**Übungsaufgaben zur Mathematik 1.1 für Lehrämter** **WS 2009 \ 2010**
**Dr. rer. nat. Peters** **Serie 4**
**Carsten Erdmann** **Abgabetermin:** 10.11.2009 (Vorlesung)

**Aufgabe 4.1.**
Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen seien die beiden folgenden Operationen definiert:

| | | |
|---|---|---|
| Tropische Addition | $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},$ | $a \oplus b := \min(a, b),$ |
| Tropische Multiplikation | $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},$ | $a \odot b := a + b.$ |

(a) Gelten für $\oplus$ das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz?

(b) Gelten für $\odot$ das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz?

(c) Gilt für die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ das Distributivgesetz?

(d) Wird $\mathbb{Z}$ mit der Tropischen Addition und der Tropischen Multiplikation zum Körper?

Beweisen Sie alle Antworten! $\boxed{\text{6 Punkte}}$

**Aufgabe 4.2.**

(a) Zeigen Sie, dass durch $2|(b-a)$ ( $2$ teilt $b-a$ ) eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf Mengen darstellt.

$\boxed{\text{2+2 Punkte}}$

**Aufgabe 4.3.**
Zeige, dass die Zahl $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

**Aufgabe 4.4.**
Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat $n$. Jedes Kaninchen bringt im Monat ein neues Paar hervor. Jedes Paar gebärt erstmals im zweiten Monat nach der (eigenen) Geburt. Todesfälle bleiben unberücksichtigt. Im Monat $1$ gibt es genau ein Kaninchenpaar.

(a) Zeigen Sie, dass $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ mit $a_1 = a_2 = 1$.

(b) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_3, \ldots, a_{33}$.

(c) Zeigen Sie, dass für $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ für $n = 1, 2, \ldots$ gilt.

$\boxed{\text{2+2+3 Punkte}}$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter:
`http://studip.uni-rostock.de`