Aufgabe 9.1.
Wir definieren rekursiv eine Folge durch $x_1 = \pi$ und

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n(x_n-2)^2}{x_n^2-4x_n+5} & \text{,wenn } x_n^2 - 4x_n + 5 \neq 0, \\ \pi & \text{,wenn } x_n^2 - 4x_n + 5 = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass alle x_n nichtnegativ sind.
(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.
(c) Beweisen Sie mittels (b), dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$. 5 Punkte

Aufgabe 9.2.
Es sei (a_n) die rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ definierte Folge. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert. Den Grenzwert könnte man heuristisch als

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

schreiben. Berechnen Sie ihn! 5 Punkte

Aufgabe 9.3.
Untersuchen Sie das Monotonie-Verhalten der nachstehenden Zahlenfolgen!

(a) $a_n = \frac{n^2}{2^{n+3}}$ (b) $b_n = \frac{6n}{n^2+9}$ (c) $c_n = \frac{n-10}{n}$

(d) $d_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 1)$ (e) $e_n = \frac{n!}{5^n}$

5 Punkte

Aufgabe 9.4.
Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte für die Folgen

(a) $a_n = (-1)^{n-1}(2 - \frac{4}{n}) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}(1 + \frac{1}{n})$

(b) $b_n = (1 + (-1)^n)n$

(c) $c_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}(5 - \frac{4}{n+3}) + (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor}(7 + \frac{3}{n+1})$

Hinweis: $\lfloor \cdot \rfloor$ meint die Gaußsche Klammerfunktion, bzw. die Abrundungsfunktion

2+1+2 Punkte

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `http://studip.uni-rostock.de`