Lösungen der Aufgabenserie 2

Aufgabe 2.1
Man hat zu zeigen, dass

$$z = x + iy = \Big(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\,\mathrm{sgn}\,y\,\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\Big)^2$$

ist. Die rechte Seite ist offenbar gleich

$$\frac{|z|+x}{2} + 2\,i\,\mathrm{sgn}\,y\,\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}\,\sqrt{\frac{|z|-x}{2}} - \frac{|z|-x}{2} = x + i\,\mathrm{sgn}\,y\,\sqrt{|z|^2-x^2}$$

Wegen $|z|^2 = x^2+y^2$ ist dies gleich $x + i\,\mathrm{sgn}\,y\,\sqrt{y^2} = x + i\,|y|\,\mathrm{sgn}\,y = x+iy$.

Aufgabe 2.2

a) Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man

$$z_{1,2} = -\Big(i-\frac{3}{2}\Big) \pm \sqrt{\Big(i-\frac{3}{2}\Big)^2 - 5 + i} = -i + \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4} - 2i}$$

Die Zahl $-\frac{15}{4} - 2i$ hat den Betrag $\frac{17}{4}$. Also ist nach der Formel aus Aufgabe 2.1

$$\sqrt{-\frac{15}{4} - 2i} = \pm\Big(\sqrt{\frac{\frac{17}{4}-\frac{15}{4}}{2}} - i\sqrt{\frac{\frac{17}{4}+\frac{15}{4}}{2}}\Big) = \pm\Big(\frac{1}{2} - 2i\Big).$$

Damit ergibt sich $z_1 = -i + \frac{3}{2} + (\frac{1}{2} - 2i) = 2 - 3i$, $\quad z_2 = -i + \frac{3}{2} - (\frac{1}{2} - 2i) = 1 + i$.

b) Substituiert man $z^2 = w$, dann erhält man die quadratische Gleichung $w^2 - (1+i)w + 2 + 2i = 0$ mit den Lösungen

$$w_{1,2} = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^2 - 2 - 2i} = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{-2 - \frac{3}{2}\,i}$$

Hierbei ist nach der Formel aus Aufgabe 1

$$\sqrt{-2-\frac{3}{2}\,i} = \pm\Big(\sqrt{\frac{\frac{5}{2}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\frac{5}{2}+2}{2}}\Big) = \pm\Big(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i\Big)$$

und somit $w_1 = 1 - i$, $w_2 = 2i$. Die Quadratwurzeln aus $w_1 = 1-i$ sind (nach Aufgabe 1)

$$z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\Big(\sqrt{2\sqrt{2}+2} - i\sqrt{2\sqrt{2}-2}\Big),$$

die Quadratwurzeln aus w_2 sind $z_{3,4} = \pm(1+i)$.

Aufgabe 2.3
Nach der Moivreschen Formel ist

$$2^{n/2}\Big(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\Big) = \Big(\sqrt{2}\,\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)\Big)^n = (1+i)^n$$

Benutzt man die binomische Formel, so erhält man

$$(1+i)^n = 1 + \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + - \cdots$$

Vergleicht man nun die Real- und Imaginärteile von $2^{n/2}\Big(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\Big)$ und $(1+i)^n$, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4} &= \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + - \cdots \quad \text{und} \\ 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4} &= \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + - \cdots \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 $\Big|\dfrac{2-4n+12\,n^2}{3n^2} - 4\Big| = \Big|\dfrac{2-4n}{3n^2}\Big| < \varepsilon$, wenn $\dfrac{4n}{3n^2} < \varepsilon$, d.h. $n > \dfrac{4}{3\varepsilon} = N(\varepsilon)$