Übungsaufgaben zur Mathematik 1.2 für Lehrämter **SS 2010**
Dr. rer. nat. Peters **Serie 9**
Carsten Erdmann **Abgabetermin:** 21.6.2010, 14:45 Uhr (Übung/Briefkasten)

Aufgabe 9.1.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie das Integral $\int_a^b \sqrt{x}dx$ als Grenzwert der Riemannschen Obersummen für die Funktion $\sqrt{x}$, $x \in [a, b]$, bzgl. der Zerlegung durch die Punkte $x_k = (\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n})^2$, $k = 0, ..., n$.

Hinweis. Man benutze, dass $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

$\boxed{\text{5 Punkte}}$

Aufgabe 9.2.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie als Grenzwert von Riemann-Summen $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ den Wert des Integrals $\int_a^b \frac{1}{x^2}dx$ wie folgt: Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung Z_n mit $x_k := a + d\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$, $d := b - a$ und als $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$ das geometrische Mittel von x_{k-1} und x_k.

Hinweis. Man benutze, dass $\frac{d}{(na+kd)(na+(k-1)d)} = \frac{1}{na+(k-1)d} - \frac{1}{na+kd}$.

$\boxed{\text{5 Punkte}}$

Aufgabe 9.3.
(a) Geben Sie eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die auf (a, b) differenzierbar ist, deren Ableitung jedoch unbeschränkt ist und somit nicht Riemann-integrierbar.
(b) Geben sie eine Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ an, die nicht Riemann-integrierbar ist, deren Betrag $|g|$ es aber ist.

$\boxed{\text{4 Punkte}}$

Aufgabe 9.4.
(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{a) } -\int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^2 (x^5 - 3x^2 + x - 7)\,dx, \qquad \text{c) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \sin^2(x)}{\sin^2(x)}\,dx, \qquad \text{d) } \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

(ii) Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an

$$\text{e) } \int r\cos(t)\,dt, \qquad \text{f) } \int \frac{dx}{2x}, \qquad \text{g) } \int x\sqrt{x}\,dx, \qquad \text{h) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

$$\text{i) } \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx, \qquad \text{j) } \int \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}\,dx, \qquad \text{k) } \int \frac{x^4}{x - 1}\,dx, \qquad \text{l) } \int e^{-x}\,dx.$$

$\boxed{\text{15 Punkte}}$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter:
`http://studip.uni-rostock.de`