Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 1

Wiederholung - Theorie: Mengen

Der grundlegende Begriff der Mengenlehre ist die Elementbeziehung. Eine **Menge** A ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte a unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge. Für „ a ist Element von A “ bzw. „ a ist nicht Element von A “ schreibt man „ $a \in A$ “ bzw. „ $a \notin A$ “. Mengen können beschrieben werden durch Aufzählung aller ihrer Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M = \{a, b, c\}$ oder $U = \{1, 3, 5, \ldots\}$, oder durch eine definierende Eigenschaft, die genau den Elementen der Menge zukommt. Z.B. wird die Menge U der ungeraden natürlichen Zahlen durch $U = \{x \mid x \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl }\}$ beschrieben. Für die Zahlenbereiche sind folgende Bezeichnungen üblich:

$$\begin{array}{lcll}
\mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{Menge der natürlichen Zahlen,} \\
\mathbb{Z} & = & \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} & \text{Menge der ganzen Zahlen,} \\
\mathbb{Q} & = & \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge g \neq 0\right\} & \text{Menge der rationalen Zahlen,} \\
\mathbb{R} & & & \text{Menge der rellen Zahlen,} \\
\mathbb{C} & & & \text{Menge der komplexen Zahlen.}
\end{array}$$

Es gilt das Extensionalitätsprinzip für Mengen:
Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

So sind z.B. die Mengen $\{3, 1, 7, 2\}$ und $\{1, 2, 3, 7\}$ gleich.

Teilmengen

Es erweist sich als sinnvoll, die leere Menge $\emptyset$, die kein Element enthält, einzuführen. Wegen des Extensionalitätsprinzips gibt es nur eine solche Menge. Beispielsweise ist die Menge $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2x + 2 = 0\}$ leer.
Sind A, B Mengen und gilt $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$, so heißt A Teilmenge von B . Dieser Sachverhalt wird mit $A \subseteq B$ bezeichnet. (Damit ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge, d.h. $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M .)
Zwei Mengen sind demnach genau dann gleich, wenn jede Teilmenge der anderen ist:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Diese Tatsache wird häufig zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen benutzt.
Die Menge aller Teilmengen einer Menge M nennt man **Potenzmenge** von M und bezeichnet sie mit $\mathscr{P}(M)$, d.h. $\mathscr{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$. Damit gilt $\emptyset \in \mathscr{P}(M)$ für jede Menge M . Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M heißt **Kardinalzahl** von M und wird mit $\operatorname{card}(M)$ oder $|M|$ bezeichnet. Auch unendlichen Mengen können Kardinalzahlen zugeordnet werden.

Operationen mit Mengen

Venn− **Diagramm** Zur Veranschaulichung von Mengen und Mengenoperationen benutzt man Venn-Diagramme. Dabei werden Mengen durch ebene Figuren dargestellt.

Vereinigung, Durchschnitt, Komplement

Durch Mengenoperationen werden aus gegebenen Mengen auf verschiedene Weise neue Mengen gebildet:
Seien A und B Mengen. Die Vereinigung (Bezeichnung $A \cup B$) bzw. der Durchschnitt (Bezeichnung $A \cap B$) ist durch

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \qquad \text{bzw.} \qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

definiert. Die Mengen A und B heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$.
Betrachtet man nur Teilmengen einer vorgegebenen Grundmenge M , so ist das Komplement von A bezüglich M durch

$$C_M(A) = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$$

definiert; ist die Grundmenge M aus dem Zusammenhang klar, wird dafür auch $\overline{A}$ geschrieben.

Grundgesetze der Mengenalgebra

Die eingeführten Mengenoperationen haben analoge Eigenschaften wie die Junktoren in der Aussagenlogik. Es gelten folgende Grundgesetze der Mengenalgebra:

(a) **Assoziativgesetze**

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C),\\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C).\end{aligned}$$

(b) **Kommutativgesetze**

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A,\\ A \cup B &= B \cup A.\end{aligned}$$

(c) **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C),\\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).\end{aligned}$$

(d) **Absorptionsgesetze**

$$\begin{aligned}A \cap (A \cup C) &= A,\\ A \cup (A \cap B) &= A.\end{aligned}$$

(e) **Idempotenzgesetze**

$$\begin{aligned}A \cap A &= A,\\ A \cup A &= A.\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}A \cap \overline{A} &= \emptyset,\\ A \cup \overline{A} &= M.\end{aligned}$$

(g) DE MORGAN**sche Regeln**

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B},\\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}.\end{aligned}$$

(h) **Gesetze für** $A \subset M$ **und** M **Universalmenge**

$$\begin{aligned}A \cap M &= A,\\ A \cup \emptyset &= A,\\ A \cap \emptyset &= \emptyset,\\ A \cup M &= M,\\ \overline{M} &= \emptyset,\\ \overline{\emptyset} &= M.\end{aligned}$$

(i) **Doppelte Negation**

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Diese Tabelle erhält man unmittelbar aus den Grundgesetzen der Aussagenlogik, wenn man folgende Ersetzungen vornimmt: $\wedge$ durch $\cap$, $\vee$ durch $\cup$, w durch M und f durch $\emptyset$.

Weitere Mengenoperationen

(a) **Differenz:** Außer den oben eingeführten Mengenoperationen werden noch die Differenz $A \setminus B$ und die symmetrische Differenz $A \triangle B$ zweier Mengen A und B erklärt:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \qquad \text{und} \qquad A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

Offensichtlich gilt $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(b) **Kartesisches Produkt:** Das kartesische Produkt $A \times B$ ist durch

$$A \times B \; = \; \{(a,b) \;\mid\; a \in A \wedge b \in B\}$$

definiert. Die Elemente (a,b) von $A \times B$ heißen **geordnete Paare** und sind durch

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$$

charakterisiert. Entsprechend sind die Elemente des kartesischen Produkts $A_1 \times \ldots \times A_n$ n-Tupel, d.h.

$$A_1 \times \ldots \times A_n \; = \; \{(a_1, \ldots, a_n) \;\mid\; a_i \in A_i,\; i = 1, \ldots, n\}.$$

Das n-fache kartesische Produkt einer Menge A mit sich selbst wird mit A^n bezeichnet.

Mächtigkeit von Mengen

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge haben wir als Kardinalzahl bezeichnet. Dieser Anzahlbegriff soll auf unendliche Mengen übertragen werden.

Mächtigkeit, Kardinalzahl

Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**, falls es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung gibt. Jeder Menge A wird eine Kardinalzahl $|A|$ oder $\mathrm{card}(A)$ zugeordnet, so dass gleichmächtige Mengen die gleiche Kardinalzahl erhalten. Eine Menge ist zu ihrer Potenzmenge niemals gleichmächtig, so dass es keine größte Kardinalzahl gibt.

....

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1.1.
Entscheiden Sie, bei welchen der folgenden Ausdrücke es sich um Mengen handelt und begründen sie ihre Entscheidung, falls dem nicht so ist.

(a) $\{1, 7, 9, 10\}$, **(b)** $\{A\}$, **(c)** (r, q, s), **(d)** $\{0, 12, 5, 17, 0, 3\}$, **(e)** $\{\emptyset, \{1, 2\}, a\}$ **(f)** $\{\{\emptyset\}\}$ **(g)** $[4, Z, w]$

Lösung zu Aufgabe 1.1.
Bei den Ausdrücken $(a), (b), (e), (f)$ handelt es sich um reguläre Mengen. Bei (c) handelt es sich um keine Menge sondern um ein Tripel. Bei (d) kommt die 0 doppelt vor und bei (g) handelt es sich um eine Aufzählung bzw. Liste.

Aufgabe 1.2.
Bestimmen Sie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$!

(a) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x = x^n\}$ **(b)** $A_n = \{a \in \mathbb{Z} : |a - 11| = n\}$ **(c)** $A_n = \{a \in \mathbb{Z} : (-a)^n = a^n\}$

Lösung zu Aufgabe 1.2.

(a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0, 1\}$, **(b)** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}/\{11\}$ und $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, **(c)** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}$ und $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

Aufgabe 1.3.
Untersuchen Sie die Richtigkeit der folgenden Gleichungen für drei Mengen A, B und C (Begründen Sie ihre Antworten mit einem Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$; **(b)** $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$;

(c) $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$; **(d)** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Lösung zu Aufgabe 1.3.

(a) zu zeigen: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap C &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \cap C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus B \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \setminus B &\Rightarrow x \in A \cap C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C \end{aligned}$$

(b) zu zeigen: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A \vee x \in A \cap B \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A) \vee x \in A \cap B \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

(c) zu zeigen: $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in A \setminus B \\ &\Rightarrow x \in A \cap (A \setminus B), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \setminus B) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in A \setminus B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \setminus B \end{aligned}$$

(d) Gegenbeispiel: $A = \{1,2\}$; $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3\}$.

Aufgabe 1.4.
Geben sie die folgenden Mengen reeller Zahlen in aufzählender Schreibweise an!

(a) $A := \{x \in \mathbb{R} : x + 3 = 5\}$ **(b)** $B := \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 = 6\right\}$ **(c)** $C := \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 = -8\right\}$

(d) $D := \left\{x \in \mathbb{R} : (x-3)^2 = 36\right\}$ **(e)** $E := \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\right\}$

Lösung zu Aufgabe 1.4.

(a) $A = \{2\}$, **(b)** $B = \{-3,3\}$, **(c)** $C = \{-2\}$,

(d) $D = \{-3,9\}$, **(e)** $E = \{0,1,2\}$.

Aufgabe 1.5.
Sei $M := \{1,2\}$, $N := \{2,3,4\}$ und $O := \{1,3,5\}$, entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $M \subset N$, **(b)** $N \subset M$, **(c)** $N = M$, **(d)** $N \neq M$, **(e)** $\{2,4\} \subset N$,

(f) $2 \in M$, **(g)** $3 \subset N$, **(h)** $\{2,3,4,5\} \subset N$, **(i)** $M \cap N \cap O = \emptyset$,

Lösung zu Aufgabe 1.5.

(a) Falsch, weil $1 \notin N$.
(b) Falsch, weil $3,4 \notin M$.
(c) Falsch, folgt unmittelbar aus (a) und (b).
(d) Richtig, folgt aus (a) und (b).
(e) Richtig.
(f) Richtig
(g) (g) ist falsch weil 3 keine Menge ist.
(h) Falsch, $5 \notin N$.
(i) Richtig, weil kein Element gleichzeitig in allen Mengen vorhanden ist.

Aufgabe 1.6.
Bestimmen sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{1,3,5,7\} \cup \{2,4,6,8\}$,

(b) $B := \{b,c,a\} \cup \{a,d\}$,

(c) $C := \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \cup \{3,5,7\}$,

(d) $D := \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap \{\gamma,\delta,\varepsilon\}$

(e) $E := \{1,3,5,7,...\} \cap \{0,2,4,6,...\}$,

(f) $F := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ mit $M_k := \{-k, -(k-1), ..., 0, 1, 2, 3, ...\}$

(g) $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$ mit $M_k := \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, ...\right\}$,

Lösung zu Aufgabe 1.6.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 8\}$, **(b)** $B = \{a,b,c,d\}$, **(c)** $C = A \setminus \{8\}$, **(d)** $D = \{\gamma,\delta\}$,

(e) $E = \emptyset$, **(f)** $F = \mathbb{Z}$, **(g)** $G = \{0,1\}$.

Aufgabe 1.7.
Bestimmen Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen und geben Sie ihre Mächtigkeit an.

(a) $A := \emptyset$, **(b)** $B := \{1\}$, **(c)** $C := \{1,2\}$, **(d)** $D := \{1,2,3\}$, **(e)** $E := \{\emptyset\}$.

Lösung zu Aufgabe 1.7.

(a) $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$, $|\mathscr{P}(A)| = 1$
(b) $\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $|\mathscr{P}(B)| = 2$
(c) $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $|\mathscr{P}(C)| = 4$
(d) $\mathscr{P}(D) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, $|\mathscr{P}(D)| = 8$
(e) $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $|\mathscr{P}(E)| = 2$

Aufgabe 1.8.
Es werde die Universalmenge $M = \{i|i = 1(1)15\}$ und ihre Teilmengen $A = \{j|j = 1(2)15\}$, $B = \{k|k = 6(2)12\}$, $C = \{2, 3, 5, 12, 13\}$ betrachtet. Bestimmen sie

(a) $A \cup B$, **(b)** $A \cap B$, **(c)** $\overline{A}$, **(d)** $\overline{C}$, **(e)** $\overline{C} \cap B$

(f) $\overline{B} \cap C$, **(g)** $M \backslash \overline{B}$, **(h)** $C \backslash A$, **(i)** $(M \backslash \overline{C}) \cap C$, **(j)** $B \backslash \overline{(A \cup C)}$.

Lösung zu Aufgabe 1.8.

(a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$, **(b)** $A \cap B = \emptyset$, **(c)** $\overline{A} = \{j|j = 2(2)15\}$,

(d) $\overline{C} = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15\}$, **(e)** $\overline{C} \cap B = \{6, 8, 10\}$, **(f)** $\overline{B} \cap C = \{2, 3, 5, 13\}$,

(g) $M \backslash \overline{B} = B$, **(h)** $C \backslash A = \{2, 12\}$, **(i)** $(M \backslash \overline{C}) \cap C = C$

(j) $B \backslash \overline{(A \cup C)} = \{12\}$.

Aufgabe 1.9.
Gegeben sind im $\mathbb{R}$ die Mengen $A = \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x < 5\}$, $B = [0, 5]$, $C = (-1, \infty)$. Ermitteln sie die folgenden Mengen:

(a) $A \cup B \cup C$, **(b)** $A \cap C$, **(c)** $B \cup C$, **(d)** $\overline{A} \cap B$, **(e)** $\overline{B} \cap A$,

(f) $B \backslash C$, **(g)** $A \cap \overline{C}$, **(h)** $\overline{B} \cup C$, **(i)** $(A \cup \overline{B}) \cap C$,

Lösung zu Aufgabe 1.9.

(a) $A \cup B \cup C = [-7, \infty)$, **(b)** $A \cap C = (-1, 5)$, **(c)** $B \cup C = C$, **(d)** $\overline{A} \cap B = \{5\}$, **(e)** $\overline{B} \cap A = [-7, 0)$,

(f) $B \backslash C = \emptyset$, **(g)** $A \cap \overline{C} = [-7, -1]$, **(h)** $\overline{B} \cup C = \mathbb{R}$, **(i)** $(A \cup \overline{B}) \cap C = C \backslash \{5\}$.

Aufgabe 1.10.
A, B, C, D seien beliebige Mengen. Untersuchen Sie die folgenden Gleichungen und begründen Sie, welche der Beziehungen wahr sind und welche falsch sind!

(a) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, **(b)** $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$,

(c) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cup C)$, **(d)** $A \cap (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cap C)$,

(e) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

Lösung zu Aufgabe 1.10.

(a) zu zeigen: $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned}
x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) &\Rightarrow x \in (A \backslash B) \vee x \in (B \backslash A) \\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\
&\Rightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin A) \\
&\Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\
&\Rightarrow x \in ((A \cup B) \backslash (A \cap B)),
\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin A \cap B \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \\
&\qquad\;\; \vee x \in B \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \vee x \in B \wedge x \notin A \\
&\Rightarrow \quad x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)
\end{aligned}
$$

(b) zu zeigen: $A \cup (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash(C\backslash A)$
Es gelten die folgenden Implikationen:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B\backslash C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B\backslash C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin C \vee x \in B \wedge x \notin C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \cup B \wedge x \notin C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \cup B \wedge x \notin C\backslash A \\
&\Rightarrow \quad x \in (A \cup B)\backslash(C\backslash A),
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)\backslash(C\backslash A) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin C\backslash A \vee x \in B \wedge x \notin C\backslash A \\
&\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B \wedge x \in C \wedge x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B\backslash C \\
&\Rightarrow \quad x \in (A \cup (B\backslash C))
\end{aligned}
$$

(c) zu zeigen: $A \cup (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash(A \cup C)$
Gegenbeispiel: Sei $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}, C = \{3\}$.

(d) zu zeigen: $A \cap (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash(A \cap C)$
Gegenbeispiel: Sei $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}, C = \{3\}$.

(e) zu zeigen: $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$
Es gelten die folgenden Implikationen:

$$
\begin{aligned}
x \in A\backslash(B\backslash C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B\backslash C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \vee x \in A \wedge x \in C \\
&\Rightarrow \quad x \in A\backslash B \vee x \in A \wedge x \in C \\
&\Rightarrow \quad x \in (A\backslash B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
x \in A\backslash B \cup A \cap C \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \vee x \in A \wedge x \in C \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge (x \in C \vee x \notin B) \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B\backslash C \\
&\Rightarrow \quad x \in A\backslash(B\backslash C)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.11.
Prüfen Sie für den allgemeinen Fall, ob die folgenden Aussagen wahr sind und fertigen Sie jeweils Skizzen an:

(a) $(A \setminus B) \cap C \; = \; (A \cap C) \setminus B$, **(b)** $A \setminus B \; = \; A \cap (A \setminus B)$,

(c) $A \; = \; (A \setminus B) \cup B$, **(d)** $A \cup B \; = \; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

Lösung zu Aufgabe 1.11.
Im allgemeinen Fall sind von den Aussagen

(a) $(A \setminus B) \cap C \;=\; (A \cap C) \setminus B$, **(b)** $A \setminus B \;=\; A \cap (A \setminus B)$,

(c) $A \;=\; (A \setminus B) \cup B$, **(d)** $A \cup B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

alle bis auf (c) richtig, denn (c) gilt nur, falls zusätzlich $B \subseteq A$ gefordert wird.
Wir benutzen dazu, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Demnach folgen:

(a) Für ein beliebiges Element x gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \in C\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in C\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \in C)\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in C \wedge x \notin B)\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \setminus B.
\end{aligned}$$

(b) Für ein beliebiges Element x gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge x \notin B\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \wedge x \notin B)\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (A \setminus B)\\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (A \setminus B).
\end{aligned}$$

(d) Für ein beliebiges Element x gelten die folgenden Äquivalenzen

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \quad\Leftrightarrow\quad x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\\
&\Leftrightarrow x \in \Big(\big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\big) \cup \big((A \cap B) \cup (B \setminus A)\big)\Big)\\
&\Leftrightarrow x \in \big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\big) \vee x \in \big((A \cap B) \cup (B \setminus A)\big)\\
&\Leftrightarrow \big(x \in (A \setminus B) \vee x \in (A \cap B)\big) \vee \big(x \in (A \cap B) \vee x \in (B \setminus A)\big)\\
&\Leftrightarrow \big((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\big) \vee \big((x \in B \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\big)\\
&\Leftrightarrow \big(x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)\big) \vee \big(x \in B \wedge (x \in A \vee x \notin A)\big)\\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B).
\end{aligned}$$

(c) Man kann zeigen, dass $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
Gilt nun im Spezialfall $B \subseteq A$, so folgen $B \setminus A = \emptyset$, $A \cap B = B$ sowie $A \cup B = A$. Setzt man diese Beziehungen in (d) ein, erhält man (c).

....

Wiederholung - Theorie: (Un)gleichungen

(a) Das **Lösen** einer Gleichung oder Ungleichung über $\mathbb{R}$ bedeutet die Bestimmung der Lösungsmenge der Gleichung als

(i) Aufzählung der Elemente der Menge,

(ii) als Intervalle,

(iii) oder als endliche Vereinigung der beiden erstgenannten Mengentypen.

Beispiel.: Spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann gibt es

a) beschränkte Intervalle, welche wir nochmals unterteilen in

i. offene Intervalle wie bspw. $]a, b[= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

ii. abgeschlossene (kompakte) Intervalle wie bspw. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

iii. degenerierte Intervalle wie bspw. $]a, a[= (a, a) = \emptyset$, $[a, a] = \{a\}$,

iv. halboffene Intervalle wie bspw. $[a, b[= [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a, b] = (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

b) uneigentliche oder unbeschränkte Intervalle wie beispielsweise

- $] - \infty, a[= (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,
- $] - \infty, a] = (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $]a, \infty[= (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
- $[a, \infty[= [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- und speziell $] - \infty, \infty[= (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Bemerkung.: $-\infty, \infty$ sind **keine** Zahlen!!!

(b) Unter einer **äquivalenten Unformung einer Gleichung** $S(x) = T(x)$ versteht man eine Umformung, welche die Lösungsmenge L nicht verändert:

(i) Addition/Subtraktion eines $r \in \mathbb{R}$: $S(x) \pm r = T(x) \pm r$,

(ii) Multiplikation eines $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$: $S(x)r = T(x)r$,

(iii) Division eines $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$: $\frac{S(x)}{r} = \frac{T(x)}{r}$,

(iv) Addition/Subtraktion eines Terms $R(x)$: $S(x) \pm R(x) = T(x) \pm R(x)$,

(v) Multiplikation eines Terms $R(x)$, der **nirgends** 0 wird: $S(x)R(x) = T(x)R(x)$,

(vi) Division eines Terms $R(x)$, der **nirgends** 0 wird: $\frac{S(x)}{R(x)} = \frac{T(x)}{R(x)}$.

Bemerkung.: Im Allgemeinen nichtäquivalente Umformungen sind beispielsweise

(i) Quadrieren: $(S(x))^2 = (T(x))^2$,

(ii) Betrag bilden: $|S(x)| = |T(x)|$,

(iii) Multiplikation eines Terms $R(x)$: $S(x)R(x) = T(x)R(x)$,

In diesen Fällen bleibt die Lösungsmenge gleich oder **vergrößert** sich!

Bemerkung.: Manche Umformungen sind **nicht sinnvoll**:
Division durch 0 oder Division durch einen Term, der irgendwo auf $\mathbb{D}$ Null wird.

(c) Unter einer **äquivalenten Unformung einer Ungleichung** $S(x) < T(x)$ versteht man ebenfalls eine Umformung, welche die Lösungsmenge L nicht verändert:

(i) Addition / Subtraktion eines Terms $R(x)$: $S(x) \pm R(x) < T(x) \pm R(x)$,

(ii) Multiplikation eines Terms $R(x)$, der **immer** > 0 wird: $S(x)R(x) < T(x)R(x)$,

(iii) Multiplikation eines Terms $R(x)$, der **immer** < 0 wird, und Relation **umkehren**: $S(x)R(x) > T(x)R(x)$,

(iv) Division eines Terms $R(x)$, der **immer** > 0 wird: $\frac{S(x)}{R(x)} < \frac{T(x)}{R(x)}$,

(v) Division eines Terms $R(x)$, der **immer** < 0 wird, und Relation **umkehren**: $\frac{S(x)}{R(x)} > \frac{T(x)}{R(x)}$.

(d) Anordnungsaxiome:

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen: $x > 0,\ x = 0,\ -x > 0$.

(ii) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$.

(iii) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $xy > 0$.

Insbesondere folgt aus (c), dass für alle $x \neq 0$ die Beziehung $x^2 > 0$ gilt.

(e) Der Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

Das bedeutet insbesondere, dass für ein $c > 0$ die Ungleichung $|x| \leq c$ äquivalent zu $-c \leq x \leq c$ ist.

(f) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

. . . .

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1.12.
Für welche reellen Zahlen x gilt:

(a) $x+2>4-x$ **(b)** $3-2x>x-9$ **(c)** $\frac{x}{3}+1\le 3-\frac{3}{2}x$ **(d)** $\frac{x-2}{4-2x}<x$

(e) $\frac{3x+2}{3-2x}\ge 2$ **(f)** $x-1<\frac{2x-4}{x-2}$ **(g)** $\frac{4x+3}{5-2x}\le 3$ **(h)** $\frac{x^2+6x+4}{x^2+x+6}>1$

Lösung zu Aufgabe 1.12.

(a) Es gilt
$$x+2>4-x \qquad \Rightarrow \qquad x>1,$$
also gilt die Ungleichung für alle $x\in(1,\infty)$.

(b) Es gilt
$$3-2x>x-9 \qquad \Rightarrow \qquad 4>x,$$
also gilt die Ungleichung für alle $x\in(4,\infty)$.

(c) Es gilt
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x+1 &\le 3-\frac{3}{2}x \\ \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)x &\le 2 \\ \frac{11}{6}x &\le 2 \\ x &\le \frac{12}{11}, \end{aligned}$$
also gilt die Ungleichung für alle $x\in(\infty,\frac{12}{11}]$.

(d) Wir betrachten 2 Fälle

(i) <u>Fall: $x<2$</u>, dann gilt:
$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4-2x} &< x \\ x-2 &< 4x-2x^2 \\ 0 &< -2x^2+3x+2 \\ 0 &> x^2-\frac{3}{2}x-1, \end{aligned}$$
was auf die beiden Lösungen $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=2$ führt. Also $x\in(-\frac{1}{2},2)$

(ii) <u>Fall: $x>2$</u>, dann gilt:
$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4-2x} &< x \\ x-2 &> 4x-2x^2 \\ 0 &> -2x^2+3x+2 \\ 0 &< x^2-\frac{3}{2}x-1, \end{aligned}$$
was auf die beiden Lösungen $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=2$ führt. Also $x\in(2,\infty)$.

Insgesamt erhalten wir demnach $x\in(-\frac{1}{2},\infty)\setminus\{2\}$.

(e) Wir unterscheiden wieder 2 Fälle

(i) Fall: $x < \frac{3}{2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{3-2x} &\geq 2 \\
3x+2 &\geq 6-4x \\
7x &\geq 4 \\
x &\geq \frac{4}{7},
\end{aligned}$$

also $x \in [\frac{4}{7}, \frac{3}{2})$.

(ii) Fall: $x > \frac{3}{2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{3-2x} &\geq 2 \\
3x+2 &< 6-4x \\
7x &< 4 \\
x &< \frac{4}{7},
\end{aligned}$$

was aufgrund von $x > \frac{3}{2}$ nicht möglich ist.

Demnach ergibt sich insgesamt $x \in [\frac{4}{7}, \frac{3}{2})$.

(f) Wir müssen wieder 2 Fälle unterscheiden:

(i) Fall: $x > 2$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
x-1 &< \frac{2x-4}{x-2} \\
(x-1)(x-2) &< 2x-4 \\
x^2-5x+6 &< 0,
\end{aligned}$$

woraus sich die Lösungen $x_1 = 2, x_2 = 3$ ergeben, es folgt $x \in (2, 3)$.

(ii) Fall: $x < 2$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
x-1 &< \frac{2x-4}{x-2} \\
(x-1)(x-2) &> 2x-4 \\
x^2-5x+6 &> 0,
\end{aligned}$$

woraus sich die Lösungen $x_1 = 2, x_2 = 3$ ergeben, es folgt $x \in (-\infty, 2)$.

Insgesamt erhalten wir demnach $x \in (-\infty, 3) \setminus \{2\}$.

(g) Wir müssen wiederrum 2 Fälle unterscheiden:

(i) Fall: $x < \frac{5}{2}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{4x+3}{5-2x} &\leq 3 \\
4x+3 &\leq 15-6x \\
10x &\leq 12 \\
x &\leq \frac{6}{5},
\end{aligned}$$

demnach $x \in (\infty, \frac{6}{5}]$.

(ii) Fall: $x > \frac{5}{2}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{4x+3}{5-2x} &\leq 3 \\
4x+3 &> 15-6x \\
10x &> 12 \\
x &> \frac{6}{5},
\end{aligned}$$

demnach $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$.

Insgesamt ergibt sich demnach $x \in \big\{(-\infty, \frac{6}{5}] \cup (\frac{5}{2}, \infty)\big\}$.

(h) Es gilt $x^2 + x + 6 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, daher

$$\begin{aligned} \frac{x^2+6x+4}{x^2+x+6} &> 1 \\ x^2+6x+4 &> x^2+x+6 \\ 5x &> 2 \\ x &> \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

also $x \in (\frac{2}{5}, \infty)$.

Aufgabe 1.13.
Geben Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$|x-2| < |x-3|$$

an, wenn $x \in \mathbb{R}$ ist und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen!

Lösung zu Aufgabe 1.13.
Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(a) <u>Fall $x \geq 3$:</u>
Die Ungleichung lautet dann $x - 2 < x - 3 \Leftrightarrow -2 < -3 \quad \Rightarrow$ falsche Aussage

(b) <u>Fall $2 \leq x < 3$:</u>
Die Ungleichung lautet dann $x - 2 < 3 - x \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$.
Wir erhalten das Intervall $\left[2, \frac{5}{2}\right)$.

(c) <u>Fall $x < 2$:</u>
Die Ungleichung lautet dann $2 - x < 3 - x \Leftrightarrow 2 < 3 \quad \Rightarrow$ wahre Aussage
Wir erhalten somit das Intervall $(-\infty, 2)$.

Die Lösungsmenge ist demnach $L = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$.

Alternativer Lösungsweg: Quadrieren beider Seiten ergibt

$$\begin{aligned} |x-2|^2 < |x-3|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 < (x-3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 < x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x < \tfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \tfrac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 1.14.

(a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| + 2 \leq \frac{1}{x}$.
(b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2 - |1 - |x||| \leq 3$.

Lösung zu Aufgabe 1.14.

(a) Zunächst einmal muss $x \neq 0$ gelten, sonst ist die rechte Seite nicht definiert. Des weiteren kommen nur positive x in Frage, ansonsten wäre die linke Seite positiv, die rechte aber negativ.
1. Fall: Für $0 < x < 2$ gilt

$$|x-2| + 2 \leq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad -(x-2) + 2 \leq 1/x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 1 \geq 0,$$

d.h., dass die obigen Ungleichungen alle äquivalent sind. Die rechte Seite der letzten Ungleichung stellt eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ und $2 + \sqrt{3}$. Somit ist im Fall $x \in \mathbb{D} = \ ]0, 2[$ die Lösungsmenge $L = \ ]0, 2 - \sqrt{3}[$.
2. Fall: Für $2 \leq x$ gilt

$$|x-2| + 2 \leq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad (x-2) + 2 \leq 1/x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1.$$

Da die letzte Ungleichung nur für $x \in [-1, 1]$ eine wahre Aussage darstellt, wir uns aber im Fall $x \geq 2$ befinden, ist die Lösungsmenge hier leer.

(b) Wir gehen bei dieser Gleichung schrittweise vor:

1. $|2-z| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad |z-2| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq z-2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq z \leq 5\,,$
2. $-1 \leq |1-y| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq |y-1| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq y-1 \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq y \leq 6\,,$
3. $-4 \leq |x| \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq |x| \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 6\,.$

Damit ist die Lösungsmenge also $L = [-6, 6]$.

Aufgabe 1.15.
Bestimmen Sie über $\mathbb{R}$ die Lösungsmengen von folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $|x-2| \;=\; \frac{1}{2}x - 4$ **(b)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} \;=\; 0$ **(c)** $\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; |x-2|$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-7} = \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14}$ **(e)** $\log_2(x) \;=\; 3$ **(f)** $\log_x(125) \;=\; 3$

Lösung zu Aufgabe 1.15.

(a) $|x-2| \;=\; \frac{1}{2}x - 4$. Da die linke Seite stets größer oder gleich 0 ist, muss es die rechte Seite auch sein, also muss insbesondere $\frac{1}{2}x \geq 4$ sein. Demnach betrachten wir nur $x \geq 8$. Dann lautet die Gleichung

$$x - 2 \;=\; \frac{1}{2}x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x \;=\; -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; -4.$$

Diese Lösung ist jedoch negativ und damit nicht größer oder gleich 8 . $\quad \Rightarrow \; L = \emptyset$.

(b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} \;=\; \sqrt{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad x+1 \;=\; x^2 - 1 \;\wedge\; x \geq -1$.
Dies führt auf die quadratische Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$, welche die Lösungen $x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ besitzt, welche beide ≥ -1 sind. Eine Probe bestätigt, dass es sich nicht um Scheinlösungen handelt. $\quad \Rightarrow \; L = \{-1, 2\}$.

(c) $\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; |x-2|$. Für $x = -1$ ist die linke Seite zunächst einmal nicht definiert.
<u>Fall 1</u>: $x < -1$ Dann geht die Ungleichung über in

$$\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \;\geq\; (2-x)(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \;\geq\; 2 + x - x^2.$$

Das ist wiederum äquivalent zu $x^2 \geq 3$. Da wir uns im Fall $x < -1$ befinden, erhalten wir daraus das Intervall $]-\infty, -\sqrt{3}]$.

<u>Fall 2</u>: $2 > x > -1$ Dann geht die Ungleichung über in

$$\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \;\leq\; (2-x)(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \;\leq\; 2 + x - x^2.$$

Das ist wiederum äquivalent zu $x^2 \leq 3$. Da wir uns im Fall $2 > x > -1$ befinden, erhalten wir daraus das Intervall $]-1, \sqrt{3}]$.

<u>Fall 3</u>: $x > 2$ Dann geht die Ungleichung über in

$$\frac{x-1}{x+1} \;\leq\; x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \;\leq\; (x-2)(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \;\leq\; x^2 - x - 2.$$

Das ist wiederum äquivalent zu $0 \leq x^2 - 2x - 1$. Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $1 \pm \sqrt{2}$. Da wir uns im Fall $x > 2$ befinden, erhalten wir daraus das Intervall $[1 + \sqrt{2}, \infty[$.

Somit ergibt sich die Lösungsmenge als Vereinigung der drei erhaltenen Intervalle zu

$$L \;=\;]-\infty, -\sqrt{3}] \;\cup\;]-1, \sqrt{3}] \;\cup\; [1 + \sqrt{2}, \infty[.$$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-7} \;=\; \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{7-5x} \;=\; \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{7-5x} \;=\; \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-28}$.
Dies ist wiederum äquivalent zu
$\log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^{7-5x} \;=\; \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-28} \quad \Leftrightarrow \quad 7 - 5x \;=\; 2x - 28 \;\Leftrightarrow\; 35 \;=\; 7x \;\Rightarrow\; L = \{5\}$.

(e) $\log_2(x) \;=\; 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\log_2(x)} \;=\; 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; 2^3 \quad \Rightarrow \quad L = \{8\}$.

(f) $\log_x(125) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x^{\log_x(125)} = x^3 \quad\Leftrightarrow\quad 125 = x^3 \quad\Leftrightarrow\quad x = 5 \;\Rightarrow\; L = \{5\}$.

Aufgabe 1.16.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die gilt

$$\textbf{(a)}\ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1, \qquad \textbf{(b)}\ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1, \qquad \textbf{(c)}\ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} < 1.$$

Lösung zu Aufgabe 1.16.
Es sollten die Lösungsmengen der Ungleichungen $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1,\ = 1$ und < 1 ermittelt werden. Für die Zahlen {-1,1} ist die linke Seite nicht definiert. Für alle anderen Zahlen gilt

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x(x-1) + 1(x+1)}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

(a) Da $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ kann die linke Seite der Ungleichung $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 1$ nur in dem Fall $x^2 - 1 > 0$ positiv sein. Wir erhalten dann

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^2-1} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + 1 > x^2 - 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 > -1.$$

Die letzte Aussage ist immer wahr, bringt also keine neuen Einschränkungen. Somit ist die Lösungsmenge

$$L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, \infty[.$$

(b) Es gilt

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + 1 = x^2 - 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 = -1.$$

Die letzte Aussage ist immer falsch. Daher ist hier $L = \emptyset$.

(c) Für die Ungleichung $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} < 1$ müssen wir nochmals unterscheiden in

- (i) $x^2 - 1 > 0$: Hier ist die Ungleichung äquivalent zu $x^2 + 1 < x^2 - 1$ und weiter $1 < -1$, was jedoch eine falsche Aussage ist. Daher ist die Lösungsmenge in diesem Fall leer.
- (ii) $x^2 - 1 < 0$: Hier gelangen wir durch äquivalente Umformungen analog zu $1 > -1$, was stets eine wahre Aussage ist.

Insgesamt haben wir daher $L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\} = \,]-1, 1[$.

Aufgabe 1.17.
Ermitteln Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen und stellen Sie diese in der x_1x_2-Ebene dar.

(a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$, **(b)** $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, **(c)** $|x_1| + |x_2| = 1$, **(d)** $|x_1| + |x_2| \leq 1$,

(e) $\max(|x_1|, |x_2|) = 1$, **(f)** $\max(|x_1|, |x_2|) \leq 1$, **(g)** $x_1^2 - x_2^2 > 0$ **(h)** $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

Lösung zu Aufgabe 1.17.
Es waren die folgenden Mengen graphisch darzustellen:

(a) $L = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1, 1], x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1, 1], x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}\}$ ... der Rand des Einheitskreises.

(b) $L = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1, 1], -\sqrt{1 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{1 - x_1^2}\}$
... die Fläche des Einheitskreises samt Rand.

(c) $L = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 1 - x_1\} \cup \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = x_1 - 1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, x_2 = 1 + x_1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, x_2 = -1 - x_1\}$
... ein Quadrat mit den vier Ecken $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

(d) $L = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_1 - 1 \leq x_2 \leq 1 - x_1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, -1 - x_1 \leq x_2 \leq 1 + x_1\}$
... die Fläche des Quadrates mit den vier Ecken $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ samt Rand.

(e) $L = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = -1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, -1 \leq x_2 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = -1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$
... das Quadrat mit den Ecken $(1,1)(-1,1)(-1,-1)(1,-1)$.

(f) $L = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$
... die Fläche des Quadrates mit den Ecken $(1,1)(-1,1)(-1,-1)(1,-1)$ samt Rand.

(g) $L = \{(x_1, x_2) : x_1 > x_2 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 < x_2 < 0\} \cup \{x_1 < -x_2 < 0\} \cup \{x_1 > -x_2 > 0\}$

(h) $L = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0 > x_2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 < x_2 < 0\} \cup \{x_2 > x_1 > 0\}$

Aufgabe 1.18.
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmengen von

(a) $\sqrt{8x+1} - \sqrt{10x+6} = -1$ **(b)** $2x^7 - 10x^5 + 8x^3 \;=\; 0.$

Lösung zu Aufgabe 1.18.

(a) Es gelten die folgenden Implikationen

$$\begin{aligned}
\sqrt{8x+1} - \sqrt{10x+6} = -1 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{8x+1} = \sqrt{10x+6} - 1 \\
&\Rightarrow \quad 8x+1 = 10x+6 - 2\sqrt{10x+6} + 1 \\
&\Rightarrow \quad 2\sqrt{10x+6} = 2x+6 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{10x+6} = x+3 \\
&\Rightarrow \quad 10x+6 = x^2+6x+9 \\
&\Rightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 3.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besitzt die Lösungen $\{1,3\}$. Da wir jedoch nichtäquivalente Umformungen (Quadrieren) durchgeführt haben, haben wir alle Lösungen zu überprüfen:
$\underline{x=1}$: $\sqrt{8\cdot 1+1} - \sqrt{10\cdot 1+6} \;=\; \sqrt{9} - \sqrt{16} \;=\; 3-4 \;=\; -1 \quad \Rightarrow \{1\} \in L$.
$\underline{x=3}$: $\sqrt{8\cdot 3+1} - \sqrt{10\cdot 3+6} \;=\; \sqrt{25} - \sqrt{36} \;=\; 5-6 \;=\; -1 \quad \Rightarrow \{3\} \in L$.
Damit ist die Lösungsmenge $L \;=\; \{1,3\}$.

(b) Es gilt die folgende Äquivalenz:

$$2x^7 - 10x^5 + 8x^3 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(x^4 - 5x^2 + 4) \;=\; 0.$$

Die letzten Gleichung besitzt erst einmal die dreifache Lösung $\{0\}$. Setzem wir außerdem $y := x^2$, dann geht die Gleichung $x^4 - 5x^2 + 4 \;=\; 0$ in $y^2 - 5y + 4 \;=\; 0$ über, welche die Lösungen $\{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}\} \;=\; \{1,4\}$ besitzt. Demnach ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung $L \;=\; \{-2,-1,0,1,2\}$.

Aufgabe 1.19.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \;=\; \{x \in \mathbb{D} : S(x) \;=\; T(x)\}$ für die folgenden Gleichungen. Dabei seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $\sqrt{x} = 5$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,

(b) $\frac{x^3}{x} = 4$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $bx + c = 0$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine lineare Gleichung),

(d) $x^2 = a$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied),

(e) $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ (allgemeine quadratische Gleichung),

(f) $\frac{x^2-1}{x-1} = -x$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

(g) $\sqrt{x} = 2 - x$ auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Lösung zu Aufgabe 1.19.

(a) $L = \{25\}$.

(b) $L = \{-2, 2\}$.

(c) Fall 1: $b \neq 0:\quad L = \{-c/b\}$

Fall 2: $b = 0$

(i) $b = 0\,,\ c = 0:\ L = \mathbb{R}\,,$

(ii) $b = 0\,,\ c \neq 0:\ L = \emptyset\,.$

(d) Falls $a < 0$ ist $L = \emptyset$, falls $a = 0$ ist $L = \{0\}$ und falls $a > 0$ ist $L = \{-\sqrt{a}, +\sqrt{a}\}$.

(e) Wir setzen $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$. Dann können wir äquivalent umformen:

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x^2 + px + q\right) \;=\; a\left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right) \;=\; 0$$

Da $a \neq 0$, ist dies zusammen mit der ersten binomischen Formel äquivalent zu

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \frac{p^2}{4} - q$$

Setzen wir $D := \frac{p^2}{4} - q$, gelangen wir zu den folgenden Fallunterscheidungen

(i) $D < 0:\quad L = \emptyset\,,$

(ii) $D = 0:\ L = \{-\frac{p}{2}\}\,,$

(iii) $D > 0:\ L = \{-p/2 - \sqrt{D}, -p/2 + \sqrt{D}\}\,.$

(f) Multiplikation mit $x - 1$, da dieser Term auf $\mathbb{D}$ immer $\neq 0$ ist, ist eine äquivalente Umformung:

$$x^2 - 1 = -x^2 + x \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{R}$ wäre $\{-\frac{1}{2}, 1\}$. Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist jedoch nur $L = \{-\frac{1}{2}\}$.

(g) Quadrieren liefert $x = 4 - 4x + x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0 = 4 - 5x + x^2$.
Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist zunächst $\{1, 4\}$. Da Quadrieren jedoch möglicherweise die Lösungsmenge vergrößert hat, testen wir mit der ursprünglichen Gleichung:

$x = 1:\quad \sqrt{1} = 2 - 1$ wahr,

$x = 4:\quad \sqrt{4} = 2 - 4$ falsch.

Damit ist die Lösungsmenge der Ursprungsgleichung $L = \{1\}$.

. . . .