Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 10

Uneigentliche Integrale

- Die Funktion f sei für $x \geq a$ definiert und in jedem Intervall $[a,u]$ Riemann-integrierbar. Wenn
$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$$
existiert und endlich ist, so heißt der Grenzwert das **uneigentliche** Riemann**-Integral** und wird mit
$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$
bezeichnet.
- Für den Fall, dass $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ in a nicht definiert ist, aber dennoch $\lim\limits_{s\searrow a}\int\limits_s^b f(t)\,dt$ existiert und endlich ist, sprechen wir auch hier vom **uneigentlichen** Riemann**-Integral**.

Bogenlänge und Rotationskörper

- Ist f eine auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion, so gilt für die Länge der durch f gegebenen Kurve zwischen den Punkten $(a,f(a))$ und $(b,f(b))$:
$$s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$
Ist die Kurve C in der Ebene (bzw. im Raum) in Parameterform mit stetig differenzierbaren Funktionen $x=\phi(t)$ und $y=\psi(t)$ (und $z=\chi(t)$) , $t_1\leq t\leq t_2$, gegeben, so gilt für die Länge von C :
$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot\phi(t)^2+\dot\psi(t)^2}\,dt \text{ bzw. } s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot\phi(t)^2+\dot\psi(t)^2+\dot\chi(t)^2}\,dt$$
- Sei $f\geq 0$ in $[a,b]$ und sei K der Körper, der durch Rotation der durch f gegebenen Kurve zwischen den Punkten $(a,f(a))$ und $(b,f(b))$ entsteht, also $K=\{(x,y,z): a\leq x\leq b, y^2+z^2\leq f^2(x)\}$. Dann gilt für das Volumen von K :
$$V(K)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$
Für die Oberfläche von K ohne Kreisscheiben an den Seiten gilt:
$$O(K)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

numerische Integration

- Rechteckformel:
$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(y_0+y_1+...+y_{n-1}\right).$$
- Trapezformel:
$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2n}\left(y_0+2y_1+...+2y_{n-1}+y_n\right).$$
- Simpsonregel:
$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6m}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+...+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}\right)$$
wobei jeweils
$$y_j=f(x_j),\ x_j=a+j\cdot h=a+j\frac{b-a}{n}.$$

Flächenberechnung

- Sei $f(x) \geq g(x)$ in einem Intervall $[a,b]$, so gilt für die Fläche F zwischen diesen beiden Funktionen
$$F = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$
- Ist die zu berechnende Fläche hingegen nur in Parameterschreibweise $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ gegeben, so gilt für die Fläche einschließlich des Kegelstücks bis hin zum Ursprung
$$F = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)\big)\ dt.$$

....

Aufgabe 10.1.
Überprüfen Sie die Existenz der uneigentlichen Integrale $(a)\ \int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $(b)\ \int\limits_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Lösung zu Aufgabe 10.1.

(a) Wegen $\int\limits_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2\sqrt{x}\big|_{x=s}^{x=9} \;=\; 2(3-\sqrt{s})$ für $s \in (0,3)$ folgt
$$\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \lim_{s\searrow 0}\int\limits_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \lim_{s\searrow 0} 2(3-\sqrt{s}) \;=\; 6.$$

(b) Wegen $\int\limits_s^3 \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; -\frac{1}{x}\big|_{x=s}^{x=3} \;=\; \frac{1}{s} - \frac{1}{3}$ existiert das uneigentliche RIEMANN-Integral $\int\limits_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ **nicht**.

Aufgabe 10.2.
Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale!

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a}\,dx,\quad a\geq 1$

Lösung zu Aufgabe 10.2.

(a)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \overset{y=1-x}{=} -\int_1^0 y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \left[2y^{\frac{1}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} = 2$$

(b)
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_1^s x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{s\to\infty}\left[-2x^{\frac{-1}{2}}\right]_{x=1}^{x=s} = \lim_{s\to\infty} -2s^{\frac{-1}{2}} + 2 = 2$$

(c)
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{s\nearrow 0}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{s\nearrow 0}\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{x=-1}^{x=s} = \lim_{s\nearrow 0} -e^{\frac{1}{s}} + e^{-1} = e^{-1}$$

(d)
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a}\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dx = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]_{x=0}^{x=s} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{s}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

Aufgabe 10.3.
Ein stromlinienförmiger Auftriebskörper wird durch Rotation eines Graphen der Funktionenschar
$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2-x} \qquad \text{mit } x\in\mathbb{R}, 0\leq x\leq k^2, k\in\mathbb{R}_+$$
um die x-Achse beschrieben.

(a) Für welchen Wert von k beträgt das Volumen des Rotationskörpers $\frac{64\pi}{192}$ Volumeneinheiten.

(b) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser des Rotationskörpers in Abhängigkeit von k.

(c) Bei Annäherung an $x = 0$ läuft der Rotationskorper spitz zu. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Tangente an den Graphen von f_k mit der x-Achse für $x \to 0$ bildet.

(d) Bei Rotation um die x-Achse und bei homogener Massenverteilung liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers aus Symmetriegründen auf der x-Achse. Für seine Abzisse x_s gilt

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}.$$

Dabei ist V das Volumen des Rotationskörpers. Berechnen Sie x_s für den Auftriebskörper.

(e) In den Rotationskörper, der von f_k für $k = 3$ erzeugt wurde, soll ein Zylinder mit dem Radius 0.5 und der Höhe 6 untergebracht werden. Prüfen Sie, ob dieser Zylinder in den Rotationskörper hineinpasst. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zu Aufgabe 10.3.

(a) Zuerst bestimmen wir die Schnittpunkte mit der x-Achse, damit wir die Integrationsgrenzen erhalten, dazu setzen wir $f_k(x) = 0$, also

$$\begin{aligned} f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} &= 0 \\ \frac{x^2}{16k^2}(k^2 - x) &= 0 \\ x^2(k^2 - x) &= 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = k^2$.

Nun berechnen wir das Volumen, das bei Rotation von f_k um die x-Achse entsteht. Dieses ist natürlich von k abhängig. Also

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b f_k^2(x)dx \\ &= \pi \int_0^{k^2} \frac{x^2}{16k^2}(k^2 - x)dx \\ &= \frac{\pi}{16k^2} \int_0^{k^2} (k^2x^2 - x^3)dx \\ &= \frac{\pi}{16k^2} \left(\frac{1}{3}k^2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^{k^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{16k^2} \left(\frac{1}{3}k^2k^6 - \frac{1}{4}(k^2)^4 \right) \\ &= \frac{\pi}{192}k^6. \end{aligned}$$

Nach Aufgabenstellung gilt, dass $V_x = \frac{64\pi}{192}$, also erhalten wir die Gleichung

$$V_x = \frac{64\pi}{192} = \frac{\pi}{192}k^6$$

und somit die Lösung $k = 2$.

(b) Wir berechnen das lokale Maximum zwischen 0 und k^2. Also bilden wir die erste Ableitung und setzen diese gleich Null.

$$\begin{aligned} f_k'(x) = \frac{\sqrt{k^2 - x}}{4k} - \frac{x}{8k\sqrt{k^2 - x}} &= 0 \\ k^2 - x &= 2x \\ x &= \frac{2}{3}k^2. \end{aligned}$$

Daher beträgt der maximale Durchmesser d_{max}

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{max} &= 2 \cdot f_k(\frac{2}{3}k^2) \\ &= \frac{1}{3}k^2\sqrt{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

(c) Offensichtlich ist

$$\lim_{x\to 0} f_k'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{k^2-x}}{4k} - \frac{x}{8k\sqrt{k^2-x}} = \frac{1}{4}$$

und somit ist der Winkel durch $\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$ gegeben.

(d) Das Volumen hatten wir bereits berechnet, nämlich $V_x = \frac{\pi}{192}k^6$, somit gilt

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\pi\int_0^{k^2} x(f_k(x))^2dx}{\frac{\pi}{192}k^6} \\ &= \frac{12}{k^8}\int_0^{k^2}(k^2x^3 - x^4)dx \\ &= \frac{12}{k^8}\left(\frac{k^2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^{k^2}\right) \\ &= \frac{12}{k^8}\left(\frac{k^2\cdot(k^2)^4}{4} - \frac{(k^2)^5}{5}\right) \\ &= \frac{3}{5}k^2. \end{aligned}$$

(e) Wir setzen $f_3(x) = \frac{1}{2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{x}{12}\sqrt{9-x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{144}(9-x) &= \frac{1}{4} \\ x^2(9-x) &= 36 \\ -x^3 + 9x^2 - 36 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Probieren erhalten wir näherungsweise die Nullstellen $x_1 \approx 2.322$ und $x_2 \approx 8.502$, somit passt der Zylinder offensichtlich rein, da $x_2 - x_1 > 6$.

Aufgabe 10.4.
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz!

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Lösung zu Aufgabe 10.4.

(a) Wir benutzen das Integralvergleichskriterium und betrachten statt der Reihe das folgende Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \overset{y=\ln(x)}{=} \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{y}\,dy = [\ln(y)]_{y=\ln(2)}^{y\nearrow\infty} = \infty.$$

Somit divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

(b) Wir benutzen das Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n}\frac{e^{n^2}}{e^{(n+1)^2}} < \frac{n+1}{n}\frac{1}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Somit konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ (absolut).

Aufgabe 10.5.
Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = 4 - x^2$ für $-2 \le x \le 2$ um die x-Achse entsteht.

Lösung zu Aufgabe 10.5.
Wir benutzen die Formel zur Volumenberechnung für Rotationskörper der durch f gegebenen Kurve, also

$$V(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Nun setzen wir einfach ein und erhalten

$$\begin{aligned} V(K) = \pi \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2\,dx &= \pi \int_{-2}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{x=0}^{x=2} \\ &= 2\pi \left[\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right] = \frac{512\pi}{15}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.6.
Gegeben sei die Kettenlinie $y = \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$ über dem Intervall $0 \leq x \leq 2$. Man bestimme die Bogenlänge dieses Kurvenstückes!

Lösung zu Aufgabe 10.6.
Die Bogenlänge ist wegen $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$ gegeben durch

$$\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int_0^2 \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \left[2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=2} = 2\sinh(1).$$

Aufgabe 10.7.
Man bestimme die Länge eines Bogens der Kreisevolvente

$$\begin{aligned} x &= a(\cos(t) + t\sin(t)) \\ y &= a(\sin(t) - t\cos(t)), \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 10.7.
Die Ableitung der Funktion $f(t) = (a(\cos(t) + t\sin(t)), a(\sin(t) - t\cos(t)))$ ist durch $f'(t) = (at\cos(t), at\sin(t))$ gegeben. Weiterhin ist $||f'(t)||_2 = at$ somit ist

$$\int_0^{2\pi} ||f'(t)||_2\,dt = \int_0^{2\pi} at\,dt = 2a\pi^2.$$

Aufgabe 10.8.
Berechnen Sie die Oberfläche (ohne die beiden Kreisscheiben am Rand) des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = e^x, 0 \leq x \leq \ln(2)$, um die x-Achse enststeht. (**Hinweis:** Es gilt $\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$)

Lösung zu Aufgabe 10.8.

$$\begin{aligned} O(K) = 2\pi \int_0^{\ln(2)} e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx &\overset{y=e^x}{=} 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+y^2}\,dy \\ &= 2\pi \int_{\operatorname{arcsinh}(1)}^{\operatorname{arcsinh}(2)} \sqrt{1+\sinh^2(t)}\cosh(t)\,dt \\ &= 2\pi \int_{\operatorname{arcsinh}(1)}^{\operatorname{arcsinh}(2)} \cosh^2(t)\,dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\operatorname{arcsinh}(1)}^{\operatorname{arcsinh}(2)} (e^t + e^{-t})^2\,dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\operatorname{arcsinh}(1)}^{\operatorname{arcsinh}(2)} e^{2t} + 2 + e^{-2t}\,dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{t=\operatorname{arcsinh}(2)}^{t=\operatorname{arcsinh}(1)} \end{aligned}$$

oder alternativ mittels Hinweis

$$\begin{aligned} O(K) = 2\pi \int_0^{\ln(2)} e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx &\overset{y=e^x}{=} 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+y^2}\,dy \\ &= \pi \left[y\sqrt{1+y^2} + \ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \pi \left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 10.9.
Man berechne

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

näherungsweise mit der Rechteck-, Trapez- und Simpsonregel, wobei die Teilungspunkte $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ zu benutzen sind.

Lösung zu Aufgabe 10.9.

(a) Rechteckformel:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{4}\left(\frac{1}{1+0^2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right) = \frac{3979}{3400} \approx 0.8452941176.$$

(b) Trapezformel:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{8}\left(1 + \frac{32}{17} + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5323}{6800} \approx 0.7827941176.$$

(c) Simpsonregel:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left(1 + \frac{64}{17} + \frac{8}{5} + \frac{64}{25} + \frac{1}{2}\right) = \frac{8011}{10200} \approx 0.7853921569.$$

Aufgabe 10.10.
Man bestimme die Fläche der durch die Kardiode

$$r = a\,(1+\cos(\varphi)), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

begrenzten Figur mit Hilfe der Sektorformel.

Lösung zu Aufgabe 10.10.
Um die Sektorformel

$$F = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)\right)\,dt$$

anwenden zu können, benötigen wir zuerst eine Darstellung $x = \phi(\varphi)$ und $y = \psi(\varphi)$. Wegen

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)$$

folgt bezüglich x

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,(x(\varphi)) &= \big(r'(\varphi)\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\big)\,d\varphi \\
\frac{d}{dx}\,(y(\varphi)) &= \big(r'(\varphi)\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\big)\,d\varphi
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
y\,dx - x\,dy &= \big[r\sin(\varphi)\,\big(r'(\varphi)\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\big) - r\cos(\varphi)\,\big(r'(\varphi)\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\big)\big]\ d\varphi \\
&= -r^2\,d\varphi
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Kardiode

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} -r^2\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a^2\,(1+\cos(\varphi))^2\ d\varphi \\
&= a^2\int_{0}^{\pi} \big(1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)\big)\ d\varphi \\
&= a^2\int_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right)\ d\varphi \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin(\varphi) + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi a^2.
\end{aligned}$$