**Übungsaufgaben zur Mathematik 1.1 für Lehrämter** — **WS 2009/2010**
**Dr. rer. nat. Peters** — **Serie 10**
**Carsten Erdmann** — **Abgabetermin:** 5.01.2010 (Vorlesung)

**Aufgabe 10.1.**

(a) Sei $\tau$ die positive Lösung von $x^2 = x + 1$ (goldener Schnitt). Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Potenzen von $\tau$ die folgende Formel gilt:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt.

(b) Beweisen Sie weiterhin mittels vollständiger Induktion, dass

$$\tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt. Wobei die Folge $f_n$ die Fibonacci-Folge ist, also $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_1 = f_2 = 1$.

$\boxed{\text{5 Punkte}}$

**Aufgabe 10.2.**

Beweisen Sie, dass die rekursiv durch $\boxed{\text{5 Punkte}}$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \qquad a_1 = 1,$$

definierte Folge konvergiert. Beweisen Sie weiterhin, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt konvergiert.

**Aufgabe 10.3.**

Es seien Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_1 = a > 0$ und $b_1 = b > 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. (Dieser gemeinsame Grenzwert wird als arithmetisch-geometrisches Mittel bezeichnet.)

**Hinweis:** Beweisen Sie erst, dass $a_n \geq b_n$, leiten Sie daraus dann die Monotonie/Beschränktheit beider Folgen her und schließlich bilden sie die Differenz und zeigen, dass diese gegen $0$ konvergiert.

$\boxed{\text{6 Punkte}}$

**Aufgabe 10.4.**

Berechnen Sie den Limesinferior und den Limessuperior der folgenden Folgen

(i) $a_n = (7)^n + (-7)^n$ (ii) $b_n = 4^{-n}(3^n - (-3)^n)$ (iii) $c_n = (1 - \frac{1}{3n})^{2n}$

(iv) $d_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(3 + \frac{4}{3n}) + (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(-4 - \frac{3}{n})$ (v) $e_n = (-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(3 + \frac{4}{3n}) + (-2)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(-4 - \frac{3}{n})$

$\boxed{\text{7 Punkte}}$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `http://studip.uni-rostock.de`