

Aufgabe 6.1.

Zeichnen Sie die Funktionen und bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

| | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6} \right)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right)$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot(x) - \frac{1}{x} \right)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln x}{x}$ | k) $\lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \arctan x$ | l) $\lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\sin x}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^{\tan \frac{\pi x}{2}}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ | o) $\lim_{x \rightarrow +0} (2^x - 1)^{\sin x}$ |

15 Punkte

Aufgabe 6.2.

(a) Man beweise die Ungleichung $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.

Hinweis: Man wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf $f(x) = \ln(1+x)$ an.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

die k -te Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ ist.

3+3 Punkte

Aufgabe 6.3.

Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen jeweils mittels des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion:

(a) $f_1(x) = \arcsin(x)$ (b) $f_2(x) = \arccos(x)$ (c) $f_3(x) = \operatorname{arccot}(x)$

6 Punkte