Aufgabe 8.1.
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{3n-1}{5n+7}$$

und beweisen Sie die Konvergenz, indem Sie direkt die **Definition des Grenzwertes** benutzen, d.h. finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.
Berechnen Sie jeweils ein $N(\varepsilon)$ für $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}\}$.

5 Punkte

Aufgabe 8.2.
Zeigen Sie direkt mittels der **Definition des Grenzwertes**:

(a) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht gegen 1.

(b) Die Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht konvergent.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4-n^2+1} = 0$.

5 Punkte

Aufgabe 8.3.
Welche der folgenden Zahlenfolgen $\{a_n\}$ sind (i) konvergent, (ii) bestimmt divergent, (iii) unbestimmt divergent? Bestimmen Sie für (i) und (ii) die Grenzwerte!

(a) $3^{-n}(2^n + (-2)^n)$ (b) $\frac{3n^3-2n^2+2n+4}{4n^4+n^2-n}$ (c) $\frac{2n^3-n^2-n+1}{3n^3-1}$

(d) $3^n + (-2)^n$ (e) $2^{-n}(2^n + (-2)^n)$

5 Punkte

Aufgabe 8.4.
Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:
(a) $a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;
(b) $b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;
(c) $c_n := \frac{3^n+(-3)^n}{4^n}$;
(d) $d_n := \frac{3^n+(-3)^n}{2^n}$;
(e) $e_n := \frac{n^2+1}{2n+3} - \frac{n^3+1}{2n^2-1}$

5 Punkte

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `http://studip.uni-rostock.de`