Lösungen der Aufgabenserie 1

Aufgabe 1.1

$$z_1 + z_2 = 4 + 3i, \quad z_1 - z_2 = 2 - i, \quad z_1 \cdot z_2 = (3+i)\cdot(2-i) = 3 + 7i + 2i^2 = 1 + 7i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-5i}{5} = 1 - i$$

Aufgabe 1.2

a) $|z-1-i|$ ist der Abstand der komplexen Zahl (des Punktes) z zur Zahl (zum Punkt) $1+i$. Die Ungleichung $|z-1-i| \leq 3$ beschreibt also die Menge aller Punkte z in der komplexen Zahlenebene, welche in der Kreisscheibe mit dem Radius 3 und dem Mittelpunkt $z_0 = 1 + i$ liegen.

b) Die Gleichung $|z - i| = |z + 3|$ beschreibt die Menge aller Punkte z in der komplexen Ebene, welche zu $z_1 = i$ und $z_2 = -3$ den gleichen Abstand haben. Dies ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $z_1 z_2$.
Andere Variante: Sei $z = x + iy$. Dann ist

$$|z-i|^2 = |x + i(y-1)|^2 = x^2 + (y-1)^2 \quad \text{und} \quad |z+3|^2 = |x + 3 + iy|^2 = (x+3)^2 + y^2.$$

Aus der Gleichung $|z-i|^2 = |z+3|^2$ folgt also

$$x^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2 + y^2 \quad \text{oder} \quad y = -3x - 4.$$

Dies ist eine Geradengleichung.

c) Die gegebene Ungleichung is gleichbedeutend mit $|z - 2i|^2 \leq 4\,|z + 2 + i|^2$. Für $z = x + iy$ ergibt sich $x^2 + (y-2)^2 \leq 4\,(x+2)^2 + 4\,(y+1)^2$. Hieraus erhält man $(x + 8/3)^2 + (y+2)^2 \geq 52/9$. Diese Ungleichung beschreibt die Menge aller Punkte, die sich außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $(-\frac{8}{3}, -2)$ und dem Radius $\sqrt{52/9}$ befinden.

Aufgabe 1.3
$z_1, \overline{z}_2$ besitzen die trigonometrischen Darstellungen

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \qquad \overline{z}_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

a) $\Rightarrow z_1^2 \overline{z}_2 = 16\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}(1-i),$
b) $\overline{z}_2 / z_1 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = -2i$

Aufgabe 1.4

a) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1-i)^{10} = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2} - i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = -32i$

b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)}\right)^{20} = 2^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{3} + i\sin\frac{35\pi}{3}\right) = 2^9\,(1 - i\sqrt{3})$

Aufgabe 1.5

a) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{i} = w_{1,2}$ mit $w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}, \quad w_2 = -w_1$

b) $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ die vierten Wurzeln aus $-i$ sind die Zahlen $\cos(\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})$, $k = 0, 1, 2, 3$
(oder die Zahlen $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ und $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$)

c) $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \sqrt{-1+i\sqrt{3}} = w_{1,2}$
mit $w_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{6}, \quad w_2 = -w_1$