Übungsaufgaben zur Mathematik 1.1 für Lehrämter **WS 2009/2010**
Dr. rer. nat. Peters **Serie 13**
Carsten Erdmann **Abgabetermin:** 24.01.2010 (Vorlesung)

Aufgabe 13.1.
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6 + \sin(n)}{8} \right)^n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{8}{7}$ absolut konvergiert. Beweisen Sie weiterhin die Abschätzung:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6 + \sin(n)}{8} \right)^n x^n \right| < 7$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$. $\boxed{\text{5 Punkte}}$

Aufgabe 13.2.
Berechnen Sie die N-te Partialsumme und die Reihensumme (falls diese existiert) der folgenden unendlichen Reihen:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-9}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2-1)}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

(d) Beweisen Sie, daß für eine Folge $x_n > 0$ die Reihensumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ genau dann existiert, wenn die Folge x_n gegen eine positive Zahl konvergiert.

$\boxed{\text{3+2 Punkte}}$

Aufgabe 13.3.
Beweisen oder Wiederlegen Sie: $\boxed{\text{5 Punkte}}$

(a) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent.

(c) Gegeben sei eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergent.

Aufgabe 13.4.
Beweisen oder widerlegen Sie: $\boxed{\text{5 Punkte}}$

(a) Ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right).$$

(b) Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_n}{n} = a.$$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter:
`http://studip.uni-rostock.de`