspiel (durch Wahl einer geeigneten (Gegen-) Strategie) erreichen kann?

Aufgabe 3

Gegeben sei das folgende 2 x 2-Spiel G:

1 \ 2	a	b
A	5, 2	-1, 1
B	1, -1	2, 5

Betrachten Sie jetzt die einmalige Wiederholung von G, d.h., das Superspiel mit 2 Perioden, das G als Quellenspiel hat; dabei sei die Auszahlung an einen Spieler bzw. eine Spielerin in diesem Superspiel durch die Summe seiner bzw. ihrer Auszahlungen in den beiden Perioden gegeben. Geben Sie einen teilspielperfekten (Nash-)Gleichgewichtspunkt (in reinen Strategien) $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*)$ für dieses Superspiel an, der zu der gleichen Auszahlung an beide Spieler führt.

Aufgabe 4

Gegeben sei das folgende Spiel vom Gefangenen-Dilemma-Typ:

1 \ 2	a	b
A	5, 5	1, 6
B	6, 1	4, 4

a) Das vorangehende Spiel sei Quellenspiel eines Superspiels der Länge 3 (3 Perioden). Wie viele Strategien hat ein Spieler (Spieler 1 bzw. Spielerin 2) in diesem Superspiel?

b) Geben Sie das Paar von Strategien an, das ein teilspielperfektes Gleichgewicht für dieses Superspiel ist.

c) Dieses Spiel sei nun Quellenspiel eines unendlichen Superspiels (unendlich oft wiederholtes Gefangenen-Dilemma-Spiel). Der Spieler 1 folgt einer *grimmigen Strategie*. Die Strategie von Spielerin 2 wird hier nicht näher spezifiziert. Beschreiben Sie das Verhalten von Spieler 1, das aus seiner Strategiewahl resultiert (d.h., die Funktionsweise einer Grimmigen Strategie).

d) Dieses Spiel sei jetzt Quellenspiel eines Superspiels mit 3 Perioden, wobei Spieler 1 eine Tit-for-Tat-Strategie einsetzt. Welches ist die höchste Auszahlung, die Spielerin 2 erreichen kann? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende Spiel G:

I \ II	1	2
1	7, 7	3, 12
2	12, 3	4, 4

G sei Quellenspiel eines (undiskontierten) Superspiels mit 2 Perioden. Geben Sie einen Nash-Gleichgewichtspunkt für dieses Superspiel an.

Aufgabe 6

Gegeben sei das folgende Spiel G:

1 \ 2	a	b	c
A	0, 0	0, 0	1, 1
B	5, 5	0, 6	0, 0
C	6, 0	3, 3	0, 0

a) Bestimmen Sie die Nash-Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien für das Spiel G.

b) G sei nun Quellenspiel eines undiskontierten Superspiels mit 2 Perioden. Geben Sie für dieses Superspiel ein Nash-Gleichgewicht an, in welchem jeder Spieler in der ersten Periode die Auszahlung 5 erhält.

c) Wie viele Informationsbezirke hat Spieler 1 in diesem Superspiel (in der Baumdarstellung)?

d) Wie viele Endpunkte hat dieses Superspiel (in der Baumdarstellung)?

Aufgabe 7

Gegeben sei das folgende Spiel G:

I \ II	1	2
1	3 3	0 6
2	6 0	1 1

a) G sei Quellenspiel eines (undiskontierten) unendlichen Superspiels. Welche Auszahlung erhält Spieler I, wenn beide Spieler eine grimmige Strategie einsetzen?

b) G sei jetzt Quellenspiel eines Superspiels mit 3 Perioden. Spielerin II setze eine Tit-for-Tat-Strategie ein (d.h., sie beginnt kooperativ (Quellenspielstrategie 1 in Periode 1) in den nachfolgenden Perioden repliziert sie das Verhalten ihres Mitspielers in der jeweiligen Vorperiode). Spieler I erhalte als Auszahlung die Summe seiner Periodenauszahlungen (Entsprechendes gelte für Spielerin II). Was ist die höchste Auszahlung, die Spieler I erreichen kann? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 8

Gegeben sei das folgende Spiel G vom Gefangenen-Dilemma-Typ:

I \ II	1	2
1	b b	d a
2	a d	c c

Für die Auszahlungswerte gilt dann: $a > b > c > d$ sowie $2c > a + d$.

G sei Quellenspiel eines (undiskontierten) Superspiels mit 8 Perioden.

a) Begründen Sie (mit wenigen Sätzen), dass dieses Superspiel nur eine Gleichgewichtspartie (Gleichgewichtsverlauf) hat und geben Sie diese Partie an!

b) Das Spiel G vom Gefangenen-Dilemma-Typ aus Teilaufgabe a) sei Quellenspiel eines (undiskontierten) unendlichen Superspiels. Für dieses Superspiel konstituiert ein Paar von so genannten grimmigen Strategien ein Nash-Gleichgewicht. Beschreiben Sie kurz (formal oder mit Worten) die Funktionsweise einer grimmigen Strategie für dieses Superspiel. Welche Auszahlung erhält Spieler I in diesem Superspiel, falls ein Paar von grimmigen Strategien zum Einsatz kommt? Begründen Sie kurz, warum ein Paar von grimmigen Strategien kein Nash-Gleichgewicht für das Superspiel aus Teilaufgabe a) ist.

Aufgabe 9

Gegeben sei ein 2-Personen-Spiel in Normalform $G = (\prod_1, \prod_2; H)$. Die Menge der reinen Strategien von Spieler 1, $\prod_1$, enthalte genau 5 Strategien, die Menge der reinen Strategien von Spielerin 2, $\prod_2$, enthalte genau 7 Strategien.

a) Das Spiel G sei Quellenspiel eines 2-periodigen Superspiels. Wie viele (reine) Strategien hat Spieler 1 in diesem Superspiel?

b) Das Spiel G sei jetzt Quellenspiel eines 5-periodigen Superspiels. Wie viele (reine) Strategien hat Spielerin 2 in diesem Superspiel?

Aufgabe 10

Gegeben sei ein 2x2 Spiel in Normalform:

1 \ 2	L	R
L		
R		

Die Auszahlungen spielen für das Folgende keine Rolle und sind dementsprechend nicht explizit genannt. Betrachten Sie nun das 2-periodige Superspiel mit dem vorangehenden 2x2 Spiel als Quellenspiel.

Geben Sie für Spieler 1 diejenige Superspiel-Strategie an, die zum Ausdruck bringt, dass Spieler 1 in beiden Runden stets „L" spielen wird.

Aufgabe 11

Nehmen wir an, zwei Unternehmen A und B, die sich einen Markt teilen, bilden ein Kartell. Es gibt außerdem keine Möglichkeit für andere Unternehmen, in den Markt einzutreten. Wenn beide Unternehmen kooperieren, machen sie Gewinne von jeweils 500.000 Euro pro Periode. Betrügt Unternehmen A, während B noch kooperiert, wird A einen Gewinn von 750.000 Euro und B einen Gewinn von 0 Euro erzielen. Wenn umgekehrt Unternehmen B betrügt, während A kooperiert, erzielt B 750.000 Euro und A 0 Euro Gewinn. Wenn beide Unternehmen betrügen, beträgt ihr Gewinn jeweils 200.000 Euro. Nehmen wir an, dieses Spiel wird einmal wiederholt. Spieler B legt sich in Runde 1 auf eine Kooperationsstrategie fest und wird in Runde 2 die Strategie anwenden, die A in Runde 1 gewählt hat. Wird diese Strategie Spieler A davon abhalten zu betrügen? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 12

a) Gegeben sei ein Normalform-Spiel $G = (\Pi_1, \Pi_2; H)$ mit $\Pi_1 = \{A, B\}, \Pi_2 = \{a, b, c, d\}$. Betrachten Sie nun das Superspiel mit 2 Perioden mit G als Quellenspiel. Geben Sie eine beliebige Strategie von Spieler 1 für dieses Superspiel an. Wie viele Strategien hat Spielerin 2 in diesem Superspiel? Betrachten Sie jetzt das dreiperiodige Superspiel mit G als Quellenspiel. Wie viele Strategien hat Spieler 1 in diesem Superspiel?

b) Gegeben sei ein Normalform-Spiel G = $(\Pi_1, \Pi_2; H)$ mit $\Pi_1 = \{A, B, C\}$ und $\Pi_2 = \{a, b, c\}$. Betrachten Sie das Superspiel mit 4 Perioden und G als Quellenspiel. Wie viele Strategien hat Spieler 1 in diesem Superspiel?

c) Betrachten Sie das Superspiel, das aus der 5-mailgen Wiederholung eines Spiels vom Gefangenen-Dilemma-Typ hervorgeht. Ist ein Paar von Grimmigen Strategien ein Nash-Gleichgewicht eines solchen Superspiels? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 13

Gegeben sei das folgende Spiel in Normalform:

I \ II	C	D	E
A	6 4	0 0	2 5
B	0 0	3 1	0 0

Betrachten Sie jetzt das Superspiel, das sich ergibt, wenn das vorangehende Quellenspiel zweimal hintereinander gespielt wird (Superspiel der Länge 2). Hierbei ist die Auszahlung des Superspiels an einen Spieler die Summe der Auszahlungen der beiden Perioden an diesen Spieler. Jeder der beiden Spieler erfährt vor der zweiten Periode, was der andere in der ersten gespielt hat.

a) Welche der reinen Strategienkombinationen des Quellenspiels sind Gleichgewichtspunkte?

b) Wie viele reine Strategien hat Spieler 1, und wie viele reine Strategien hat Spielerin 2 in dem vorangehend beschriebenen Superspiel?

c) Finden Sie einen Gleichgewichtspunkt in reinen Strategien für das vorangehend beschriebene Superspiel.

Aufgabe 14

Zwei Firmen I und II haben beschlossen, als Kartell am Markt aufzutreten. Falls beide Firmen an ihrer Kartellvereinbarung festhalten, wird jede von ihnen einen Gewinn von 100000 EURO erzielen. Falls jede der beiden Firmen die Kartellvereinbarung bricht, so erzielt jede von ihnen einen Gewinn von 25 000 EURO. Falls die Kartellvereinbarung einseitig gebrochen wird, so erzielt die Firma, die die Kartellvereinbarung bricht, einen Gewinn von 150 000 EURO, während die Firma, die an der Kartellvereinbarung festhält, einen Verlust von 12 500 EURO erleidet.

Gehen Sie jetzt davon aus, dass die vorangehend beschriebene Interaktion zwischen den Firmen I und II nicht nur auf eine einzige Periode begrenzt ist, sondern vor einem unbestimmten (d.h. unendlichen) Zeithorizont zu sehen ist. Kann die Kartellvereinbarung ein rationales (d.h. gleichgewichtiges) Verhalten in diesem (unendlichen) Superspiel sein? Geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Gleichgewicht an.

Universität Rostock **29. Juli 2009**
Spieltheorie II - SS 2009
Carsten Erdmann

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

(a) Die Anzahl der Strategien eines Spielers kann man wie folgt herleiten. Seien dazu z_i die Anzahl der möglichen Züge des Spielers $i, i = 1, ..., n$ in einer Periode. Dann ist die Anzahl der Informationsbezirke $\Im_i$ des Spielers i wie folgt bestimmt

$$\Im_i = \sum_{k=0}^{d-1} \prod_{j=1}^{n} z_j^k,$$

wobei d die Anzahl der Perioden angibt. Im Fall mit 2 Spielern folgt

$$\Im_i = \sum_{k=0}^{d-1} (z_1 \cdot z_2)^k = \frac{1-(z_1 z_2)^d}{1 - z_1 z_2}. \qquad (*)$$

Die Anzahl der möglichen Strategien Υ_i für Spieler i errechnet sich dann durch

$$\Upsilon_i = z_i^{\frac{1-(z_1z_2)^d}{1-z_1z_2}} \qquad i = 1, 2. \qquad (:-))$$

In diesem Fall ist $d = 4$ und $z_1 = z_2 = 2$, es folgt für die Anzahl der Strategien von Spieler 1 Υ_1

$$\Upsilon_1 = 2^{\frac{1-4^4}{1-4}} = 2^{85}.$$

(b) Die Tit for Tat - Strategie zeichnet sich dadurch aus, dass sie in Periode 1 mit einem kooperativen Verhalten beginnt. In den darauffolgenden Perioden wählt man dann jeweils den Zug, den der andere Spieler in der Periode zuvor eingesetzt hat. Verwenden hier nun beide eine Tit for Tat - Strategie spielt jeder Spieler in jeder der 4 Perioden immer nur a bzw. A. Wir haben also die Partie $((A, a), (A, a), (A, a), (A, a))$.

Offensichtlich kann sich ein Spieler besser stellen, wenn er in der letzten Runde B bzw. b spielt, denn dann kann der andere nicht mehr reagieren. Also handelt es sich nicht um ein Gleichgewicht.

(c) Die maximale Auszahlung kann Spieler 1 erreichen, indem er in den ersten 3 Perioden A spielt und in der $4.$ Periode B spielt. Damit erreicht er die Auszahlung 31. Alle anderen Partien führen zu einer geringeren Auszahlung, denn wählt Spieler 1 in einer Periode $\tau \neq 4$ den Zug B so erhält er zwar die Auszahlung 10 in Periode τ, dafür aber insgesamt in den anderen Perioden eine Auszahlungen < 21.

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Wegen (:-)) hat Spieler 1

$$\Upsilon_1 = 3^{\frac{1-9^4}{1-9}} = 3^{820}$$

Strategien in diesem 4-periodigen Superspiel.

(b) Spieler 1 kann sich die Auszahlung 45 sichern, indem die Partie $((A, A)(C, A), (A, C), (C, A))$ gespielt wird.

Lösung zu Aufgabe 3

	Periode 1	—Periode 2			
		Aa	Ab	Ba	Bb
π_1^*	A	B	B	B	A
π_2^*	a	b	b	b	a

$$\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*) = ((A, B, B, B, B), (a, b, b, b, b))$$

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Wegen (:-)) hat Spieler 1

$$\Upsilon_1 = 2^{\frac{1-4^3}{1-4}} = 2^{21}$$

Strategien in diesem 3-periodigen Superspiel.

(b)

	Periode 1	Periode 2			
		Aa	Ab	Ba	Bb
π_1^*	B	B	B	B	B
π_2^*	b	b	b	b	b

	Periode 3							
	AAaa	AAab	AAba	AAbb	ABaa	ABab	ABba	ABbb
π_1^*	B	B	B	B	B	B	B	B
π_2^*	b	b	b	b	b	b	b	b

	Periode 3							
	BAaa	BAab	BAba	BAbb	BBaa	BBab	BBba	BBbb
π_1^*	B	B	B	B	B	B	B	B
π_2^*	b	b	b	b	b	b	b	b

(c) Spieler 1 wird in Periode 1 ein kooperatives Verhalten zeigen. Weiterhin weicht Spieler 1 nicht als erster von einem Kooperativen Verhalten ab. Weicht Spieler 2 einmal vom kooperativen Verhalten ab, dann reagiert Spieler 1 damit, dass er in den darauffolgenden Perioden nur noch unkooperatives Verhalten zeigt.

(d) Spielerin 2 kann sich maximal die Auszahlung 16 sichern, es wird also die Partie $((A, a), (A, a), (A, b))$ gespielt.

Lösung zu Aufgabe 5

Ein Nash-Gleichgewichtspunkt ist gegeben durch

$$\Pi^* = (\Pi_1^*, \Pi_2^*) = ((2,2,2,2,2),(2,2,2,2,2)).$$

Lösung zu Aufgabe 6

(a) Nash-Gleichgewichtspunkte sind (C, b) und (A, c).

(b)

	Periode 1	Periode 2								
		Aa	Ab	Ac	Ba	Bb	Bc	Ca	Cb	Cc
π_1^*	B	C	C	C	C	A	C	A	C	C
π_2^*	a	b	b	b	b	c	b	c	b	b
Auszahlung Sp. 1		3	3	4	8	1	3	7	6	3
Auszahlung Sp. 2		3	3	4	8	7	3	1	6	3

Bei (π_1^*, π_2^*) handelt es sich um ein Gleichgewicht, da keiner der Spieler einen Abweichungsanreiz hat. Bei Nichtabweichung würde jeder die Auszahlung 8 bekommen, bei Abweichung würde sich der Abweichler auf alle Fälle schlechter stellen.

(c) Spieler 1 hat wegen (*) 10 Informationsbezirke.

(d) Es existieren 81 Endpunkte

Lösung zu Aufgabe 7

(a) Spieler 1 erhält in jeder Periode die Auszahlung 3, weil beide Spieler sich aufgrund der grimmigen Strategie am Anfang an kooperativ verhalten. Weiterhin werden sie nicht von diesem Verhalten abweichen, da sie sich ansonsten schlechter stellen würden.

(b) Die höchste Auszahlung, die sich Spieler 1 sichern kann beträgt 12. Es wird entweder die Partie $((1,1),(1,1),(2,1))$ oder die Partie $((2,1),(1,2),(2,1))$ gespielt.

Lösung zu Aufgabe 8

(a) Die Gleichgewichtspartie sieht so aus, dass jeder der beiden Spieler in jeder Periode den Zug 2 spielt, also unkooperatives Verhalten zeigt. Angenommen, es gibt noch eine weitere Gleichgewichtspartie. Man kann sich dann überlegen, dass eine Kombination in der der eine Spieler in einer Periode den Zug 1 spielt und der andere in der selben Periode den Zug 2 spielt kein Gleichgewicht definiert, denn dann könnte sich der Spieler mit der niedrigeren Auszahlung d dadurch verbessern, dass er den selben Zug wie der andere Spieler spielt.

Das heißt man muss noch den Fall betrachten, dass von beiden Spielern in jeder Periode der Zug 1 gespielt wird. Dies definiert jedoch ebenfalls kein Gleichgewicht, da sich ein Spieler dadurch verbessern kann, dass er in der letzten Periode vom kooperativen Verhalten abweicht. Dies assoziert der andere Spieler jedoch schon in der vorherigen Periode und durch Rückwärtsinduktion folgt, dass in jeder Periode von beiden Spielern der Zug 2 gespielt wird. (unkooperatives Verhalten)

(b) Bei einer grimmigen Strategie wird in Periode 1 ein kooperatives Verhalten gezeigt. Weiterhin weicht man nicht als erster von dem kooperativen Verhalten ab. Weicht der andere Spieler einmal vom kooperativen Verhalten ab, z.B. in Periode τ, dann reagiert man damit, dass man in den darauffolgenden Perioden, also ab der $(\tau+1)$ Periode, nur noch unkooperatives Verhalten zeigt.

Spieler 1 erhält in jeder Periode eine Auszahlung in Höhe von b, es wird also kooperatives Verhalten gezeigt. Dies ist kein Nash Gleichgewicht, für den endlichen Fall, da im endlichen Fall wie in (a) gezeigt nur ein Gleichgewichtsverlauf existiert, nämlich immer nur unkooperatives Verhalten zu zeigen.

Lösung zu Aufgabe 9

(a) Spieler 1 hat wegen (:-)) genau $5^{\frac{1-35^2}{1-35}} = 5^{36}$ reine Strategien in diesem 2-periodigen Superspiel.

(b) Spieler 2 hat wegen (:-)) genau $7^{\frac{1-35^5}{1-35}}$ reine Strategien in diesem 5-periodigen Superspiel.

Lösung zu Aufgabe 10

	Periode 1	Periode 2			
		LL	LR	RL	RR
π_1	L	L	L	L	L

$$\pi_1 = (L, L, L, L, L)$$

Lösung zu Aufgabe 11

Nein, denn wenn A immer kooperiert, beträgt seine Auszahlung $1.000.000$ Euro. Wenn er in Periode 1 kooperiert und in Periode 2 betrügt, erhält er $1.250.000$ Euro, also hält es ihm nichts vom Betrügen ab.

Lösung zu Aufgabe 12

(a) Eine mögliche Strategie von Spieler 1 lautet

	Periode 1	Periode 2							
		Aa	Ab	Ac	Ad	Ba	Bb	Bc	Bd
π_1	B	B	B	B	B	B	B	B	B

$$\pi_1 = (B, B, B, B, B, B, B, B, B)$$

Spieler 2 hat wegen (:-)) genau 4^9 reine Strategien im 2-periodigen Fall.
Spieler 1 hat wegen (:-)) genau $2^{\frac{1-8^3}{1-8}} = 2^{73}$ Strategien im 3-periodigen Fall.

(b) Spieler 1 hat wegen (:-)) genau $3^{\frac{1-9^4}{1-9}} = 3^{820}$ mögliche Strategien im 4-periodigen Fall.

(c) Nein, denn für das endliche Gefangendilemma-Superspiel gibt es nur eine Gleichgewichtspartie, nämlich dass jeder Spieler in jeder Periode unkooperatives Verhalten zeigt. Bei der grimmigen Strategie wird jedoch in Periode 1 kooperatives Verhalten gezeigt. Somit kann es sich nicht um ein Gleichgewichtspunkt handeln.

Lösung zu Aufgabe 13

(a) Offensichtlich wird Strategie C durch Strategie E stark dominiert. Es folgt, dass in reinen Strategien nur die Gleichgewichtspunkte (A, E) und (B, D) existieren.

(b) Spieler 1 hat wegen (:-)) genau 2^7 reine Strategien in diesem 2-periodigen Superspiel.
Spieler 2 hat wegen (:-)) genau 3^7 reine Strategien in diesem 2-periodigen Superspiel.

(c)

	Periode 1	Periode 2					
		AC	AD	AE	BC	BD	BE
π_1^*	A	A	A	B	A	A	A
π_2^*	C	E	E	D	E	E	E
Auszahlung Sp. 1		8	2	5	2	5	2
Auszahlung Sp. 2		9	5	6	5	6	5

$$\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*) = ((A, A, A, B, A, A, A), (C, E, E, D, E, E, E))$$

Lösung zu Aufgabe 14

Ja, na logisch kann die Kartellvereinbarung in diesem unendlichen Superspiel zu einem gleichgewichteten Verhalten führen.

Man betrachte nur mal ein Paar von grimmigen Strategien. In dem Fall wäre es auf alle Fälle negativ vom kooperativen Verhalten abzuweichen. Falls dann eine Firma in irgendeiner Periode τ unkooperatives Verhalten zeigen würde, dann hätte sie zwar in Periode τ 50.000 Euro mehr als im Falle des kooperativen Verhaltens, dafür aber in jeder nachfolgenden Periode mindestens 75.000 Euro weniger als im Falle des kooperativen Verhaltens. Also würde sich unterm Strich ein Abweichen nicht lohnen. Daher ist ein Paar von grimmigen Strategien ein Gleichgewicht.

Aufgabenblatt 2 – Der Shapley-Wert

Aufgabe 1
Gegeben sei das folgende Spiel v in charakteristischer Funktionsform: Die Spielermenge sei N = {1, 2, 3}. v habe die folgenden Werte:

$v(1) = 1; \quad v(2) = 3; \quad v(3) = 5$
$v(12) = 5; \quad v(13) = 7; \quad v(23) = 11$
$v(123) = 15$

Berechnen Sie die Shapley-Werte der beteiligten Spieler.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie für die folgenden Spiel v in charakteristischer Funktionsform den Shapley-Wert (d.h. die Shapley-Werte der beteiligen Spieler):

a) $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(12) = v(13) = 1; \quad v(23) = 0$
$v(123) = 1$

b) $v(1) = 0, \quad v(2) = 1, \quad v(3) = 0,$
$v(12) = v(13) = 3, \quad v(23) = 5,$
$v(123) = 7$

c) $v(1) = 3, \quad v(2) = 1, \quad v(3) = 7,$
$v(12) = 3 \quad v(13) = 12, \quad v(23) = 9,$
$v(123)=12$

d) $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(12) = 0, \quad v(13) = v(23) = 100$
$v(123) = 100$

Aufgabe 3
Gegeben sei das folgende 3-Personen-Spiel in charakteristischer Funktionsform, in dem der Einpersonenwert von Spieler 1 nicht näher spezifiziert ist:

$v(1) = u; \quad v(2) = 3; \quad v(3) = 5$
$v(12) = 7; \quad v(13) = 11; \quad v(23) = 13$
$v(123) =22$

Es wird Ihnen jetzt mitgeteilt, dass der Shapley-Wert von Spielerin 2, $s_2(v)$, 7 ist. Welchen Wert muss dann u haben?

Aufgabe 4
Berechnen Sie für das folgende 3-Personen-Spiel in charakteristischer Funktionsform den Shapley-Wert:

$$v(1) = a$$
$$v(2) = v(3) = v(23) = 0$$
$$v(12) = b$$
$$v(13) = v(123) = c$$

Aufgabe 5
Gegeben sei ein gewichtetes Majoritätsspiel der Form $v \equiv (60; 55, 25, 20, 20)$ (d.h. erforderliche Stimmenzahl ist 60 und die Stimmengewichte der involvierten Spieler 1, 2, 3 und 4 sind 55, 25, 20 und 20 respektive). Bestimmen Sie den Shapley-Wert dieses Spiels.

Aufgabe 6
Gegeben sei das Abstimmungsspiel

$$v \equiv (60;\ 20, 20, 10, 10, 10, 10)$$

Bestimmen Sie den Shapley-Wert dieses Spiels, d.h. die Shapley-Werte der 6 Spieler.

Aufgabe 7
Gegeben sei das folgende gewichtete Majoritätsspiel

$$v = (35;\ 30, 25, 10, 5, 5)$$

Die „kleinen“ Spieler (Spieler mit Stimmenzahl 5) haben ein Vetorecht. Berechnen Sie die Abstimmungsstärke der Spieler (im Sinne des Shapley-Wertes).

Aufgabe 8
Gegeben sei das folgende gewichtete Majoritätsspiel

$$v = (30;\ 20;\ 20;\ 10;\ 10;\ 5)$$

mit den Stimmenzahlen 20, 20, 10, 10 und 5 für die Spieler 1, 2, 3, 4 und 5 respektive; dabei ist 30 die Stimmenzahl, die von einer Koalition mindestens erreicht werden muss, damit sie die Abstimmung gewinnt.
Um welchen Betrag steigt die Abstimmungsstärke des „kleinen“ Spielers (Spieler 5 [mit Stimmenzahl 5]), wenn ihm ein Vetorecht eingeräumt wird?

Aufgabe 9

Gegeben sei das folgende gewichtete Majoritätsspiel

$$v = (40; 20; 20; 10; 10; 10)$$

mit den Stimmenzahlen 20; 20; 10; 10 und 10 für die Spieler 1, 2, 3, 4 und 5 respektive und der Stimmenzahl 40, die von einer Koalition mindestens erreicht werden muss, damit sie die Abstimmung gewinnt. Eine Gewinnkoalition erhalte 120.000 Euro.

a) Wie hoch ist die erwartete Auszahlung an einen „kleinen“ Spieler (Spieler mit Stimmenzahl 10) im Sinne des Shapley-Wertes?

b) Angenommen, die „kleinen“ Spieler erwägen, sich zu einem „Abstimmungskartell“ (Spieler mit Stimmenzahl 30) unter der Vereinbarung zusammenzuschließen, dass die (im Sinne des Shapley-Wertes) erwartete Auszahlung an das Abstimmungskartell gleich aufgeteilt wird. Kommt ein solches Abstimmungskartell zustande? Begründen Sie Ihre Feststellung.

Aufgabe 10

Gegeben sei das folgende gewichtete Majoritätsspiel (Abstimmungsspiel):

$$v \equiv (40; 30, 20, 20, 10, 10, 5)$$

Die Spieler 1,2,3,4,5 und 6 haben also die Stimmenzahlen 30,20,20,10,10 und 5 respektive. Der Spieler mit der Stimmenzahl 30 (Spieler 1) habe überdies ein Vetorecht. Um die Abstimmung zu gewinnen, sind 40 Stimmen erforderlich. Bestimmen Sie die Abstimmungsstärke der 6 Spieler im Sinne des Shapley-Wertes.

Aufgabe 11

Gegeben sei ein gewichtetes Majoritätsspiel der Form $v \equiv (4; 3, 2, 2)$.

Situation I: Die erforderliche Stimmenzahl wird von 4 auf 5 erhöht, was durch $\hat{v} \equiv (5; 3, 2, 2)$ erfasst wird.

Situation II: Es kommt eine weitere Partei mit einer Stimme hinzu und die erforderliche Stimmenzahl wird von 4 auf 5 erhöht, was durch $\hat{v} \equiv (5; 3, 2, 2, 1)$ erfasst wird.

a) Welche der beiden Situationen ist für den Spieler mit der Stimmenzahl 3 vorteilhafter?

b) Welche der beiden Situationen ist für einen Spieler mit der Stimmenzahl 2 vorteilhafter? („vorteilhafter“ ist im Sinne größerer Abstimmungsmacht zu verstehen).

Aufgabe 12

Ein Gremium, das aus 3 ständigen Mitgliedern A, B und C sowie 2 weiteren, extern bestellten Mitgliedern D und E besteht, habe über die Annahme einer Vorlage zu entscheiden. Entfallen wenigstens 51 % der Stimmen auf die Vorlage, gilt diese als angenommen. Die ständigen Mitglieder A, B und C haben die Stimmenzahlen 30, 20 und 10 respektive. Die externen Mitglieder D und E haben jeweils die Stimmenzahl 20. Allerdings haben beide externen

Mitglieder ein Vetorecht. Bestimmen Sie für jedes Mitglied des Gremiums dessen Abstimmungsmacht im Sinne des Shapley-Wertes!

Aufgabe 13

Gegeben sei das folgende gewichtete Majoritätsspiel: **v=(4; 3, 2, 2)**.

a) Bestimmen Sie die Abstimmungsstärke der drei Spieler (Shapley-Wert als Machtindex).

b) Nehmen Sie jetzt an, dass sich Spieler 1 in drei Einzelstimmen „auflöst", was zu den folgenden gewichteten Majoritätsspiel führt: **v'=(4; 1, 1, 1, 2, 2)**. Zeigen Sie, dass eine Gruppe (Spieler 1 mit 3 Stimmen in dem Spiel v = (4;3,2,2) entgegen der üblichen Annahme nicht notwendig stärker ist als die „Summe ihrer Mitglieder", indem Sie die Summe der Shapley-Werte der drei „kleinen" Spieler in dem Spiel v = (4;1,1,1,2,2) (Summe der Shapley-Werte von Spieler 1, 2 und 3) mit dem Shapley-Wert des „großen" Spielers (Spieler 1) in dem Spiel v = (4;3,2,2) vergleichen [Paradox of Size].

Aufgabe 14

Gegeben sei das folgende gewichtete Majoritätsspiel v = (70; 55, 25, 20). Dabei sind 55, 25, 20 die Stimmenzahlen der Spieler 1, 2 und 3 respektive. 70 ist die Stimmenzahl, die erreicht werden muss, um eine Abstimmung zu gewinnen. Sind Spieler 2 und 3 unterschiedlich mächtig?

Aufgabe 15

An einem Unternehmen halten die Alteigentümer (Spieler 1) noch 40% des stimmberechtigten Kapitals. Zur Finanzierung von Innovationen mussten zwei Finanzinvestoren mit „ins Boot" genommen werden (Spieler 2 und 3). Sie halten jetzt 24% und 28% des stimmberechtigten Kapitals respektive. Der Rest des stimmberechtigten Kapitals befindet sich im Streubesitz bei Kleinaktionären, deren Stimmrechte aber (als Depotstimmrecht) gebündelt durch eine Bank (Spieler 4) wahrgenommen werden. Bei Abstimmungen über die Unternehmensstrategie genügt die Zustimmung von 51% des stimmberechtigten Kapitals, um die Abstimmung zu gewinnen. Bestimmen Sie für derartige Abstimmungen die Abstimmungsstärke der einzelnen Gruppen (Spieler 1 bis 4) im Sinne des Shapley-Wertes. Wie ändert sich die Abstimmungsstärke der Alteigentümer (Spieler 1) und der die Kleinaktionäre vertretenden Bank (Spieler 4), wenn den beiden Finanzinvestoren (Spieler 2 und 3) ein Vetorecht eingeräumt wird?

Aufgabe 16

Betrachten Sie ein Gremium mit 4 Mitgliedern (Spieler 1 bis 4). Jeder Spieler hat eine Stimme. Ein Spieler hat ein Veto-Recht, d.h. eine Koalition kann eine Abstimmung nur gewinnen, wenn sie den Spieler mit Veto-Recht zu ihrem Mitglied zählen kann. 60% der Stimmen sind erforderlich, um eine Abstimmung zu gewinnen.

a) Berechnen Sie den Shapley-Wert dieses gewichteten Majoritätsspiels.

b) Beschreiben Sie mit Hilfe des Shapley-Wertes die Machtverteilung, wenn das obige Gremium um ein weiteres Mitglied mit Veto-Recht erweitert wird. Die 60%-Abstimmungsregel bleibt bestehen.

Aufgabe 17

In der Hauptversammlung einer Aktiengesellschaft sind alle Eigentümer mit Stimmrechten proportional zu ihrer Arbeitsstärke vertreten:

Gruppe	**Anteil in Prozent**
Tochter	35
Sohn	8
Fondsgesellschaft Merkur	30
Fondsgesellschaft Fidus	3
Private Equily Fond Aquila	10
Kleinaktionäre	14
Summe	100

Bei den meisten Fragen, mit denen sich die Hauptversammlung befasst, existieren nur 3 Spieler:

- **i)** die Erben (Tochter, Sohn): Spieler E
- **ii)** die Finanzinvestoren (Merkur, Fidus, Aquila): Spieler F
- **iii)** die Kleinaktionäre: Spieler K

Bei wichtigen Entscheidungen wird eine **¾-Mehrheit** verlangt (qualifizierte) Mehrheit.

(1) Welche Aussage können Sie über den Einfluss (im Sinne des Shapley-Wertes) der Kleinaktionäre auf die Entscheidungen zur Unternehmensführung machen, wenn mit qualifizierter Mehrheit abgestimmt wird?

(2) Nehmen Sie jetzt an, dass die Aktiengesellschaft eine Kapitalerhöhung um 20 % durchführt, und dass die neuen Anteile von einem strategischen Investor erworben werden, so dass sich die folgende Anteilsverteilung ergibt.

Gruppe	Anteil in Prozent
Erben (E)	43
Finanzinvestoren (F)	43
Kleinaktionäre (K)	14
Strategischer Investor (I)	20
Summe	120

Hat sich durch diese Kapitalerhöhung etwas am Einfluss der Kleinaktionäre bei Abstimmungen mit qualifizierter Mehrheit (3/4-Mehrheit) geändert?

Universität Rostock **29. Juli 2009**
Spieltheorie II - SS 2009
Carsten Erdmann

Lösungen zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Der Shapley-Wert (benannt nach Lloyd Shapley) ist ein punktwertiges Lösungs-Konzept aus der kooperativen Spieltheorie. Er gibt an, welche Auszahlung die Spieler in Abhängigkeit von einer Koalitionsfunktion erwarten können (positive Interpretation) oder erhalten sollten (normative Interpretation).
Sei N die Menge der Spieler, $n = |N|$ und v die charakteristische Funktion des Spiels ($v(S)$ ist der Wert der Koalition, also die Höhe der Kosteneinsparung durch Koalitionsbildung). Dann ist der Shapley-Wert (Auszahlung) für Spieler i definiert als

$$s_i(v, N) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})). \qquad (:-))$$

Hier ist $n = 3$, demzufolge ergeben sich die Shapley-Werte:

$$\begin{aligned} s_1(v) &= \frac{(n - |\{1\}|)!(|\{1\}| - n)!}{n!}(v(\{1\}) - v(\{1\} \setminus \{1\}) + \\ &\quad + \frac{(n - |\{1,2\}|)!(|\{1,2\}| - n)!}{n!}(v(\{1,2\}) - v(\{1,2\} \setminus \{1\}) + \\ &\quad + \frac{(n - |\{1,3\}|)!(|\{1,3\}| - n)!}{n!}(v(\{1,3\}) - v(\{1,3\} \setminus \{1\}) + \\ &\quad + \frac{(n - |\{1,2,3\}|)!(|\{1,2,3\}| - n)!}{n!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2,3\} \setminus \{1\}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5-3}{6} + \frac{7-5}{6} + \frac{15-11}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(v) &= \frac{(n - |\{2\}|)!(|\{2\}| - n)!}{n!}(v(\{2\}) - v(\{2\} \setminus \{2\}) + \\ &\quad + \frac{(n - |\{1,2\}|)!(|\{1,2\}| - n)!}{n!}(v(\{1,2\}) - v(\{1,2\} \setminus \{2\}) + \\ &\quad + \frac{(n - |\{2,3\}|)!(|\{2,3\}| - n)!}{n!}(v(\{2,3\}) - v(\{2,3\} \setminus \{2\}) + \\ &\quad + \frac{(n - |\{1,2,3\}|)!(|\{1,2,3\}| - n)!}{n!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2,3\} \setminus \{2\}) \\ &= \frac{3}{3} + \frac{5-1}{6} + \frac{11-5}{6} + \frac{15-7}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_3(v) &= \frac{(n-|\{3\}|)!(|\{3\}|-n)!}{n!}(v(\{3\})-v(\{3\}\setminus\{3\})+ \\
&+\frac{(n-|\{1,3\}|)!(|\{1,3\}|-n)!}{n!}(v(\{1,3\})-v(\{1,3\}\setminus\{3\})+ \\
&+\frac{(n-|\{2,3\}|)!(|\{2,3\}|-n)!}{n!}(v(\{2,3\})-v(\{2,3\}\setminus\{3\})+ \\
&+\frac{(n-|\{1,2,3\}|)!(|\{1,2,3\}|-n)!}{n!}(v(\{1,2,3\})-v(\{1,2,3\}\setminus\{3\}) \\
&= \frac{5}{3}+\frac{7-1}{6}+\frac{11-3}{6}+\frac{15-5}{3}=\frac{22}{3}
\end{aligned}
$$

Also

$$s(v)=(s_1(v),s_2(v),s_3(v))=(\frac{7}{3},\frac{16}{3},\frac{22}{3}).$$

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Nach (:-)) und wegen $n=3$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
s_1(v) &= \frac{0}{3}+\frac{1-0}{6}+\frac{1-0}{6}+\frac{1-0}{3}=\frac{2}{3} \\
s_2(v) &= \frac{0}{3}+\frac{1-0}{6}+\frac{0-0}{6}+\frac{1-1}{3}=\frac{1}{6} \\
s_3(v) &= \frac{0}{3}+\frac{1-0}{6}+\frac{0-0}{6}+\frac{1-1}{3}=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Also

$$s(v)=(s_1(v),s_2(v),s_3(v))=(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}).$$

(b) Nach (:-)) und wegen $n=3$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
s_1(v) &= \frac{0}{3}+\frac{3-1}{6}+\frac{3-0}{6}+\frac{7-5}{3}=\frac{3}{2} \\
s_2(v) &= \frac{1}{3}+\frac{3-0}{6}+\frac{5-0}{6}+\frac{7-3}{3}=3 \\
s_3(v) &= \frac{0}{3}+\frac{3-0}{6}+\frac{5-1}{6}+\frac{7-3}{3}=\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Also

$$s(v)=(s_1(v),s_2(v),s_3(v))=(\frac{3}{2},3,\frac{5}{2}).$$

(c) Nach (:-)) und wegen $n=3$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
s_1(v) &= \frac{3}{3}+\frac{3-1}{6}+\frac{12-7}{6}+\frac{12-9}{3}=\frac{19}{6} \\
s_2(v) &= \frac{1}{3}+\frac{3-3}{6}+\frac{9-7}{6}+\frac{12-12}{3}=\frac{4}{6} \\
s_3(v) &= \frac{7}{3}+\frac{12-3}{6}+\frac{9-1}{6}+\frac{12-3}{3}=\frac{49}{6}
\end{aligned}
$$

Also

$$s(v)=(s_1(v),s_2(v),s_3(v))=(\frac{19}{6},\frac{4}{6},\frac{49}{6}).$$

(d) Nach (:-)) und wegen $n = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} s_1(v) &= \frac{0}{3} + \frac{0-0}{6} + \frac{100-0}{6} + \frac{100-100}{3} = \frac{100}{6} \\ s_2(v) &= \frac{0}{3} + \frac{0-0}{6} + \frac{100-0}{6} + \frac{100-100}{3} = \frac{100}{6} \\ s_3(v) &= \frac{0}{3} + \frac{100-0}{6} + \frac{100-0}{6} + \frac{100-0}{3} = \frac{400}{6} \end{aligned}$$

Also

$$s(v) = (s_1(v), s_2(v), s_3(v)) = (\frac{100}{6}, \frac{100}{6}, \frac{400}{6}).$$

Lösung zu Aufgabe 3

$$\begin{aligned} s_2(v) = \frac{3}{3} + \frac{7-u}{6} + \frac{13-5}{6} + \frac{22-11}{3} &= 7 \\ \frac{3}{3} + \frac{7-u}{6} + \frac{8}{6} + \frac{11}{3} &= 7 \\ u &= 1 \end{aligned}$$

u muss also den Wert 1 haben.

Lösung zu Aufgabe 4

$$\begin{aligned} s_1(v) &= \frac{a}{3} + \frac{b-0}{6} + \frac{c-0}{6} + \frac{c-0}{3} = \frac{2a+b+3c}{6} \\ s_2(v) &= \frac{0}{3} + \frac{b-a}{6} + \frac{0-0}{6} + \frac{c-c}{3} = \frac{b-a}{6} \\ s_3(v) &= \frac{0}{3} + \frac{c-a}{6} + \frac{0-0}{6} + \frac{c-b}{3} = \frac{3c-a-2b}{6} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_1(v), s_2(v), s_3(v)) = (\frac{2a+b+3c}{6}, \frac{b-a}{6}, \frac{3c-a-2b}{6}).$$

Lösung zu Aufgabe 5

Sei

$$v = (m; A, B, C, D) = (60; 55, 25, 20, 20).$$

Im Folgenden wird also immer der Spieler mit 55 Stimmanteilen mit A, der mit 25 mit B, der mit 20 mit C und der mit 20 mit D bezeichnet. Insgesamt existieren $4! = 24$ Anordnungsmöglichkeiten der Spieler. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Der Spieler mit 55 Stimmen ist unter den ersten Beiden bei der Anordnung, das heißt der Zweite bildet eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{55|\underline{25}}_{2!}\,|\,\underbrace{20|20}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2!\cdot 2!\cdot 3 = 12$ Möglichkeiten (mal 3, um den anderen unter den ersten Beiden auszuwählen). Davon sind die Spieler B, C, D jeweils zweimal Pivotspieler und Spieler A 6-mal Pivotspieler.

2. Der Spieler mit 5 Stimmen ist unter den letzten Beiden bei der Anordnung, das heißt der Dritte bildet eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{20|25}_{2!}\,|\,\underbrace{\underline{55}|20}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2!\cdot 2!\cdot 3 = 12$ Möglichkeiten (mal 3, um den anderen unter den letzten Beiden auszuwählen). Davon sind die Spieler B, C, D jeweils zweimal Pivotspieler und Spieler A 6-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 24 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken bzw. Shapley-Werte:

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{6+6}{24} \\ s_B(v) &= \frac{2+2}{24} \\ s_C(v) &= \frac{2+2}{24} \\ s_D(v) &= \frac{2+2}{24} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}).$$

Lösung zu Aufgabe 6

$$v = (m; A, B, C, D, E, F) = (60; 20, 20, 10, 10, 10, 10).$$

Insgesamt gibt es $6! = 720$ Möglichkeiten für die Anordnung der Spieler. Wir unterscheiden wieder 4 Fälle.

1. Die Spieler mit 10 Stimmen sind die ersten 4. Somit handelt es sich erst ab dem 5. Spieler um eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{10|10|10|10}_{4!}\,|\,\underbrace{\underline{20}|20}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $4! \cdot 2 = 48$ Möglickeiten. Davon sind die Spieler A und B jeweils 24-mal Pivotspieler.

2. Die Spieler mit 20 Stimmen sind unter den ersten 3. Somit ist handelt es sich erst ab dem 4. Spieler um eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{20|20|10}_{3!}\,|\underline{10}|10|10).$$

Insgesamt gibt es $3! \cdot 4! = 144$ Möglichkeiten ($4!$, weil Möglichkeiten die 10 zu verteilen). Davon sind die Spieler C, D, E und F jeweils 36-mal Pivotspieler.

3. Unter den ersten 4 Spielern ist genau einer mit der 20 Stimmen. Demzufolge wird durch den $5.$ Spieler eine Gewinnkoalition gebildet.

$$(\underbrace{20|10|10|10}_{4!}\,|\,\underbrace{\underline{20}|10}_{2!}).$$

   Insgesamt gibt es $4! \cdot 2! \cdot 4 \cdot 2 = 384$ Möglichkeiten (mal 4, weil es 4 Möglichkeiten für die 10 gibt, mal 2, weil es 2 Möglichkeiten für die 20 gibt). Davon sind die Spieler A und B jeweils 96-mal Pivotspieler und die Spieler C, D, E, F jeweils 48-mal Pivotspieler.

4. Unter den ersten 3 Spielern ist einer mit 20 Stimmen und an $4.$ Stelle ist der andere Spieler mit 20 Stimmen. Demnach bildet der $4.$ Spieler die Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{20|10|10}_{3!}|\underline{20}|10|10).$$

   Insgesmat gibt es $2! \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 3! = 144$ Möglichkeiten (mal 2, weil es 2 Möglichkeiten für die 20 gibt und mal $\frac{4!}{2!}$, um die 2 Spieler mit 10 Stimen auszuwählen. Davon sind Spieler A und B jeweils 72-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 720 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned}
s_A(v) &= \frac{24+96+72}{720} \\
s_B(v) &= \frac{24+96+72}{720} \\
s_C(v) &= \frac{36+48}{720} \\
s_D(v) &= \frac{36+48}{720} \\
s_E(v) &= \frac{36+48}{720} \\
s_F(v) &= \frac{36+48}{720}
\end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v), s_F(v)) = (\frac{192}{720}, \frac{192}{720}, \frac{84}{720}, \frac{84}{720}, \frac{84}{720}, \frac{84}{720}).$$

Lösung zu Aufgabe 7

Sei

$$v = (m; A, B, C, \underbrace{D}_{\text{Veto}}, \underbrace{E}_{\text{Veto}}) = (35; 30, 25, 10, 5, 5),$$

wobei die Spieler D und E ein Vetorecht haben. Insgesamt gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Es sind 4 Fälle zu unterscheiden:

1. Die Spieler D und E sowie einer der Spieler A oder B sind unter den ersten Dreien. Somit bildet der 3. Spieler eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{D|E|\underline{A}}_{3!}\,|\,\underbrace{B|C}_{2!}).$$

Insgesamt also $3! \cdot 2 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten (mal 2, weil entweder die Spieler A oder B an 3. Stelle kommen können). Davon sind die Spieler A und B jeweils 4-mal Pivotspieler und die Spieler D und E jeweils 8-mal Pivotspieler.

2. Unter den ersten drei Spielern ist der Spieler C unter den ersten drei Stellen. Die Spieler D und E sind unter den ersten 4. Somit bildet der 4.-Spieler eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{D|E|C|\underline{A}}_{18}\,|B).$$

Insgesamt also $18 \cdot 2$ Möglichkeiten (mal 2 die Spieler A und B wechsel können). Davon sind die Spieler D und E jeweils 12-mal Pivotspieler und die Spieler A, B jeweils 6-mal Pivotspieler.

3. Unter den ersten 3 Stellen ist ein Vetospieler, sowie die Spieler A, B und der andere Vetospieler ist an 4. Stelle (und dadurch Pivotspieler).

$$(\underbrace{A|B|D}_{3!}\,|\underline{E}|C).$$

Insgesmat gibt es $3! \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten (mal 2, weil die Pivotspieler D und E wechseln können). Somit sind die Spieler D und E jeweils 6-mal Pivotspieler.

4. An letzter Stelle ist einer der Pivotspieler. Somit bildet erst der letzte Spieler eine Gewinnnkoalition.

$$(\underbrace{A|B|C|D}_{4!}\,|\underline{E}).$$

Insgesamt gibt es $4! \cdot 2$ Möglichkeiten (mal 2, weil die Pivotspieler wechseln können). Die Spieler D und E sind also jeweils 24-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 120 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned}
s_A(v) &= \frac{4+6}{120}\\
s_B(v) &= \frac{4+6}{120}\\
s_C(v) &= 0\\
s_D(v) &= \frac{8+12+6+24}{720}\\
s_E(v) &= \frac{8+12+6+24}{720}
\end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v)) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}).$$

Lösung zu Aufgabe 8

Sei

$$v = (m; A, B, C, D, E) = (30; 20, 20, 10, 10, 5),$$

Insgesamt gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Wir untersuchen 2 Fälle:

(a) <u>Spieler E hat ein Vetorecht:</u>

(1) Unter den ersten drei Spielern befindet sich jeweils ein Spieler mit der Stimmanzahl 10 bzw. 20 und Spieler E. Somit bildet der dritte Spieler die Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{20|10|\underline{E}}_{3!}\,|\,\underbrace{20|10}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 48$ Möglichkeiten (mal $2 \cdot 2$, weil die Spieler mit 10, bzw. 20 Stimmen wechseln können). Davon sind die Spieler A, B, C, D jeweils 8-mal Pivotspieler und der Spieler E 16-mal Pivotspieler.

(2) Unter den ersten drei Spielern befinden sich die Spieler A, B und E. Somit bildet der dritte Spieler die Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{20|20|\underline{E}}_{3!}\,|\,\underbrace{10|10}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2! = 12$ Möglickeiten. Davon sind die Spieler A, B und E jeweils 4-mal Pivotspieler.

(3) Unter den ersten drei Spielern sind die mit 10 Stimmen und der Vetospieler. Somit bildet der $4.$ Spieler die Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{10|10|E}_{3!}\,|\,\underbrace{\underline{20}|20}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2 \cdot 3! = 12$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A, B jeweils 6-mal Pivotspieler.

(4) In allen anderen Fällen bildet der Vetospieler die Gewinnkoalition, somit ist er 48-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 120 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned}
s_A(v) &= \frac{8+4+6}{120} \\
s_B(v) &= \frac{8+4+6}{120} \\
s_C(v) &= \frac{8}{120} \\
s_D(v) &= \frac{8}{120} \\
s_E(v) &= \frac{16+4+48}{120}
\end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v)) = (\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{17}{30}).$$

(b) Spieler E hat kein Vetorecht:

Aufgrund der Struktur des Spiels ist klar, dass Spieler E keine Abstimmungsmacht hat, da er nie Pivotspieler sein kann.

Daher verbessert der Spieler E seine Abstimmungsstärke um $\frac{17}{30}$ (im Sinne des Shapley-Wertes).

Lösung zu Aufgabe 9

(a) Sei
$$v = (m; A, B, C, D, E) = (40; 20, 20, 10, 10, 10).$$

Offensichtlich gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Wir unterscheiden 4 Fälle:

a) Sind die ersten beiden Spieler, die mit 20 Stimmen, so ist der zweite Spieler der Pivotspieler.
$$(\underbrace{20|\underline{20}}_{2!} \,|\, \underbrace{10|10|10}_{3!}).$$
Insgesamt gibt es also $2! \cdot 3! = 12$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A und B jeweils 6-mal Pivotspieler.

b) Sind die ersten beiden Spieler jeweils Spieler mit 10, bzw. 20 Stimmen und der dritte Spieler der mit 20 Stimmen, so ist der dritte Spieler Pivotspieler.
$$(\underbrace{20|10}_{2!}\,|\underline{20}|10|10).$$
Insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ Möglichkeiten (mal $3!$, wegen der Anordnung der Spieler mit 10 Stimmen, mal 2, weil man die Spieler mit 20 Stimmen vertauschen kann). Davon sind die Spieler A und B jeweils 12-mal Pivotspieler.

c) Unter den ersten drei Spielern ist einer mit 20 Stimmen und zwei mit 10 Stimmen. Somit ist der dritte Spieler Pivotspieler.
$$(\underbrace{20|10|\underline{10}}_{3!} \,|\, \underbrace{20|10}_{2!}).$$
Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten (mal 3, weil es drei mögliche Spieler mit 10 Stimmen sind und mal 2, weil zwei mögliche Spieler mit 20 Stimmen). Davon sind die Spieler A, B jeweils 12-mal Pivotspieler und die Spieler C, D, E jeweils 16-mal.

d) Die ersten drei Spieler sind die mit 10 Stimmen. Somit ist der vierte Spieler Pivotspieler.
$$(\underbrace{10|10|10}_{3!} \,|\, \underbrace{\underline{20}|20}_{2!}).$$
Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A und B jeweils 6-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 120 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{6+12+12+6}{120} \\ s_B(v) &= \frac{6+12+12+6}{120} \\ s_C(v) &= \frac{16}{120} \\ s_D(v) &= \frac{16}{120} \\ s_E(v) &= \frac{16}{120} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v)) = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}).$$

Somit beträgt die erwartete Auszahlung an einen Spieler mit 10 Stimmen $16.000\,\text{EUR}$.

(b) Sei

$$v = (40; 20, 20, 30).$$

Offensichtlich gibt es 6 Möglichkeiten. Da genau 2 Spieler notwendig sind, um ein Gewinnkoalition zu bilden. Daher hat jeder Spieler eine Stimmmacht von $\frac{1}{3}$. Da sich die Spieler C, D, E zu einer Koalition zusammengeschlossen haben und ihre Stimmmacht gleichmäßig untereinander verteilt wird, haben die Spieler C, D, E jeweils einen Stimmmacht, bzw. Shapley-Wert von $\frac{1}{9}$, vorher hatte jeder einen Wert von $\frac{2}{15}$. Sie haben sich also verschlechtert, weshalb eine solche Koalition nach dem Shapley-Wert nicht zustande kommen wird.

Lösung zu Aufgabe 10

Sei

$$v = (m; \underbrace{A}_{\text{Veto}}, B, C, D, E, F) = (40; 30, 20, 20, 10, 10, 5),$$

wobei Spieler A ein Vetorecht hat. Offensichtlich gibt es insgesamt $6! = 720$ Möglichkeiten. Wir unterscheiden folgende 6 Fälle:

1. Der Spieler mit der 30 Stimmen und ein Spieler mit 10 Stimmen sind die ersten Beiden. Somit ist der zweite Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{30|\underline{10}}_{2!}\,|\,\underbrace{20|20|10|5}_{4!}).$$

   Insgesamt gibt es $4! \cdot 2 \cdot 2 = 96$ Möglichkeiten (mal 2, weil man den Spieler mit 10 Stimmen wechseln kann). Davon ist Spieler A 48-mal Pivotspieler und die Spieler D, E jeweils 24-mal Pivotspieler.

2. Der Spieler mit 30 Stimmen und ein Spieler mit 20 Stimmen sind die ersten Beiden. Somit ist der zweite Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{30|\underline{20}}_{2!}\,|\,\underbrace{20|10|10|5}_{4!}).$$

Insgesamt gibt es $4! \cdot 2 \cdot 2 = 96$ Möglichkeiten (mal 2, weil man den Spieler mit 20 Stimmen wechseln kann). Davon ist Spieler A 48-mal Pivotspieler und die Spieler B, C jeweils 24-mal Pivotspieler.

3. Die Spieler mit 30 und 5 Stimmen sind die ersten beiden, dann ist der dritte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{30|5}_{2!}\,|\,\underbrace{\underline{20}|20|10|10}_{4!}).$$

Insgesamt gibt es also $2 \cdot 4! = 48$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler B, C, D, E jeweils 12-mal Pivotspieler.

4. Bei allen restlichen Fällen sind bereits mindestens 2 Spieler, ohne den Vetospieler, in der Koalition. Eine Gewinnkoalition entsteht dann erst, wenn der Vetospieler hinzu kommt. Daher ist Spieler A insgesamt $5! \cdot 4 = 480$-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 720 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned}
s_A(v) &= \frac{480+48+48}{720}\\
s_B(v) &= \frac{24+12}{720}\\
s_C(v) &= \frac{24+12}{720}\\
s_D(v) &= \frac{24+12}{720}\\
s_E(v) &= \frac{24+12}{720}\\
s_F(v) &= 0
\end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v), s_F(v)) = (\frac{576}{720}, \frac{36}{720}, \frac{36}{720}, \frac{36}{720}, \frac{36}{720}, 0).$$

Lösung zu Aufgabe 11

(a) Sei

$$v = (5; 3, 2, 2).$$

Offensichtlich gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten. Wir unterscheiden 2 Fälle:

(1) Der Spieler mit 3 Stimmen ist unter den ersten Beiden. Somit ist der zweite Spieler Pivotspieler

$$(\underbrace{2|\underline{3}}_{2!}\,|2).$$

Insgesamt gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten (mal 2, weil man den Spieler mit 2 Stimmen austauschen kann). Davon ist Spieler A 2-mal Pivotspieler, die anderen beiden jeweils einmal.

(2) Der Spieler mit der Stimmanzahl 3 ist Letzter, somit ist er auch Pivotspieler.

$$(\underbrace{2|2}_{2!}|\underline{3}).$$

Also ist Spieler A 2-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 6 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{2}{3} \\ s_B(v) &= \frac{1}{6} \\ s_C(v) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v)) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}).$$

(b) Sei

$$v = (m; A, B, C, D) = (5; 3, 2, 2, 1).$$

Offensichtlich gibt es insgesamt $4! = 24$ Möglichkeiten. Wir unterscheiden 4 Fälle:

(1) Unter den ersten beiden Spielern ist der mit Stimmanzahl 3 und einer mit der Stimmanzahl 2. Somit bildet der zweite Spieler eine Gewinnkoalition.

$$(\underbrace{3|\underline{2}}_{2!}|\underbrace{2|1}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten (mal 2, weil der Spieler mit der Spieler mit 2 Stimmanteilen wechseln kann). Davon entfallen 4 Möglichkeiten auf Spieler A und jeweils 2 auf die Spieler B und C.

(2) Die ersten beiden Spieler sind die mit der Stimmanzahl 2, dann ist der dritte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{2|2}_{2!}|\underbrace{\underline{3}|1}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A und D jeweils 2-mal Pivotspieler.

(3) Die ersten beiden Spieler sind die mit der Stimmanzahl 3 und 1, somit ist der dritte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{3|1}_{2!}|\underbrace{\underline{2}|2}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler B und C jeweils 2-mal Pivotspieler.

(4) Unter den ersten beiden Spielern ist der mit dem Stimmanteil 1 und einer mit dem Stimmanteil 2, dann ist der dritte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{2|1}_{2!} \mid \underbrace{\underline{2}|3}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es $2{\cdot}2{\cdot}2 = 8$ Möglichkeiten (mal 2, weil der Spieler mit Stimmanzahl 2 wechseln kann). Davon ist Spieler A 4-mal Pivotspieler und die Spieler B, C jeweils 2-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 24 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{4+2+4}{24} \\ s_B(v) &= \frac{2+2+2}{24} \\ s_C(v) &= \frac{2+2+2}{24} \\ s_D(v) &= \frac{2}{24} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v)) = (\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}).$$

Insgesamt ist es also für den Spieler mit der Stimmzahl 3 die erste Situation vorteilhafter, währenddessen für die Spieler mit der Stimmzahl 2 die zweite Situation vorteilhafter ist.

Lösung zu Aufgabe 12

Sei

$$v = (m; A, B, C, \underbrace{D}_{\text{Veto}}, \underbrace{E}_{\text{Veto}}) = (51; 30, 20, 10, 20, 20),$$

wobei die Spieler D und E jeweils ein Vetorecht haben. Offensichtlich gibt es insgesamt $5! = 120$ Möglichkeiten. Wir unterscheiden 3 Fälle.

1. Unter den ersten drei Spielern sind die Spieler D und E, sowie einer der Spieler A oder B. Somit ist der dritte Spieler Pivotspieler.

   $$(\underbrace{D|E|\underline{A}}_{3!} \mid \underbrace{B|C}_{2!}).$$

   Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten (mal 2, weil die Spieler A und B wechseln können). Davon sind die Spieler D, E jeweils 8-mal Pivotspieler und die Spieler A, B jeweils 4-mal Pivotspieler.

2. Unter den ersten drei Spielern sind die Spieler D und E, sowie der Spieler C. Somit ist der vierte Spieler Pivotspieler.

   $$(\underbrace{D|E|C}_{3!} \mid \underbrace{\underline{B}|A}_{2!}).$$

   Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A und B jeweils 6-mal Pivotspieler.

3. Bei allen anderen Fällen wird eine Gewinnkoalition erst gebildet, wenn einer der Vetospieler D oder E hinzustößt. Insgesamt gibt es also 84 Möglichkeiten, wovon die Spieler D und E jeweils 42-mal Pivotspieler sind.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 120 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{4+6}{120} \\ s_B(v) &= \frac{4+6}{120} \\ s_C(v) &= 0 \\ s_D(v) &= \frac{8+42}{120} \\ s_E(v) &= \frac{8+42}{120} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v)) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}).$$

Lösung zu Aufgabe 13

(a) Sei

$$v = (4; 3, 2, 2).$$

Offensichtlich gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten der Anordnung der Spieler. Da eine Gewinnkoalition immer genau durch den zweiten Spieler zustande kommt, hat jeder eine Abstimmungsstärke, bzw. Shapley-Wert von $\frac{1}{3}$.

(b) Sei

$$v = (m; A, B, C, D, E) = (4; 2, 2, 1, 1, 1).$$

Offensichtlich gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Wir unterscheiden 4 Fälle:

a) Sind die ersten beiden Spieler, die mit 2 Stimmen, so ist der zweite Spieler der Pivotspieler.

$$(\underbrace{2|\underline{2}}_{2!}\ |\underbrace{1|1|1}_{3!}).$$

Insgesamt gibt es also $2! \cdot 3! = 12$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A und B jeweils 6-mal Pivotspieler.

b) Sind die ersten beiden Spieler jeweils Spieler mit 1, bzw. 2 Stimmen und der dritte Spieler mit 2 Stimmen, so ist der dritte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{2|1}_{2!}\ |\underline{2}|\ \underbrace{1|1}_{2!}).$$

Insgesamt also $2{\cdot}2{\cdot}3 = 24!$ Möglichkeiten (mal $3!$, wegen der Anordnung der Spieler mit 1 Stimme). Davon sind die Spieler A und B jeweils 12-mal Pivotspieler.

c) Unter den ersten drei Spielern ist einer mit 2 Stimmen und zwei mit 10 Stimmen. Somit ist der dritte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{2|1|\underline{1}}_{3!}\,|\,\underbrace{2|1}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten (mal 3, weil es drei mögliche Spieler mit 10 Stimmen und mal 2, weil zwei mögliche Spieler mit 20 Stimmen). Davon sind die Spieler A, B jeweils 12-mal Pivotspieler und die Spieler C, D, E jeweils 16-mal.

d) Die ersten drei Spieler sind die mit 10 Stimmen. Somit ist der vierte Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{1|1|1}_{3!}\,|\,\underbrace{\underline{2}|2}_{2!}).$$

Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten. Davon sind die Spieler A und B jeweils 6-mal Pivotspieler.

Zur Kontrolle kann man sich noch davon überzeugen, dass die Fälle untereinander disjunkt sind und die Summe der Fälle 120 ergibt. Insgesamt haben die Spieler also folgende Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte

$$\begin{aligned}
s_A(v) &= \frac{6+12+12+6}{120}\\
s_B(v) &= \frac{6+12+12+6}{120}\\
s_C(v) &= \frac{16}{120}\\
s_D(v) &= \frac{16}{120}\\
s_E(v) &= \frac{16}{120}
\end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v), s_E(v)) = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}).$$

Somit haben sich die Spieler C, D, E besser gestellt, als wenn sie in einer Koalition zusammenarbeiten würden.

Lösung zu Aufgabe 14

Sei

$$v = (m; A, B, C) = (70; 55, 25, 20).$$

Offensichtlich gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten für Anordnung der Spieler. Der Spieler A ist in allen Kombinationen, außer denjenigen in denen er der erste Spieler ist, Pivotspieler. Somit ist Spieler A insgesamt 4-mal Pivotspieler und die anderen beiden jeweils einmal. Daher ergeben sich die Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte:

$$\begin{aligned}
s_A(v) &= \frac{2}{3}\\
s_B(v) &= \frac{1}{6}\\
s_C(v) &= \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

Also sind die Spieler B und C gleichmächtig.

Lösung zu Aufgabe 15

(a) Spieler B und C haben kein Vetorecht

Sei
$$v = (m; A, B, C, D) = (51; 40, 24, 28, 8).$$

Offensichtlich gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten für die Anordnung der Spieler. Spieler D ist ein Dummy-Spieler. Alle anderen sind trivialerweise gleichmächtig, da genau zwei Spieler (ausgenommen Spieler D) notwendig sind, um eine Gewinnkoalition zu bilden. Also ergeben sich die Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte:

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{1}{3} \\ s_B(v) &= \frac{1}{3} \\ s_C(v) &= \frac{1}{3} \\ s_D(v) &= 0 \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v)) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

(b) Spieler B und C haben ein Vetorecht

Sei
$$v = (m; A, \underbrace{B}_{\text{Veto}}, \underbrace{C}_{\text{Veto}}, D) = (51; 40, 24, 28, 8).$$

Offensichtlich sind die Spieler A und D jetzt Dummy-Spieler, daher ergeben sich die Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte:

$$\begin{aligned} s_A(v) &= 0 \\ s_B(v) &= \frac{1}{2} \\ s_C(v) &= \frac{1}{2} \\ s_D(v) &= 0 \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v)) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

Lösung zu Aufgabe 16

(a) Sei

$$v = (m; \underbrace{A}_{\text{Veto}}, B, C, D) = (3; 1, 1, 1, 1),$$

offensichtlich gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten der Anordnung der Spieler. Wir unterscheiden folgende 2 Fälle:

a) Spieler A ist unter den ersten Dreien, dann ist der $3.$ Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{A|B|\underline{C}}_{3!}|D).$$

Insgesmat gibt es $3! \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten (mal 3, weil Spieler D mit B, bzw. C wechseln kann). Davon ist Spieler A 6-mal Pivotspieler und die Spieler B, C, D jeweils 4-mal Pivotspieler.

b) In allen anderen Fällen ist Spieler A der Pivotspieler, also 6-mal.

Daher ergeben sich die Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte:

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{6+6}{24} \\ s_B(v) &= \frac{4}{24} \\ s_C(v) &= \frac{4}{24} \\ s_D(v) &= \frac{4}{24} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}).$$

(b) Sei

$$v = (m; \underbrace{A}_{\text{Veto}}, \underbrace{B}_{\text{Veto}}, C, D) = (3; 1, 1, 1, 1),$$

offensichtlich gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten der Anordnung der Spieler. Wir unterscheiden folgende 2 Fälle:

a) Die beiden Vetospieler sind unter den ersten Dreien, dann ist der $3.$ Spieler Pivotspieler.

$$(\underbrace{A|B|\underline{C}}_{3!}|D).$$

Insgesmat gibt es $3! \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten (mal 2, weil die Spieler D und C wechseln können). Davon sind die Spieler A, B 4-mal Pivotspieler und die Spieler C, D jeweils 2-mal Pivotspieler.

b) In allen anderen Fällen ist einer der Vetospieler der Pivotspieler, also sind A, B 6-mal Pivotspieler.

Daher ergeben sich die Abstimmungsstärken, bzw. Shapley-Werte:

$$\begin{aligned} s_A(v) &= \frac{6+4}{24} \\ s_B(v) &= \frac{6+4}{24} \\ s_C(v) &= \frac{2}{24} \\ s_D(v) &= \frac{2}{24} \end{aligned}$$

$$s(v) = (s_A(v), s_B(v), s_C(v), s_D(v)) = (\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}).$$

Lösung zu Aufgabe 17

(a) Sei

$$v = (m; E, F, K) = (75; 43, 43, 14).$$

Aus der Spielstruktur ist ersichtlich, dass Spieler K ein Dummy-Spieler ist. Somit haben die Kleinaktionäre im Sinne des Shapley Wertes keinen Einfluss auf die Entscheidungen zur Unternehmensführung.

(b) Sei

$$v = (m; E, F, K, I) = (90; 43, 43, 14, 20).$$

Es ist erkennbar, dass Spieler K nur in den Anordnungen $EFKI$ und $FEKI$ pivotal ist, daher beträgt der neue Shapley-Wert von Spieler K

$$s_K(v) = \frac{1}{12}.$$

Somit hat sich der Einfluss der Kleinaktionäre durch die Kapitalerhöhung erhöht.

Aufgabenblatt 3 – Verhandlungstheorie von Nash

Aufgabe 1

a) Die Zwei-Personen-Verhandlungstheorie von Nash ist eine axiomatische Theorie. Zu den Forderungen gehört das Axiom „Unabhängigkeit (der Lösung des Verhandlungsproblems) von irrelevanten Alternativen". Formulieren Sie dieses Axiom und illustrieren Sie es mit Hilfe einer Zeichnung.

b) Zwei Personen A und B verhandeln über die Aufteilung von 8.000 Euro. Person A ist risikoneutral; genauer bewertet sie Geld gemäß der Geldnutzenfunktion $u(x) = x$ für $x \geq 0$. Person B ist strikt risikoavers; genauer bewertet sie Geld gemäß der Geldnutzenfunktion $v(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Für den Konfliktpunkt c = (c_1, c_2) gelte c_1=c_2=0. Welche Aufteilung sagt die 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash voraus?

c) Zwei Personen verhandeln über die Aufteilung von 10.000 Euro. Der pareto-effiziente Rand der Verhandlungsmenge (Einigungsmenge) im Nutzenraum wird durch $u_2 = u_2(u_1) = 5 - \frac{1}{2}u_1$ für $0 \leq u_1 \leq 10$ beschrieben, wobei u_2 der Nutzen von Person 2, u_1 der Nutzen von Person 1 ist. Der Nutzen im Nichteinigungsfall sei für jede der beiden Personen Null. Wie wird aufgeteilt, wenn die beiden Personen sich gemäß der Verhandlungstheorie von Nash verhalten? Welchen Nutzen zieht die Person 1 aus dem Aufteilungsergebnis, welchen Nutzen hat die Person 2 davon?

Aufgabe 2

Zwei Personen I und II haben Forderungen gegenüber einer in Konkurs geratenen Firma, die aus der Konkursmasse in Höhe von 600.000 Euro zu bedienen sind. Die Forderung von Person I beträgt 200.000 Euro, die von Person II 800.000 Euro. Die beiden Personen sind risikoneutral mit den Geldnutzenfunktionen u (x) = x für Person I und v (x) = x für Person II für x ≥ 0. Der Konkursverwalter hat eine Frist gesetzt, innerhalb der ihm ein Vorschlag über die Aufteilung der Konkursmasse gemacht werden muss. Können sich die beiden Personen nicht auf einen gemeinsamen Vorschlag einigen, so zahlt der Konkursverwalter an Person I 20.000 Euro und an Person II 80.000 Euro.

Welchen Vorschlag machen die beiden Personen, wenn sie die Lösung des Aufteilungsproblems nach der 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash vorschlagen?

Aufgabe 3

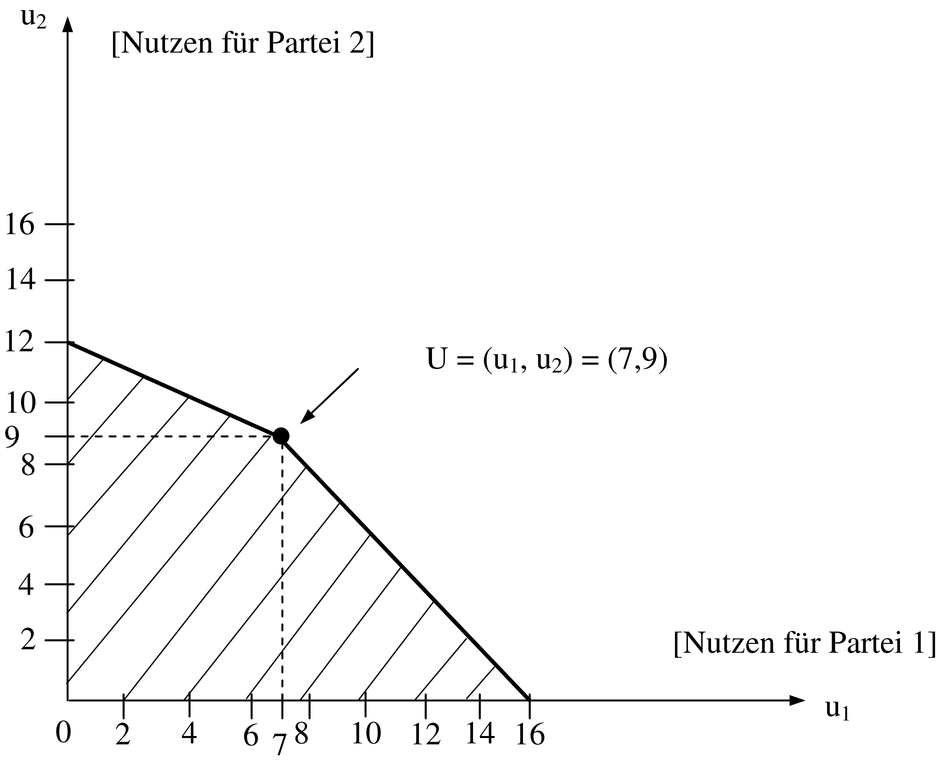
Zwei Personen I und II haben Forderungen gegen eine in Konkurs gegangene Firma in Höhe von 500.000 Euro und 2.000.000 Euro respektive. Für die Bedienung dieser Forderungen steht eine Konkursmasse von 1.000.000 Euro zur Verfügung. Die beiden Personen seien risikoneutral, d.h. sie bewerten Geldbeträge x mit dem Nutzen $u_I(x) = u_{II}(x) = x$. Die beiden Personen müssen sich in Verhandlungen über die Aufteilung der Konkursmasse einigen. Einigen sie sich nicht, so erhält Person I vom Konkursverwalter 100.000 Euro und Person II 400.000 Euro.

a) Repräsentieren Sie dieses Verhandlungsproblem graphisch mit Hilfe eines Nutzendiagramms und schraffieren Sie dabei den Verhandlungsbereich (Einigungsmenge).

b) Welche Aufteilung von 1.000.000 Euro wählen die beiden Personen, wenn sie der Nash-Verhandlungstheorie folgen?

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Verhandlungsproblem mit der folgenden Nutzenraumdarstellung:



Die Einigungsmenge ist durch den schraffierten Bereich bei eingeschlossenem Rand gegeben. Für den Konfliktpunkt $c = (c_1, c_2)$ gelte: $c_1 = c_2 = 0$. Bestimmen Sie das Nutzenpaar, das die 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash als Lösung dieses Verhandlungsproblems voraussagt. Begründen Sie Ihre Lösung durch Rückgriff auf die Axiome, die der Verhandlungslösung von Nash zugrunde liegen.

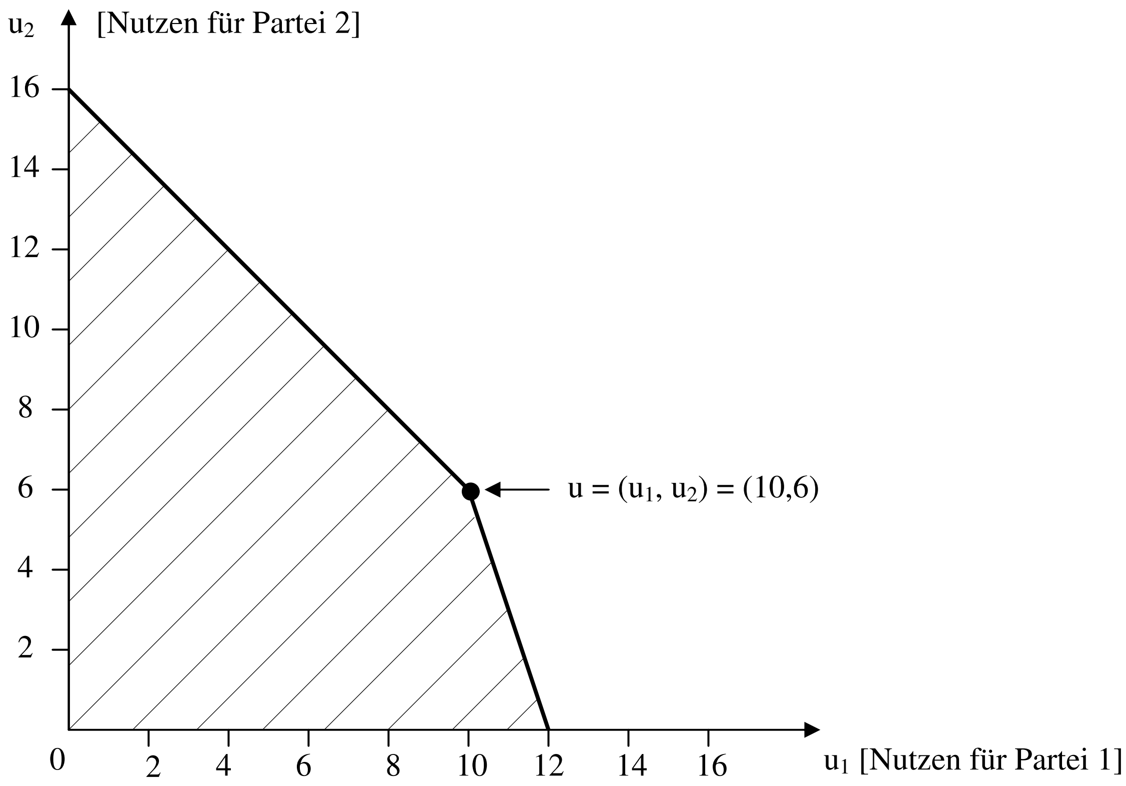
Aufgabe 5

a) Zwei risikoneutrale Personen verhandeln über die Aufteilung von 500 Euro. Falls sie sich nicht einigen können, so erhält Person 1 nichts, während Person 2 eine „Outside Option" (Konfliktpunktauszahlung) von 100 Euro hat. Bestimmen Sie die Nash-Verhandlungslösung.

b) Es liegen wieder 500 Euro auf dem Tisch, über deren Aufteilung zwei risikoneutrale Personen verhandeln. Allerdings kann Person 1 aus Gründen, die im Detail hier nicht weiter interessieren müssen, in diesen Verhandlungen maximal 40 Euro fordern (Obergrenze der Ansprüche von Person 1). Falls keine Einigung zustande kommt, so erhält Person 1 nichts, während Person 2 eine „Outside Option" (Konfliktpunktauszahlung) von 100 Euro hat. Bestimmen Sie wieder die Nash-Verhandlungslösung.

Aufgabe 6

Gegeben sei ein Verhandlungsproblem mit der folgenden Einigungsmenge (schraffiert, Rand eingeschlossen):

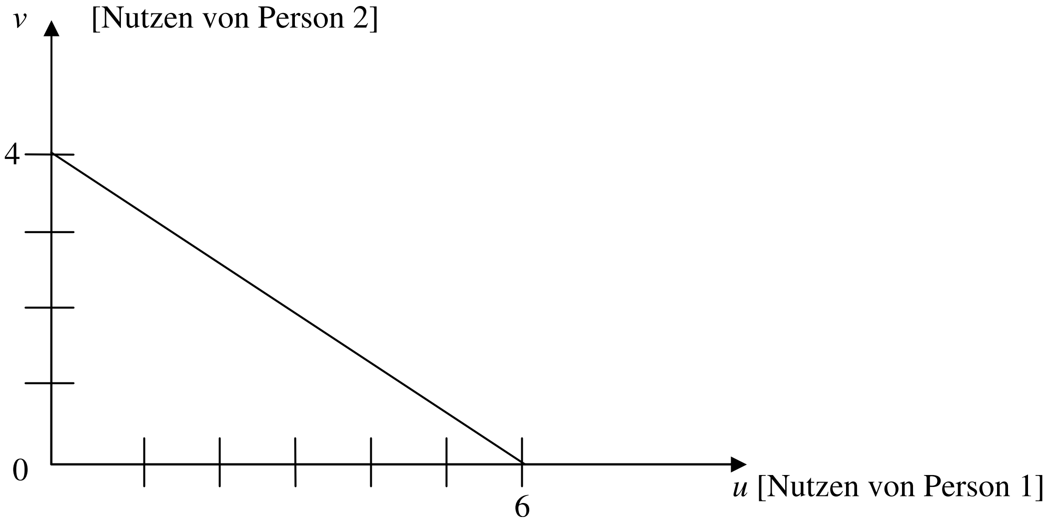


a) Für den Konfliktpunkt $c = (c_1, c_2)$ gelte: $c = (0,0)$. Bestimmen Sie das Nutzenpaar, das die 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash als Lösung dieses Verhandlungsproblems voraussagt.

b) Für den Konfliktpunkt $c = (c_1, c_2)$ gelte jetzt: $c = (2,4)$. Welches Nutzenpaar sagt die 2-Personenverhandlungstheorie nun voraus?

Aufgabe 7

Gegeben sei ein lineares Verhandlungsproblem, das die folgende Nutzenraumdarstellung hat:



Für den Nicht-Einigungspunkt $c = (c_1, c_2)$ gilt $c = (0,0)$.
Zeigen Sie auf zeichnerischem und rechnerischem Weg, welches Nutzenpaar die 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash voraussagt.

Aufgabe 8

2 Personen verhandeln über die Aufteilung von 500 Euro. Bei Nicht-Einigung erhält jeder 0 Euro. Person 1 hat die Geldfunktion $u(x) = x$. Person 2 hat die Geldfunktion $v(x) = \sqrt{x}$.
Welchen Aufteilungsvorschlag macht die 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash?

Aufgabe 9

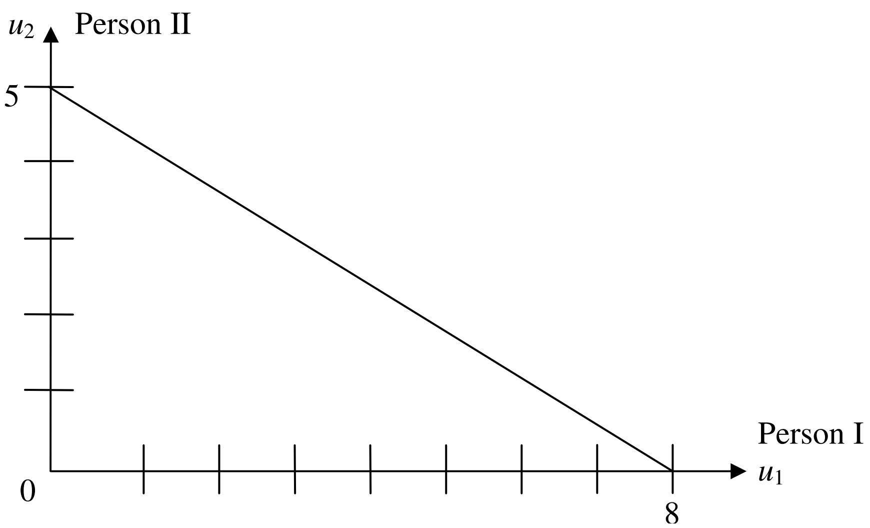
Zwei Spieler, beide risikoneutral, haben Forderungen gegenüber einer in Konkurs geratenen Firma. Falls sie sich über eine Aufteilung der noch vorhandenen Assets nicht einigen können, so gehen beide leer aus. (Dritte, die auch noch Forderungen vorbringen könnten, gibt es nicht.) Spieler 1 hat Forderungen in Höhe von 1 Million Euro, Spielerin 2 hat Forderungen in Höhe von 5 Millionen Euro gegenüber der in Konkurs geratenen Firma.
Bestimmen Sie jeweils den Aufteilungsvorschlag, der die 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash macht, wenn

i) die aufzuteilenden Assets einen Wert von 1 Million Euro haben,
ii) die aufzuteilenden Assets einen Wert von 5 Millionen Euro haben.

(Ein Spieler kann in den Aufteilungsverhandlungen natürlich nur maximal einen Betrag verlangen, der seiner Forderung gegenüber der in Konkurs geratenen Firma entspricht.)

Aufgab10

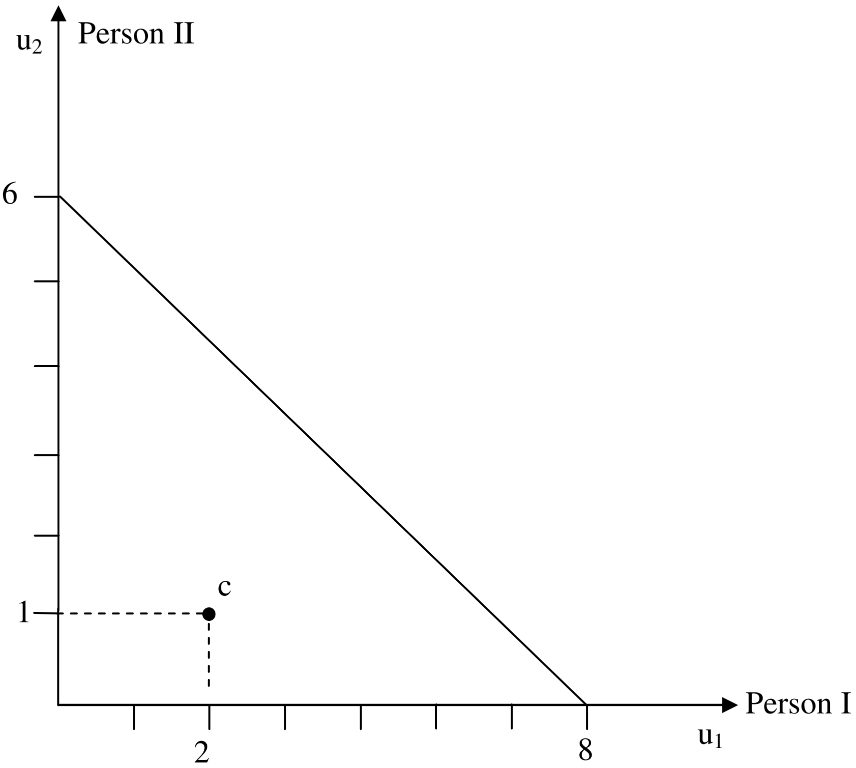
Gegeben sei ein lineares Verhandlungsproblem B = (U, c), das folgendes Aussehen hat:



$c = (c_1, c_2) = (0,0)$
u_1: Geldeinheiten in Währung I
u_2: Geldeinheiten in Währung II
Welches Nutzenpaar (Aufteilungspaar) (u_1, u_2) sagt die Nash‘sche Verhandlungstheorie aus?

Aufgabe 11

Gegeben sei ein lineares Verhandlungsproblem $B \equiv (U, c)$, das folgendes Aussehen hat:



Welches Nutzenpaar (u_1, u_2) sagt die Nash`sche Verhandlungstheorie voraus?

Aufgabe 12

Zwei Personen I und II verhandeln über die Aufteilung eines Geldbetrages von 1000 Euro. Die Geldnutzenfunktion von Person I sei $u(x) \equiv \sqrt{x}$, die von Person II $v(x) = x$. Im Nichteinigungsfall erhalte Person I nichts und Person II 100 Euro.
Welches Aufteilungsergebnis sagt die Nash'sche Verhandlungstheorie voraus?

Aufgabe 13

Zwei Personen verhandeln über die Aufteilung von 6.000 Euro. Person 1 bewerte Geldbeträge x gemäß $u_1(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ und Person 2 gemäß $u_2(x) = 3 \cdot x$. Im Fall der Nichteinigung erhält Person 1 400 Euro und Person 2 800 Euro. Welche Aufteilung ergibt sich nach der 2-Personen-Verhandlungstheorie von Nash?

Aufgabe 14

Betrachten Sie das folgende lineare Verhandlungsproblem: Zwei risikoneutrale Personen verhandeln über die Aufteilung eines Geldbetrages M und folgen dabei der Verhandlungstheorie von Nash. Falls sie sich nicht einigen können, erhalten sie die Konfliktpunktauszahlungen c = (c_1, c_2). Erhielte Person 1 den gesamten aufzuteilenden Geldbetrag M, so erreichte sie damit einen Nutzen von 10. Der Geldbetrag Null sei für beide Personen mit einem Nutzen von Null verbunden.

a) Angenommen, der Konfliktpunkt $c = (c_1, c_2)$ liegt im Nullpunkt ($c = (0,0)$) und die beiden Personen einigen sich auf eine Aufteilung von M, die zu dem Nutzenpaar $u = (u_1, u_2) = (5, 4)$ führt. Welchen Nutzen würde Person 2 erreichen, wenn sie den gesamten aufzuteilenden Betrag M erhielte?

b) Der Konfliktpunkt sei jetzt $c = (c_1, c_2) = (c_1, 0)$ mit $c_1 \neq 0$. Person 1 bewerte Geldbeträge $x \neq 0$ gemäß $u_1(x) = x$ und Person 2 gemäß $u_2(x) = 0{,}8\,x$. Person 1 erreicht für den gesamten aufzuteilenden Geldbetrag M nach wie vor den Nutzen von 10. Wir erhalten die Mitteilung, dass sich die beiden Personen auf eine Aufteilung von M geeinigt haben, die der Person 1 den Nutzen von 7 gibt. Bei welchem Konfliktpunkt c_1 von Partei 1 ist dies nur möglich?

Aufgabe 15

Zwei Personen I und II verhandeln über die Aufteilung eines Geldbetrages von 1000 EURO.

a) Angenommen, beide Personen bewerten Geldbeträge in gleicher Weise gemäß den Geldnutzenfunktionen $u(x) \equiv \sqrt{x}$ und $v(x) \equiv \sqrt{x}$. Im Nichteinigungsfall gehen beide leer aus. Welches Aufteilungsergebnis sagt die Nashsche Verhandlungstheorie voraus? (Begründen Sie Ihre Antwort)

b) Angenommen, Person I bewertet Geld jetzt gemäß der Geldnutzenfunktion $u(x) = ax$ (mit $a>0$) und Person II mit der Geldnutzenfunktion $v(x)= bx$ ($b>0$). Im Nichteinigungsfall erhält Person I 100 EURO und Person II 50 EURO. Welches Aufteilungsergebnis sagt die Verhandlungstheorie von Nash jetzt aus?

Universität Rostock **29. Juli 2009**
Spieltheorie II - SS 2009
Carsten Erdmann

Lösungen zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

(a)

(b) Der Drohpunkt c lautet offensichtlich $c = (0|0)$. Daher lautet die Zielfunktion, bzw. das Nash Produkt

$$\mathcal{N}(x) = x(\sqrt{8000 - x})$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(x) = \sqrt{8000 - x} - \frac{x}{2\sqrt{8000 - x}} &= 0 \\ 16.000 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Daher lautet die Verhandlungslösung von Nash

$$u = (u_1|u_2) = (\frac{16.000}{3}|\sqrt{\frac{8000}{3}}),$$

also bekommt Person I $\frac{16.000}{3}$ und Person II $\frac{8.000}{3}$ EUR.

(c) Die Zielfunktion lautet

$$\mathcal{N}(u_1) = u_1(5 - \frac{1}{2}u_1) = -\frac{1}{2}u_1^2 + 5u_1$$

und weiter

$$\mathcal{N}'(u_1) = -u_1 + 5 = 0.$$

die Nash'sche Verhandlungslösung lautet also

$$u = (u_1|u_2) = (5|\frac{5}{2}).$$

Da beide risikoneutral sind, und der Nash'schen Verhandlungslösung unter anderem das Symmetrieaxiom zugrunde liegt, bekommt jeder 5.000 EUR.

Lösung zu Aufgabe 2

Offensichtlich ist der Drohpunkt c gegeben durch $c = (20.000|80.000)$. Es folgt

$$\mathcal{N}(x) = (u(x) - 20.000)(v(x) - 80.000) = (x - 20.000)(600.000 - x - 80.000) = (-x^2 + 540.000x - 1.040.000),$$

und weiter

$$\mathcal{N}'(x) = -2x + 540.000 = 0.$$

Demzufolge sollte $x = 270.000\,\text{EUR}$ betragen. Da die Forderungen von Person 1 jedoch maximal 200.000 betragen, ergibt sich, dass die Verhandlungslösung durch die das Auszahlungspaar

$$(200.000|400.000)$$

gegeben ist. Wir können einfach von 270.000 EUR auf 200.000 herunter gehen, da $\mathcal{N}'(x) \geq 0$ für $x \in (200.000, 270.000)$ und somit das Nash-Produkt in diesem Intervall strikt monoton wachsend ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(a)

(b) Offensichtlich ist der Drohpunkt c gegeben durch $c = (100.000|400.000)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(x) &= (u(x) - 100.000)(v(x) - 400.000) \\ &= (x - 100.000)(1.000.000 - x - 400.000) = (-x^2 + 700.000x - 6.000.000.000.000),\end{aligned}$$

und weiter

$$\mathcal{N}'(x) = -2x + 700.000 = 0.$$

Demzufolge sollte $x = 350.000\,\text{EUR}$ betragen. Die Verhandlungslösung ist durch das Auszahlungspaar, welches zugleich auch das Nutzenpaar ist

$$u = (u_1|u_2) = (350.000|650.000)$$

gegeben.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Geldnutzenfunktion von Spieler 2 ist gegeben durch

$$u_2(u_1) = \begin{cases} 12 - \frac{3}{7}u_1 & u_1 \in [0,7] \\ 16 - u_1 & u_1 \in (7,16] \end{cases}.$$

Da der Verhandlungstheorie von Nash unter anderem das Symmetrieaxiom und das Axiom der Unabhängigkeit von irrelevanten Lösungen zugrunde liegt, erhalten wir als Verhandlungslösung den Punkt

$$u = (u_1|u_2) = (8|8).$$

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Da beide Personen risikoneutral sind, haben beide eine lineare Geldnutzenfunktion

$$u_1(x) = ax \qquad u_2(x) = bx \quad a, b > 0.$$

Offensichtlich ist der Drohpunkt c gegeben durch $c = (0|100)$. Es folgt

$$\mathcal{N}(x) = (u(x))(v(x) - 100) = (ax)(b(500 - x - 100)) = 400abx - abx^2 - 40.000,$$

und weiter

$$\mathcal{N}'(x) = -2abx + 400ab = 0.$$

Demzufolge sollte $x = 200\,\mathrm{EUR}$ betragen. Die Verhandlungslösung ist durch das Auszahlungspaar

$$(200|300)$$

gegeben.

(b) Da beide Personen risikoneutral sind, haben beide eine lineare Nutzenfunktion

$$u_1(x) = ax \qquad u_2(x) = bx \quad a, b > 0.$$

Offensichtlich ist der Drohpunkt c gegeben durch $c = (0|100)$. Es folgt

$$\mathcal{N}(x) = (u(x))(v(x) - 100) = (ax)(b(500 - x - 100)) = 400abx - abx^2 - 40.000,$$

und weiter

$$\mathcal{N}'(x) = -2abx + 400ab = 0.$$

Demzufolge sollte $x = 200\,\mathrm{EUR}$ betragen. Jedoch kann Person 1 maximal $40\,\mathrm{EUR}$ fordern, daher ist die Verhandlungslösung durch das Auszahlungspaar

$$(40|460)$$

gegeben. Man kann aufgrund der Monotonie des Nash-Produktes im diesem Beispiel ($\mathcal{N}'(x) \geq 0$ für $x \in (0, 200)$) einfach von 200 auf 40 EUR runtergehen.

Lösung zu Aufgabe 6

(a) Die Nutzenfunktion von Spieler 2 ist gegeben durch

$$u_2(u_1) = \begin{cases} 16 - u_1 & u_1 \in [0, 10] \\ 36 - 3u_1 & u_1 \in (10, 12] \end{cases}.$$

Da der Verhandlungstheorie von Nash unter anderem das Symmetrieaxiom und das Axiom der Unabhängigkeit von irrelevanten Lösungen zugrunde liegt, erhalten wir als Verhandlungslösung den Punkt

$$u = (u_1|u_2) = (8|8).$$

(b) Der Drohpunkt ist offensichtlich gegeben durch $(2|4)$, die Zielfunktion lautet dementsprechend

$$\mathcal{N}(u_1) = \begin{cases} (u_1 - 2)(16 - u_1 - 4) = -u_1^2 + 14u_1 - 24 & u_1 \in [0, 10] \\ (u_1 - 2)(36 - 3u_1 - 4) = -3u_1^2 + 38u_1 - 72 & u_1 \in (10, 12] \end{cases}$$

Es folgt

$$\mathcal{N}'(u_1) = \begin{cases} -2u_1 + 14 & u_1 \in [0, 10] \\ -6u_1 + 38 & u_1 \in (10, 12] \end{cases}$$

Also $u_1 = 7$ (die andere Lösung entfällt aufgrund des Definitionsbereiches). Dementsprechend lautet die neue Verhandlungslösung

$$u = (u_1|u_2) = (7|9).$$

Lösung zu Aufgabe 7

Die Nutzenfunktion von Spieler 2 ist gegeben durch

$$u_2(u_1) = 4 - \frac{2}{3}u_1.$$

Der Drohpunkt c ist gegeben durch $c = (0|0)$, dementsprechend ist die Zielfunktion gegeben durch

$$\mathcal{N}(u_1) = u_1(4 - \frac{2}{3}u_1) = -\frac{2}{3}u_1^2 + 4u_1$$

und

$$\mathcal{N}'(u_1) = \frac{4}{3}u_1 + 4.$$

Also lautet die Nash Verhandlungslösung

$$u = (u_1|u_2) = (3|2).$$

Lösung zu Aufgabe 8

Der Drohpunkt c ist offenbar durch $c = (0|0)$ gegeben, daher lautet die Zielfunktion

$$\mathcal{N}(x) = x(\sqrt{500 - x})$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(x) = \sqrt{500 - x} - \frac{x}{2\sqrt{500 - x}} &= 0 \\ 500 - \frac{3}{2}x &= 0. \end{aligned}$$

Dementsprechend lautet die Verhandlungslösung von Nash

$$u = (u_1|u_2) = (\frac{1000}{3}|\sqrt{\frac{500}{3}}),$$

also bekommt Spieler I $\frac{1.000}{3}$ und Spieler II $\frac{500}{3}$ EUR.

Lösung zu Aufgabe 9

(a) Da beide Personen risikoneutral sind haben beide die Nutzenfunktionen $u_1(x) = u_2(x) = x$. Der Drohpunkt ist offensichtlich gegeben durch $(0|0)$. Da es sich um ein symmetrisches Problem handelt ergibt sich aufgrund des Symmetrieaxioms die Lösung $(500.000|500.000)$.

(b) Es handelt sich wiederrum um ein symmetrisches Problem, jedoch ist die maximale Auszahlung jetzt durch $5.000.000$ EUR begrenzt, dementsprechend lautet die Nash'sche Verhandlungslösung $(1.000.000|4.000.000)$.

Lösung zu Aufgabe 10

Die Nutzenfunktion von Spieler 2 ist gegeben durch

$$u_2(u_1) = 5 - \frac{5}{8}u_1.$$

Der Drohpunkt c ist gegeben durch $c = (0|0)$, dementsprechend ist die Zielfunktion gegeben durch

$$\mathcal{N}(u_1) = u_1(5 - \frac{5}{8}u_1) = -\frac{5}{8}u_1^2 + 5u_1$$

und

$$\mathcal{N}'(u_1) = \frac{10}{8}u_1 + 5.$$

Also lautet die Nash Verhandlungslösung

$$u = (u_1|u_2) = (4|2,5).$$

Lösung zu Aufgabe 11

Die Nutzenfunktion von Spieler 2 ist gegeben durch

$$u_2(u_1) = 6 - \frac{3}{4}u_1.$$

Der Drohpunkt c ist gegeben durch $c = (2|1)$, dementsprechend ist die Zielfunktion gegeben durch

$$\mathcal{N}(u_1) = (u_1 - 2)(5 - \frac{3}{4}u_1) = -\frac{3}{4}u_1^2 + \frac{13}{2}u_1 - 10$$

und

$$\mathcal{N}'(u_1) = \frac{3}{2}u_1 + \frac{13}{2} = 0.$$

Also lautet die Nash Verhandlungslösung

$$u = (u_1|u_2) = (\frac{13}{3}|\frac{11}{4}).$$

Lösung zu Aufgabe 12

Der Drohpunkt c ist offensichtlich gegeben durch $c = (0|100)$, daher ist die Zielfunktion gegeben durch

$$\mathcal{N}(x) = \sqrt{x}(1000 - x - 100)$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(900 - x) - \sqrt{x} &= 0 \\ 450 - \frac{3}{2}x &= 0 \\ x &= 300. \end{aligned}$$

Dementsprechend sagt die Nash'sche Verhandlungslösung das Auszahlungspaar

$$(300|700),$$

bzw. das Nutzenpaar

$$u = (u_1|u_2) = (\sqrt{300}|700)$$

voraus.

Lösung zu Aufgabe 13

Der Drohpunkt ist offenbar gegeben durch $(400|800)$. Die Zielfunktion lautet daher

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= (2\sqrt{x} - 40)(18.000 - 3x - 2.400) \\ &= (2\sqrt{x} - 40)(15600 - 3x) \\ &= -6x^{\frac{3}{2}} + 120x + 31.200\sqrt{x} - 40 \cdot 15.600 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(x) = -9x^{\frac{1}{2}} + 120 + \frac{31.200}{2\sqrt{x}} &= 0 \\ x - \frac{40}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{5.200}{3} &= 0 \\ z^2 - \frac{40}{3}z - \frac{5.200}{3} &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösungen

$$z_1 = \frac{20}{3} + \frac{\sqrt{16.000}}{3}, \qquad z_2 = \frac{20}{3} - \frac{\sqrt{16.000}}{3}.$$

Die zweite Lösung z_2 entfällt, weil negativ. Also beträgt die Nash-Lösung

$$\left(\left(\frac{20 + \sqrt{16.000}}{3}\right)^2 |6000 - \left(\frac{20 + \sqrt{16.000}}{3}\right)^2\right).$$

Lösung zu Aufgabe 14

(a) Da es sich um ein lineares Verhandlungsproblem handelt, muss die Gerade der Einigungsmenge durch die Punkte $(10|0)$ und $(5|4)$ gehen, es folgt die Gleichung

$$u_2(u_1) = 8 - \frac{4}{5}u_1.$$

Daher kann sich Person 2 maximal einen Nutzen von 8 sichern.

(b) Die Zielfunktion lautet nach Aufgabenstellung

$$\mathcal{N}(x) = (x - c_1)(8 - 0,8x) = -0,8x^2 + 8x - 8c_1 + 0,8c_1x$$

und daher

$$\mathcal{N}'(x) = -1,6x + 8 + 0,8c_1.$$

Da $x = 7$ folgt

$$\begin{aligned} -11,2 + 8 + 0,8c_1 &= 0 \\ c_1 &= 4 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 15

(a) Da die Nash'sche Verhandlungslösung das Symmetrieaxiom erfüllt, müssten beide die 1.000 EUR gleichmäßig untereinander verteilen, also jeder 500 EUR bekommt.

(b) Der Drohpunkt ist offenbar durch $(50|100)$ gegeben. Daher lautet die Zielfunktion

$$\mathcal{N}(x) \quad = \quad (ax - a \cdot 50)(b \cdot 1000 - bx - b \cdot 100) \qquad a, b > 0$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(x) = ab(900 - x) - ab(x - 50) & \\ -2abx + 950ab &= 0 \\ x &= 475. \end{aligned}$$

Daher lautet die Nash'sche Verhandlungslösung

$$(475|525).$$