

Aufgabe 3.1.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \ln(x)$ auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist. 4 Punkte

Aufgabe 3.2.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen stetig oder sogar gleichmäßig stetig sind.

(a) $f(x) = x \ln(x)$, $x \in [0, 1]$,

(b) $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in [1, \infty)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von $\exp()$. 4 Punkte

Aufgabe 3.3.

Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2 \cdot \sin(x) & , \text{falls } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot \sin(x) + b & , \text{falls } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & , \text{falls } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

überall stetig wird? 3 Punkte

Aufgabe 3.4.

Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = ax + b, \quad x \in [z_a, z_b], \quad z_a, z_b \in \mathbb{R}, \quad z_b > z_a.$$

Hinweis: Fallunterscheidung in Abhängigkeit von a notwendig. 3 Punkte

Aufgabe 3.5.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Man zeige $0 \leq f(x) \leq 1$ für jedes $x \in [0, 1]$, also $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- (b) Man bestimme die Fixpunkte der Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, d.h. man bestimme die Lösungen der Gleichung $f(x) = x$.
- (c) Man berechne die 3. iterierte Funktion $f_3 := f \circ f \circ f$ und zeichne den Graphen von $f_3(x)$.

6 Punkte