Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 2

Wiederholung - Theorie: Komplexe Zahlen

(a) Wir definieren mit $i := \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Es gilt demnach $i^2 = -1$.

(b) Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann als kartesisches Produkt $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ aufgefasst werden.
Das bedeutet, für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ existieren genau zwei reelle Zahlen $a_z, b_z \in \mathbb{R}$, so dass $z = a_z + ib_z$.

(c) Für $z = a_z + ib_z$ bezeichnet $\Re(z) := a_z$ den **Realteil** und $\Im(z) := b_z$ den **Imaginärteil**.

(d) Für $z = a + ib$ definieren wir die **konjugiert komplexe** Zahl $\overline{z} := \overline{a + ib} := a - ib$.

(e) Mit Hilfe von $\overline{z}$ lässt sich der Betrag einer komplexen Zahl definieren durch
$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

(f) Die Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ ergibt sich zu
$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i\,(a_1b_2 + b_1a_2)$.

(g) Das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ergibt sich zu $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

(h) Die Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ ergibt $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$.

(i) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ existiert genau ein Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$, so dass $z = |z| \cdot e^{i\phi}$ gilt.
In diesem Zusammenhang bezeichnet man $|z|$ auch als **Radius**, weil sich alle komplexen Zahlen mit gleichem Betrag c auf dem Kreis mit Radius c um den Nullpunkt befinden. Der Winkel wird als **Argument** von z bezeichnet.

(j) Weiterhin gilt die **Euler****sche Formel** $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
An dieser Formel sehen wir außerdem, dass aufgrund der 2π -Periodizität der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auch die Funktion $f(\phi) = e^{i\phi}$ dementsprechend 2π -periodisch ist.
Insbesondere folgt aus der Eulerschen Formel: Für beliebige Winkel ϕ gilt
 a) $\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}$,
 b) $|e^{i\phi}| = \sqrt{(\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2} = 1$ bzw. $|e^{i\phi}| = \sqrt{e^{i\phi} \cdot e^{-i\phi}} = \sqrt{e^0} = 1$ und
 c) $e^{2\pi i} = 1$.

(k) Für die Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1\,(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))$ und $z_2 = r_2\,(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$ in trigonometrische Form gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1r_2\,(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2))\,. \end{aligned}$$

Für die Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1e^{i\phi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\phi_2}$ in Exponentialform gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}.$$

(l) Eine Umrechnung zwischen der kartesischen und trigonometrichen Form ist mit Hilfe der folgenden Formel möglich

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{falls } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{falls } x < 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0,\ \pm y > 0 \end{cases}$$

(m) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die **Moivre****sche Formel** $(\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$.

(n) Die Gleichung $z^n = r\,(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ hat die Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2(k-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2(k-1)\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 1, 2, ..., n$$

Bemerkung: Die Punkte $z_1, ..., z_n$ bilden ein reguläres n -Eck.

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 2.1.
Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_2} \cdot z_1$ von:

(a) $z_1 = 1, \quad z_2 = \imath$, **(b)** $z_1 = 4 - 3\imath, \quad z_2 = 2 + 6\imath$, **(c)** $z_1 = 1 - 2\imath, \quad z_2 = 1 + \imath$, **(d)** $z_1 = i, \quad z_2 = 4 + i$

Geben Sie das Ergebnis in der Form $z = a + \imath b$ an!

Lösung zu Aufgabe 2.1.

(a)
- $z_1 + z_2 = 1 + \imath$
- $z_1 - z_2 = 1 - \imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 1 - \imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\imath} = \frac{-\imath}{1} = \imath$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (-\imath)(1) = -\imath$

(b)
- $z_1 + z_2 = 6 + 3\imath$
- $z_1 - z_2 = 2 - 9\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 26 + 18\imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-3\imath}{2+6\imath} = \frac{(4-3\imath)(2-6\imath)}{(2+6\imath)(2-6\imath)} = -\frac{1}{4}(1 + 3\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (2 - 6\imath)(4 - 3\imath) = -10 - 30\imath$

(c)
- $z_1 + z_2 = 2 - \imath$
- $z_1 - z_2 = -3\imath$
- $z_1 \cdot z_2 = 3 - \imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2\imath}{1+\imath} = \frac{(1-2\imath)(1-\imath)}{(1+\imath)(1-\imath)} = -\frac{1}{2}(1 + 3\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (1 - \imath)(1 - 2\imath) = -1 - 3\imath$

(d)
- $z_1 + z_2 = 4 + 2\imath$
- $z_1 - z_2 = -4$
- $z_1 \cdot z_2 = -1 + 4\imath$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\imath}{4+\imath} = \frac{(\imath)(4-\imath)}{(4+\imath)(4-\imath)} = \frac{1}{17}(1 + 4\imath)$
- $\overline{z_2} \cdot z_1 = (4 - \imath)\imath = 1 + 4\imath$

Aufgabe 2.2.
Bestimmen Sie von der komplexen Zahl z den Real- und Imaginärteil:

(a) $z = \dfrac{1}{1-\imath}$, **(b)** $z = \dfrac{3-2\imath}{1-\imath}$, **(c)** $z = \left(\dfrac{1-\imath}{1+\imath}\right)^5$

(d) $z = re^{\imath\phi}$ mit $r = 1, \quad \phi = \dfrac{1}{2}\pi$, **(e)** $z = re^{\imath\phi}$ mit $r = 2, \quad \phi = \pi$.

Lösung zu Aufgabe 2.2.

(a) $z = \frac{1}{1-\imath} = \frac{1+\imath}{2}$

(b) $z = \frac{3-2\imath}{1-\imath} = \frac{(3-2\imath)(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \frac{1}{2}(5 + \imath)$

(c) $z = \left(\frac{1-\imath}{1+\imath}\right)^5 = \left(\frac{(1-i)^2}{2}\right)^5 = (-i)^5 = -i$

(d) $e^{-\imath\frac{1}{2}\pi} = (\cos(\frac{1}{2}\pi) + \imath \sin(\frac{1}{2}\pi)) = \imath$

(e) $2e^{-\imath\pi} = 2(\cos(\pi) - \imath \sin(\pi)) = -2$

Aufgabe 2.3.
Berechnen Sie den absoluten Betrag und das Argument der komplexen Zahlen und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Form an:

(a) $z = 1 - \imath$, **(b)** $z = \sqrt{3} - \imath$, **(c)** $z = -4 - 4\imath$, **(d)** $z = -\sqrt{3} + \imath$, **(e)** $z = 1 + \imath\sqrt{3}$, **(f)** $z = 1 - \imath\sqrt{3}$.

Lösung zu Aufgabe 2.3.

(a) Der Betrag berechnet sich stets nach der festen Formel, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei $z = a + bi$. In diesem Fall erhalten wir also $|1 - \imath| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Das Argument, also der Winkel, einer Komplexen Zahl ist nun schon etwas schwieriger zu bekommen. Idealerweise kennt man die Formel zur Berechnung des Winkels, welche auf $\phi = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ führt. Hat man diese Formel gerade nicht zur Hand oder im Kopf, so muss man sich die Eulersche Formel verdeutlichen

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\sin(\phi)}_{\text{Imaginärteil}}) = 1 - i.$$

Jetzt sieht man, dass der Realteil der linken Seite mit dem Realteil der rechten Seite übereinstimmen muss. Das gleiche gilt für den Imaginärteil. Hier also $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\phi)$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\phi)$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, weil wir ja bereits wissen, dass der Betrag der rechten Seite $\sqrt{2}$ ist). Da der Realteil durch die $\cos$-Funktion und der Imaginärteil durch die $\sin$-Funktion dargestellt werden, suchen wir also genau die Stelle, an der die $\sin$-Funktion genau das Negative der $\cos$-Funktion ist (und die $\cos$-Funktion natürlich positiv). Verdeutlicht man sich die Verläufe der $\cos$- und $\sin$-Funktionen, so erkennt man, dass dies genau an der Stelle $\phi = \frac{7}{4}\pi$ der Fall ist. Demnach also

$$\phi = \arg(1 + \imath) = \frac{7\pi}{4}.$$

Um jetzt zu der exponentiellen und trigonometrischen Darstellung zu kommen, müssen wir nur noch einsetzen

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

(b) Der Betrag berechnet sich stets nach der festen Formel, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei $z = a + bi$. In diesem Fall erhalten wir also $|\sqrt{3} - \imath| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. Das Argument, also der Winkel, einer Komplexen Zahl ist nun schon etwas schwieriger zu bekommen. Idealerweise kennt man die Formel zur Berechnung des Winkels, welche auf $\phi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ führt. Hat man diese Formel gerade nicht zur Hand oder im Kopf, so muss man sich die Eulersche Formel verdeutlichen

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\sin(\phi)}_{\text{Imaginärteil}}) = \sqrt{3} - i.$$

Jetzt sieht man, dass der Realteil der linken Seite mit dem Realteil der rechten Seite übereinstimmen muss. Das gleiche gilt für den Imaginärteil. Hier also $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\phi)$ und $-\frac{1}{2} = \sin(\phi)$ ($\frac{1}{2}$, weil wir ja bereits wissen, dass der Betrag der rechten Seite 2 ist). Da der Realteil durch die $\cos$-Funktion und der Imaginärteil durch die $\sin$-Funktion dargestellt werden, suchen wir also genau die Stelle, an der die $\cos$-Funktion genau das $\sqrt{3}$-Fach Negative der $\sin$-Funktion ist (und die $\cos$-Funktion natürlich positiv). Verdeutlicht man sich die Verläufe der $\cos$- und $\sin$-Funktionen, so erkennt man, dass dies genau an der Stelle $\phi = \frac{11}{6}\pi$ der Fall ist. Demnach also

$$\phi = \arg(\sqrt{3} - \imath) = \frac{11\pi}{6}.$$

Um jetzt zu der exponentiellen und trigonometrischen Darstellung zu kommen, müssen wir nur noch einsetzen

$$z = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

(c) Der Betrag berechnet sich stets nach der festen Formel, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei $z = a + bi$. In diesem Fall erhalten wir also $|1 - \imath| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$. Das Argument, also der Winkel, einer Komplexen Zahl ist nun schon etwas schwieriger zu bekommen. Idealerweise kennt man die Formel zur Berechnung des Winkels, welche auf $\phi = \arctan(1) + \pi = \frac{5\pi}{4}$ führt. Hat man diese Formel gerade nicht zur Hand oder im Kopf, so muss man sich die Eulersche Formel verdeutlichen

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\sin(\phi)}_{\text{Imaginärteil}}) = -4 - 4i.$$

Jetzt sieht man, dass der Realteil der linken Seite mit dem Realteil der rechten Seite übereinstimmen muss. Das gleiche gilt für den Imaginärteil. Hier also $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\phi)$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\phi)$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, weil wir ja bereits wissen, dass der Betrag der rechten Seite $\sqrt{32}$ ist). Da der Realteil durch die $\cos$-Funktion und der Imaginärteil durch die $\sin$-Funktion dargestellt werden, suchen wir also genau die Stelle, an der die $\sin$-Funktion die $\cos$-Funktion schneidet (und die $\cos$-Funktion ist natürlich negativ). Verdeutlicht man sich die Verläufe der $\cos$- und $\sin$-Funktionen, so erkennt man, dass dies genau an der Stelle $\phi = \frac{7}{4}\pi$ der Fall ist. Demnach also

$$\phi = \arg(-4 - 4\imath) = \frac{5\pi}{4}.$$

Um jetzt zu der exponentiellen und trigonometrischen Darstellung zu kommen, müssen wir nur noch einsetzen

$$z = \sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{32}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

(d) $|-\sqrt{3}+\imath| = 2, \quad \phi = \arg(-\sqrt{3}+\imath) = \frac{5\pi}{6} \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

(e) $|1+\sqrt{3}\imath| = 2, \quad \phi = \arg(1+\sqrt{3}\imath) = \frac{\pi}{3} \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

(f) $|1-\sqrt{3}\imath| = 2, \quad \phi = \arg(1-\sqrt{3}\imath) = \frac{5\pi}{3} \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

Aufgabe 2.4.
Zeichnen Sie die folgenden Mengen

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(\bar{z}) = 3\}$, **(b)** $M_2 := \{z \mid |z| = 1\}$, **(c)** $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z - \bar{z}) = 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.4.

(a) M_1 ist die Gerade durch $-3i$ parallel zur reellen Achse.

(b) M_2 ist der Rand des Einheitskreises.

(c) M_3 ist die leere Menge, denn $z - \bar{z}$ ist rein imaginär und hat damit immer Realteil Null.

Aufgabe 2.5.

(a) Geometrisch: Warum kann man jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig als $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ schreiben, wobei $r \in \mathbb{R}^+$ und $\phi \in [0, 2\pi)$?

(b) Wie berechnet man zu $z \in \mathbb{C}$ den Radius r und den Winkel ϕ ?

(c) Was ist die komplexe Multiplikation geometrisch ?

(d) Was ist Wurzelziehen bzw. das Lösen der Gleichung $z^n = w$ geometrisch ?

(e) Löse die Gleichungen (i) $z^2 = i$ und (ii) $z^3 = 1 + i$.

Lösung zu Aufgabe 2.5.

(a) Jeder Punkt im $\mathbb{R}^2$ ist eindeutig durch den Radius des Kreises um den Ursprung/Nullpunkt, auf dem er liegt, und den Winkel, den die Gerade durch ihn und Null mit der reellen Achse bildet, bestimmt.

(b) Wegen $\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$ für beliebiges ϕ ist $r = |z|$.
Weiterhin gilt wegen $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi) \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{y}{x}$ bei $z = x + iy$ für den Winkel $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (eventuell bis auf ein additives Vielfaches von 2π , d.h. solange ϕ im richtigen Sektor ist).
Ist $\tan(\phi)$ nicht definiert, dann können wir auch auf den Kotangens ausweichen: $\cot(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} = \frac{x}{y}$ bzw. ist dann $\phi = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right)$

(c) Hat z den Radius r und den Winkel ϕ sowie z' den Radius r' und den Winkel ϕ' , dann gelten:

$$\begin{aligned}
z \cdot z' &= r\ (\cos(\phi) + i\sin(\phi))\, r'\ \big(\cos(\phi') + i\sin(\phi')\big) \\
&= rr'\Big(\big(\cos(\phi)\cos(\phi') - \sin(\phi)\sin(\phi')\big) + i \cdot \big(\cos(\phi)\sin(\phi') + \cos(\phi')\sin(\phi)\big)\Big) \\
&= rr'\big(\cos(\phi + \phi') + i \cdot \sin(\phi + \phi')\big)
\end{aligned}$$

Dann hat zz' den Radius rr' und den Winkel $\phi + \phi'$.
(Wir haben die folgenden Additionstheoreme verwendet:

$$\cos(\phi + \phi') = \cos(\phi)\cos(\phi') - \sin(\phi)\sin(\phi'), \quad \sin(\phi + \phi') = \cos(\phi)\sin(\phi') + \cos(\phi')\sin(\phi).\Big)$$

(d) Man sucht die Zahlen, deren Winkel- n -faches (modulo 2π) genau dem Winkel von w und deren Radius genau der positiven n -ten Wurzel aus dem Radius von w entspricht.

(e) (i) Die komplexe Zahl i hat den Betrag 1 und den Winkel $\pi/2$, also sucht man Zahlen vom Betrag 1 mit Winkel $2\phi = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$. Deswegen kommen nur $\phi = \frac{\pi}{4}$ und $2\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, d.h. $\phi = 5\pi/4$ in Frage, die Lösungen sind also $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $z = \cos\frac{5\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

(e) (ii) Die komplexe Zahl $1+i$ hat den Betrag $\sqrt{2}$ und den Winkel $\pi/4$, also sucht man Zahlen vom Betrag $\sqrt[6]{2}$ und Winkel $3\phi = \pi/4$. Deswegen kommen nur die Winkel $\phi_1 = \pi/12$,
$3\phi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, d.h. $\phi_2 = \frac{9\pi}{12}$, und
$3\phi_3 = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$, d.h. $\phi = \frac{17\pi}{12}$ in Frage, die Lösungen sind also

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2}\,(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12))\,, \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\,(\cos(9\pi/12) + i\sin(9\pi/12))\,, \\ z_3 &= \sqrt[6]{2}\,(\cos(17\pi/12) + i\sin(17\pi/12))\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.6.

(a) Überführen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $re^{i\phi}$.

(i) $z = i$, **(ii)** $z = -i$, **(iii)** $z = 1$, **(iv)** $z = 1 + i$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^4 = 16$ über $\mathbb{C}$.

(c) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -1$ über $\mathbb{C}$.

Lösung zu Aufgabe 2.6.

(a) (i) $z = i$: Es gilt $|i| = \sqrt{i\cdot(-i)} = \sqrt{-i^2} = \sqrt{1} = 1$.

Somit ist $i = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.
Nach der EULERschen Formel gilt dann $i = 0 + i\cdot 1 = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
Damit muss $\cos(\phi) = 0$ und $\sin(\phi) = 1$ sein. Das gilt genau für $\phi = \frac{\pi}{2}$. Demnach ist $i = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$.

(ii) $z = -i$: Wegen $|z| = |-z|$, wissen wir dass $|-i| = |i| = 1$ ist.

Somit ist $-i = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.
Nach der EULERschen Formel gilt dann $-i = 0 + i\cdot(-1) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
Damit muss $\cos(\phi) = 0$ und $\sin(\phi) = -1$ sein. Das gilt genau für $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Demnach ist $i = e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$.

(iii) $z = 1$: Wegen $\overline{1} = 1$, ist offenbar $|1| = 1$.

Somit ist $1 = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.
Nach der EULERschen Formel gilt dann $1 = 1 + i\cdot 0 = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
Damit muss $\cos(\phi) = 1$ und $\sin(\phi) = 0$ sein. Das gilt genau für $\phi = 0$. Demnach ist $1 = e^{i\cdot 0}$.

(iv) $z = 1 + i$: Es gilt $|1+i| = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{1-i^2} = \sqrt{2}$.

Somit ist $1 + i = \sqrt{2}e^{i\phi}$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.
Nach der EULERschen Formel gilt dann $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$.
Damit muss $\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein. Das ist aber äquivalent zu $\tan(\phi) = 1$. Das gilt genau für $\phi = \frac{\pi}{4}$. Demnach ist $1 + i = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$.

(b) Wir können zunächst die Gleichung schreiben als $y^2 = 16$ mit $y = x^2$. Dann erhalten wir für y die Lösungen $\{-4, 4\}$. Damit haben wir nun die beiden quadratischen Gleichungen $x^2 = 4$ und $x^2 = -4$ zu lösen. Die erste liefert die Lösungsmenge $L_1 = \{-2, 2\}$, die zweite liefert $L_2 = \{-\sqrt{-4}, \sqrt{-4}\}$. Es gilt aber nach den Wurzelgesetzen $\sqrt{-z} = \sqrt{-1}\sqrt{z} = i\sqrt{z}$. Demnach ist $L_2 = \{-2i, 2i\}$ und die gesamte Lösungsmenge ergibt sich zu

$$L_1 \cup L_2 = \{-2, -2i, 2, 2i\}.$$

(c) Da die Gleichung äquivalent zu $z^3 + 1 = 0$ ist, suchen wir also die Nullstellen des Polynoms $p_3(z) = z^3 + 1$, welches den Grad drei besitzt und demnach genau 3 Nullstellen über $\mathbb{C}$ besitzen muss. Die erste Nullstelle $z_1 = -1 = e^{i\pi}$ kann sofort abgelesen werden, denn $(-1)^3+1 = 0$. Jetzt können wir den Faktor $(z-z_1) = (z+1)$ mittels Polynomdivision aus dem Polynom $p_3(z)$ herausfaktorisieren:

$$(z^3 + 1) : (z + 1) = z^2 - z + 1$$

Das Polynom $z^2 - z + 1$ besitzt nach der üblichen Formel die Lösungen $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wir sehen gerade das $\overline{z_2} = z_2$.

Merke: Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle des Polynoms $p_n(z)$, dann ist auch gleichzeitig $\bar{z}$ eine Nullstelle von $p_n(z)$.

Für unsere Nullstellen z_2 und z_3 gilt $|z_2|^2 = |z_3|^2 = z_2 \cdot z_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Mit Hilfe der EULERschen Formel gilt dann wiederum

$$\begin{aligned} z_2 = e^{i\phi_2} &= \cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2) &\Leftrightarrow \quad \tan(\phi_2) &= \sqrt{3}, \\ z_3 = e^{i\phi_3} &= \cos(\phi_3) + i\sin(\phi_3) &\Leftrightarrow \quad \tan(\phi_3) &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Da $\tan(x)$ eine ungerade Funktion ist, muss dann gelten $\phi_2 = -\phi_3 = \frac{\pi}{3}$. Verwenden wir noch die 2π-Periodizität der Funktion $f(\phi) = e^{i\phi}$, lautet unsere Lösungsmenge $L = \{z_1, z_2, z_3\} = \{e^{i\pi}, e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}, e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}\}$.

Aufgabe 2.7.
Leiten Sie die MOIVREsche Formel aus der EULERschen Formel her.

Lösung zu Aufgabe 2.7.

$$\begin{aligned} (\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n &\overset{\text{EULERsche Formel}}{=} (e^{i\phi})^n \\ &\overset{\text{Potenzgesetze}}{=} e^{in\phi} \\ &\overset{\text{EULERsche Formel}}{=} \cos(n\phi) + i\sin(n\phi). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.8.
Leiten Sie aus der EULERschen Formel Darstellungen für den Sinus und den Kosinus her.

Lösung zu Aufgabe 2.8.
Es gelten mit Hilfe der EULERschen Formel die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= \cos(\phi) + i\sin(\phi) \\ e^{-i\phi} = e^{i(-\phi)} &= \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos(\phi) - i\sin(\phi) \end{aligned}$$

weil der Sinus eine ungerade bzw. der Kosinus eine gerade Funktion ist (dabei ist f eine **gerade** Funktion, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle x gilt, und f heißt **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt.)

Addition der beiden Gleichungen ergibt $e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2\cos(\phi) \Leftrightarrow \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} = \cos(\phi)$.

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2i\sin(\phi) \Leftrightarrow \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} = \sin(\phi)$.

Bemerkung:

Verwenden wir die Darstellung $z = r \cdot e^{i\phi}$ als Alternative zu $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ oder $z = a + ib$, erkennen wir aus den letzten beiden Gleichungen sehr schön die folgenden Zusammenhänge für den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

$$\begin{aligned} \Re(z) &= r \cdot \cos(\phi) = \frac{re^{i\phi} + re^{-i\phi}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = a, \\ \Im(z) &= r \cdot \sin(\phi) = \frac{re^{i\phi} - re^{-i\phi}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + ib - (a - ib)}{2i} = b. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.9.
Wie sehen die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene aus? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie diese.

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 3\} \qquad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1-2i| < 1\}$$
$$M_3 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \bar{z} = i\} \qquad M_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \Re(z) + 1\}$$

Lösung zu Aufgabe 2.9.

- M_1 ist der Kreis (inklusive Rand) um den Ursprung mit Radius 3, denn $d(z,z') := |z-z'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ ist gerade der Euklidische Abstand der Punkte $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ im $\mathbb{R}^2$.
- M_2 ist das Innere des Kreises (ohne Rand) um den Punkt $1+2i$ mit Radius 1.
- M_3 ist wegen $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ die Gerade der Punkte mit Imaginärteil $\frac{1}{2}$.
- Die Punkte von M_4 erfüllen

$$z\bar{z} \;=\; \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z})+1\right)^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + 4(z+\bar{z}) + 4\right) \quad ,$$

also $(z-\bar{z})^2 + 4(z+\bar{z}) + 4 = 0$ und somit mit $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, die Beziehung $-4y^2 + 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y^2-1)$. Die Teilmenge M_4 ist somit eine Parabel über der imaginären Achse (mit den Punkten $z_1 = -\frac{1}{2} + 0 \cdot i$ und $z_{2,3} = 0 \pm i$).

Aufgabe 2.10.
Lösen Sie die Gleichung $z^3 \;=\; -27,\ z \in \mathbb{C}$ und stellen Sie die Lösungen graphisch dar.

Lösung zu Aufgabe 2.10.
Die erste Lösung ist sofort abzulesen als $z_1 = -3 = 3 \cdot e^{i\pi}$, denn es gilt $\sqrt[3]{27} \;=\; 3$ bzw. $(3 \cdot e^{i\pi})^3 \;=\; 27 \cdot e^{i \cdot 3\pi} \;=\; 27 \cdot e^{i\pi} \cdot e^{2\pi i} \;=\; 27 \cdot e^{i\pi} \;=\; -27$.
Mittels Polynomdivision erhalten wir dann $z^3 + 27 \;=\; (z+3)(z^2 - 3z + 9)$. Der zweite Faktor lässt sich nun mit Hilfe seiner Nullstellen noch weiter zerlegen. Diese sind gerade $z_2 \;=\; 3 \cdot (\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \;=\; 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$ und $z_3 \;=\; 3 \cdot (\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \;=\; 3 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{3}}$.
Damit ist die Lösungsmenge $L \;=\; \{-3, \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\} \;=\; \{3 \cdot e^{i\pi}, 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}, 3 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{3}}\}$.

Aufgabe 2.11.
Nutze die **Moivresche Formel** $(\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$, um die folgenden Funktionen allein mit Hilfe von $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ auszudrücken:

(a) $\cos(3\phi)$ (b) $\sin(2\phi) + \cos(4\phi)$

Lösung zu Aufgabe 2.11.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\cos(3\phi) &= \Re(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi)) \\
&= \Re\left((\cos(\phi) + i\sin(\phi))^3\right) \\
&= \Re\left(\cos(\phi)^3 + 3i\cos(\phi)^2\sin(\phi) - 3\cos(\phi)\sin(\phi)^2 - i\sin(\phi)^3\right) \\
&= \cos(\phi)^3 - 3\cos(\phi)\sin(\phi)^2
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(2\phi) + \cos(4\phi) &= \Im(\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)) + \Re(\cos(4\phi) + i\sin(4\phi)) \\
&= \Im\left((\cos(\phi) + i\sin(\phi))^2\right) + \Re\left((\cos(\phi) + i\sin(\phi))^4\right) \\
&= 2\cos(\phi)\sin(\phi) + \cos(\phi)^4 - 6\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2 + \sin(\phi)^4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.12.
Geben Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$|x-2| < |x-3|$$

an, wenn $a)$ $x \in \mathbb{R}$ und $b)$ $x \in \mathbb{C}$ ist und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen!

Lösung zu Aufgabe 2.12.

a) $x \in \mathbb{R}$:

Fall $x \geq 3$:
Die Ungleichung lautet dann $x-2 < x-3 \;\Leftrightarrow\; -2 < -3 \quad \Rightarrow$ falsche Aussage

Fall $2 \leq x < 3$:
Die Ungleichung lautet dann $x-2 < 3-x \;\Leftrightarrow\; x < \frac{5}{2}$.
Wir erhalten das Intervall $[2, \frac{5}{2}[$.

Fall $x < 2$:
Die Ungleichung lautet dann $2-x < 3-x \;\Leftrightarrow\; 2 < 3 \quad \Rightarrow$ wahre Aussage
Wir erhalten somit das Intervall $]-\infty, 2[$.

Die Lösungsmenge ist demnach $L \;=\;]-\infty, \frac{5}{2}[$.

Alternativer Lösungsweg: Quadrieren beider Seiten ergibt

$$\begin{aligned} |x-2|^2 \;<\; |x-3|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 \;<\; (x-3)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-4x+4 \;<\; x^2-6x+9 \\ &\Leftrightarrow \quad x \;<\; \tfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \;]-\infty, \tfrac{5}{2}[. \end{aligned}$$

b) $x \in \mathbb{C}$: Eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ lässt sich darstellen als $x = a + ib$. Ihr Betrag ist definiert als $|x| := \sqrt{x \cdot \overline{x}} \;=\; \sqrt{(a+ib)(a-ib)} \;=\; \sqrt{a^2+b^2}$.
Demnach ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} |x-2|^2 \;<\; |x-3|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a-2+ib)(a-2-ib) \;<\; (a-3+ib)(a-3-ib) \\ &\Leftrightarrow \quad (a-2)^2+b^2 \;<\; (a-3)^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (a-2)^2 \;<\; (a-3)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2-4a+4 \;<\; a^2-6a+9 \\ &\Leftrightarrow \quad a \;<\; \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L \;=\; \{x \in \mathbb{C} \;\big|\; \Re(x) < \frac{5}{2}\} \;=\; \{x \in \mathbb{C} \;\big|\; \Re(x) \in \;]-\infty, \frac{5}{2}[\;\}$.

Aufgabe 2.13.
Lösen Sie die folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$.

(a) $z^5 = 1$, **(b)** $z^4 = 16\imath$, **(c)** $z^6 = -4 - 4\imath$, **(d)** $z^3 = 2 + 2\imath$.

Lösung zu Aufgabe 2.13.

(a) Das generelle Vorgehen bei der Lösung von Aufgaben des Typs $z^n = w$ mit $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$ ist immer dasselbe.

Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^5 = 1$ auf

$$r^5 e^{5i\phi} = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = |z| e^{i \cdot \psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^5 = 1$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = 1$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $5\phi = 0$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = 0$. Ist ja auch nicht weiter verwunderlich, da $1 \cdot e^{\phi_0} = e^0 = 1$ eine Lösung ist, die man auch vorher hätte ablesen können.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 5 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π -Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel 0 der selbe ist, wie 2π , 4π , 6π , 8π . Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$5\phi = 2\pi, \qquad 5\phi = 4\pi, \qquad 5\phi = 6\pi, \qquad 5\phi = 8\pi,$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{2}{5}\pi, \phi_3 = \frac{4}{5}\pi, \phi_4 = \frac{6}{5}\pi, \phi_5 = \frac{8}{5}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{2}{5}\pi}, z_3 = e^{i\frac{4}{5}\pi}, z_4 = e^{i\frac{6}{5}\pi}, z_5 = e^{i\frac{8}{5}\pi}.$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach 8π weiter gemacht, mit 10π usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

(b) Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^4 = 16i$ auf

$$r^4 e^{4i\phi} = 16 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = |z|e^{i\cdot\psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^4 = 16$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = 2$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $4\phi = \frac{\pi}{2}$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = \frac{\pi}{8}$.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 4 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π -Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel $\frac{\pi}{2}$ der selbe ist, wie $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{2}$. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$4\phi = \frac{5\pi}{2}, \qquad 4\phi = \frac{9\pi}{2}, \qquad 4\phi = \frac{13\pi}{2},$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{5}{8}\pi, \phi_3 = \frac{9}{8}\pi, \phi_4 = \frac{13}{8}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{8}\pi}, z_2 = 2e^{i\frac{5}{8}\pi}, z_3 = 2e^{i\frac{9}{8}\pi}, z_4 = 2e^{i\frac{13}{8}\pi}.$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach $\frac{13}{2}\pi$ weiter gemacht, mit $\frac{17}{2}\pi$ usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

Alternativ hätte man natürlich sofort die allgemeine Lösungsformel verwenden können.

(c) Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^6 = 1$ auf

$$r^4 e^{4i\phi} = \sqrt{32} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}} = |z|e^{i\cdot\psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^6 = \sqrt{32}$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = \sqrt[12]{32}$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $6\phi = \frac{5\pi}{4}$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = \frac{5\pi}{24}$.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 6 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π -Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel $\frac{5\pi}{4}$ der selbe ist, wie $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{21\pi}{4}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{37\pi}{4}$, $\frac{45\pi}{4}$. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$6\phi = \frac{13\pi}{4}, \qquad 6\phi = \frac{21\pi}{4}, \qquad 6\phi = \frac{29\pi}{4}, \qquad 6\phi = \frac{37\pi}{4}, \qquad 6\phi = \frac{45\pi}{4},$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{13}{24}\pi, \phi_3 = \frac{21}{24}\pi, \phi_4 = \frac{29}{24}\pi, \phi_5 = \frac{37}{24}\pi, \phi_6 = \frac{45}{24}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{5}{24}\pi}, z_2 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{13}{24}\pi}, z_3 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{21}{24}\pi}, z_4 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{29}{24}\pi}, z_5 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{37}{24}\pi}, z_6 = \sqrt[12]{32}e^{i\frac{45}{24}\pi}$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach $\frac{45}{4}\pi$ weiter gemacht, mit $\frac{53}{4}\pi$ usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

Alternativ hätte man natürlich sofort die allgemeine Lösungsformel verwenden können.

(d) Man schreibt die Gleichung in die Exponentialform um, dies führt bei $z^3 = 2 + 2i$ auf

$$r^3 e^{3i\phi} = \sqrt{8} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = |z| e^{i \cdot \psi}.$$

So nun muss als Erstes der Betrag übereinstimmen, hier also $r^3 = \sqrt{8}$. Da der Betrag stets positiv ist führt dies auf $r = \sqrt[6]{8}$. Jetzt muss noch der Winkel übereinstimmen, also $3\phi = \frac{\pi}{4}$. Demnach lautet die erste Lösung $\phi_1 = \frac{\pi}{12}$.

Nach dem Hauptsatz der Algebra, existieren aber 3 Lösungen über $\mathbb{C}$ und nicht nur eine. Daher nutzen wir nun die 2π -Periodizität aus. Und zwar wissen wir, dass in der komplexen Zahlenebene der Winkel $\frac{\pi}{4}$ der selbe ist, wie $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$. Wir erhalten also als weitere Gleichungen

$$3\phi = \frac{9\pi}{4}, \qquad\qquad 3\phi = \frac{17\pi}{4},$$

und somit die weiteren Lösungen

$$\phi_2 = \frac{3}{4}\pi, \phi_3 = \frac{17}{12}\pi.$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Lösungen

$$z_1 = \sqrt[6]{8} e^{i \frac{1}{12}\pi}, z_2 = \sqrt[6]{8} e^{i \frac{9}{12}\pi}, z_3 = \sqrt[6]{8} e^{i \frac{17}{12}\pi}$$

Hätten wir übrigens mit den Winkeln nach $\frac{17}{4}\pi$ weiter gemacht, mit $\frac{25}{4}\pi$ usw., dann hätten wir als Lösungen wieder Zahlen bekommen, die wir aufgrund der 2π Periodizität bereits hatten.

Alternativ hätte man natürlich sofort die allgemeine Lösungsformel verwenden können.

Aufgabe 2.14.
Bestimmen Sie $\sqrt[3]{-2 + 2i}$.

Lösung zu Aufgabe 2.14.
Wir möchten alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -2 + 2i \tag{1}$$

finden. Wir schreiben $\tilde{z} = -2 + 2i$ in Exponentform um. Der Betrag ist $|\tilde{z}| = \sqrt{8}$. Weil die Zahl im zweiten Quadranten liegt, erfüllt das Argument φ die Gleichung $\varphi = \pi - \arctan(\frac{2}{2}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\tilde{z} = 2\sqrt{2} \cdot e^{i \frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) \right).$$

Wir schreiben die Lösung der Gleichung in der Form $z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$, wobei $r_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$ und $3\varphi_k = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2$. Damit können wir die Lösungen als

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{0 \cdot 2\pi}{3})} = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \right) = 1 + i \\
z_1 &= \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{1 \cdot 2\pi}{3})} = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos \tfrac{11\pi}{12} + i \sin \tfrac{11\pi}{12}) \approx -1.36603 + 0.366025i, \\
z_2 &= \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot 2\pi}{3})} = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{19\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos \tfrac{19\pi}{12} + i \sin \tfrac{19\pi}{12}) \approx 0.366025 - 1.36603i.
\end{aligned}$$

schreiben.

Aufgabe 2.15.
Bestimmen Sie die Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 - (2 - 3i)z - (2 + 4i) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 2.15.
Die quadratische Ergänzung ergibt

$$\begin{aligned}
z^2 - (2 - 3i)z - (2 + 4i) &= \left(z^2 - 2z\tfrac{2-3i}{2} + (\tfrac{2-3i}{2})^2\right) - (\tfrac{2-3i}{2})^2 - (2 + 4i) \\
&= \left(z - \tfrac{2-3i}{2}\right)^2 + \tfrac{5+12i}{4} - (2 + 4i) = \left(z - \tfrac{2-3i}{2}\right)^2 - \tfrac{3+4i}{4}.
\end{aligned}$$

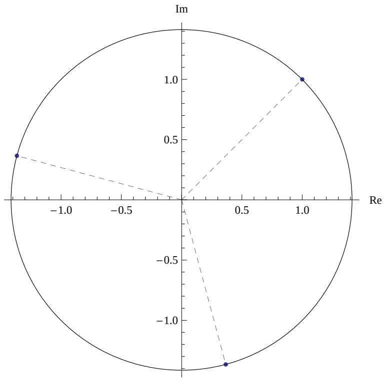

Abbildung 1: Die Symmetrie der Lösungen

Wir schreiben die Gleichung als

$$\begin{aligned}\left(z - \tfrac{2-3i}{2}\right)^2 &= \tfrac{3+4i}{4}\\ \left(2z - (2-3i)\right)^2 &= 3+4i\\ t^2 &= 3+4i\end{aligned}$$

um, wobei $t = 2z - 2 + 3i$.
Wir können die Zahl $\tilde{z} = 3 + 4i$ in Polarform $\tilde{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ umschreiben. Die Formel von Moivre impliziert, dass

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right).\right) \tag{2}$$

Mit den Additionstheoremen erhalten wir

$$\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1+\cos(\varphi)}{2}} = \sqrt{\tfrac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \tfrac{2}{\sqrt{5}}, \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1-\cos(\varphi)}{2}} = \sqrt{\tfrac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.$$

Daher können wir die Lösungen als

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{5}\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}} + i\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pm(2+i)$$

schreiben. Man bemerkt die Symmetrie der Wurzeln $t_1, t_2,$ in der Gaußebene. Wir substituieren t_1 und t_2 für t in der Gleichung $t = 2z - 2 + 3i$ und lösen nach z auf.

$$z_1 = \tfrac{t_1}{2} + \tfrac{2-3i}{2} = 2 - i, \qquad z_2 = \tfrac{t_2}{2} + \tfrac{2-3i}{2} = -2i.$$

Aufgabe 2.16.
Bestimmen Sie alle Lösungen der Ungleichung $\left|\frac{z+2i}{z+(3-i)}\right| < \sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 2.16.
Wir formen die Ungleichung für $z = x + iy$ um zu:

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+2i}{z+(3-i)}\right| &< \sqrt{2}\\ \frac{|z+2i|}{|z+(3-i)|} &< \sqrt{2}\\ |x+iy+2i| &< \sqrt{2}|x+iy+(3-i)| \qquad \text{(Wir erhöhen zur zweiten Potenz)}\\ (x+i(y+2))(x-i(y+2)) &< 2(x+3+i(y-1))(x+3-i(y-1))|\\ x^2+(y+2)^2 &< 2((x+3)^2+(y-1)^2)\\ 0 &< x^2+12x+y^2-8y+16.\end{aligned}$$

Mit der Hilfe der quadratischen Ergänzung für x und y :

$$x^2 + 12x + y^2 - 8y + 16 = (x^2 + 2x\cdot 6 + 36) - 36 + (y^2 - 2y\cdot 4 + 16) = (x+6)^2 + (y-4)^2 - 36,$$

erhalten wir

$$36 < (x+6)^2 + (y-4)^2.$$

Die Lösung dieser Ungleichung ist die Menge der Punkte $z = x + iy$ der Gaußebene, die nicht in dem Kreis mit Mittelpunkt $m = -6 + 4i$ und dem Radius $r = 6$ liegen. Die Illustration der Lösungmenge zusammen mit der Funktion $\left|\frac{z+2i}{z+(3-i)}\right|$ ist in der Abbildung dargestellt.

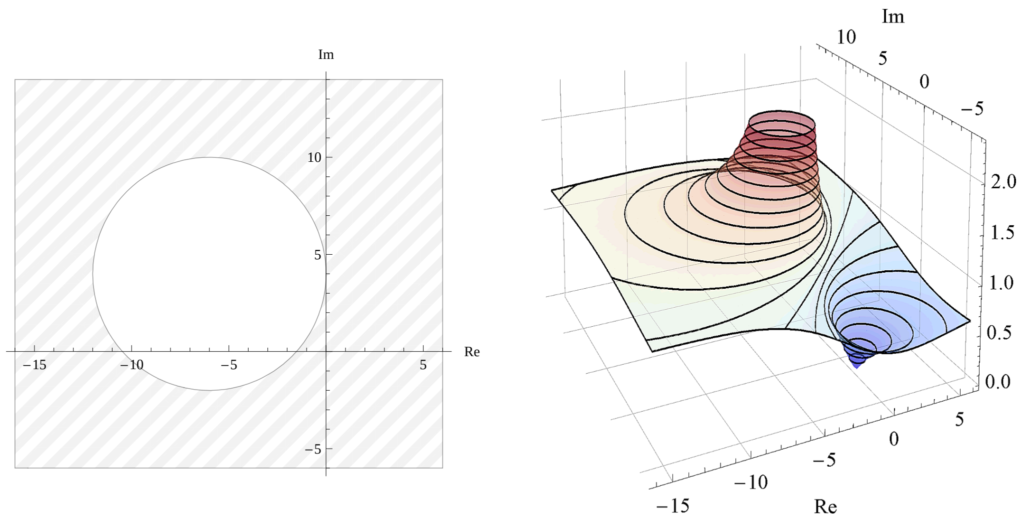

Abbildung 2: Die Darstellung der Lösungmenge der Ungleichung von Aufgabe und der Funktion $\left|\frac{z+2i}{z+(3-i)}\right|$ in der Gaußebene.

Aufgabe 2.17.
Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $|z-3| + |z+3| = 10$.

Lösung zu Aufgabe 2.17.
Wir formen die Gleichung für $z = x + iy$ um zu:

$$\begin{aligned} |z-3| + |z+3| &= 10 \\ |(a-3)+iy| + |(a+3)+iy| &= 10. \end{aligned}$$

Wir erhöhen zur zweiten Potenz, $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + y^2 + (x+3)^2 + y^2 + 2|(x-3)+iy||(x+3)+iy| &= 100 \\ |(x^2 - (y^2+9)) + 2xyi| &= 41 - (x^2+y^2) \quad \text{(und noch mal)} \\ x^4 + 2y^2x^2 - 18x^2 + y^4 + 18y^2 + 81 &= x^4 + 2y^2x^2 - 82x^2 + y^4 - 82y^2 + 1681 \\ 64x^2 + 100y^2 &= 1600 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Das ist nicht anderes als die Ellipsengleichung mit Exzentrizität $\sqrt{25-16} = 3$, Halbachsen $a = 5$ und $b = 4$, daher sind die Brennpunkte $f_1 = (-3, 0)$, $f_2 = (3, 0)$, die Schnittpunkte mit der x-Achse liegen in den Punkten $(\pm 5, 0)$, die Schnittpunkte mit der y-Achse ist im Punkten $(0, \pm 4)$.

Aufgabe 2.18.
Bestimmen Sie die Überlagerung von reellen Schwingungen mit gleichen Frequenzen:

(a) $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ mit $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$;
(b) $x_1 = \sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ mit $x_2 = \sin(\omega t - 1)$;
(c) $x_1 = \sin(t)$ mit $x_2 = \cos(t)$.

Lösung zu Aufgabe 2.18.
Zuerst rechnen wir die Aufgabe in allgemeiner Weise (a). Wir erweitern die reellen Schwingungen x_1 und x_2 in ihre Komplexformen:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow z_1 = A_1(\cos(\omega t + \varphi_1) + \sin(\omega t + \varphi_1)) = A_1 e^{i(\omega + \varphi_1)},$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \longrightarrow z_2 = A_2(\cos(\omega t + \varphi_2) + \sin(\omega t + \varphi_2)) = A_2 e^{i(\omega + \varphi_2)}.$$

Jetzt können wir die Überlagerung x von den Schwingungen schreiben als:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2) = \mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(A_1 e^{i(\omega+\varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega+\varphi_2)}) \\ &= \mathfrak{Re}(e^{i\omega t}(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})) = \mathfrak{Re}(e^{i\omega t}(r \cdot e^{i\psi})) = r\mathfrak{Re}(e^{i(\omega t+\psi)}) \\ &= \mathfrak{Re}(r(\cos(\omega t + \psi) + i \sin(\omega t + \psi))) = r\cos(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

wobei $r \cdot e^{i\psi}$ die Exponentialform der komplexe Zahl $A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ ist.

Im Fall (b) verwenden wir die analoge Prozedur:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2) = \mathfrak{Im}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}(e^{i\omega t}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i})) \\ &= \mathfrak{Im}\big(e^{i\omega t}((1 + \cos 1) + i(1 - \sin 1))\big) \\ &= \mathfrak{Im}(re^{i(\omega t+\psi)}) = r\sin(\omega t + \psi) = \sqrt{3 + 2\cos 1 - 2\sin 1}\,\sin\left(\omega t + \arctan \tfrac{1-\sin 1}{1+\cos 1}\right), \end{aligned}$$

wobei $r \cdot e^{i\psi}$ ist die Exponentialform der komplexe Zahl $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i}$, $r = \sqrt{3 + 2\cos 1 - 2\sin 1} \approx 1.54844$ und das Argument $\psi = \arctan \frac{1-\sin 1}{1+\cos 1} \approx 0.10256$.

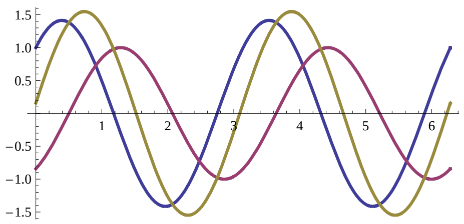

Abbildung 3: Überlagerung von reellen Schwingungen x_1 (blau), x_2 (rot)

Im Fall (c) sollten wir die $x_2 = \cos t$ Funktion als Sinus schreiben, $x_2 = \sin(t + \frac{\pi}{2})$. Jetzt erweitern wir die reellen Schwingungen x_1 und x_2 in ihre Komplexformen:

$$x_1 = \sin(t) \longrightarrow z_1 = e^{it},$$
$$x_2 = \cos(t) = \sin(t + \tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow z_1 = e^{i(t+\frac{\pi}{2})}.$$

Die Überlagerung x von Schwingungen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2) = \mathfrak{Im}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}(e^{it} + e^{i(t+\frac{\pi}{2})}) \\ &= \mathfrak{Im}(e^{it}(1 + e^{i\frac{\pi}{2}})) = \mathfrak{Im}(e^{it}(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})) = \sqrt{2}\sin(t + \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

gegeben.

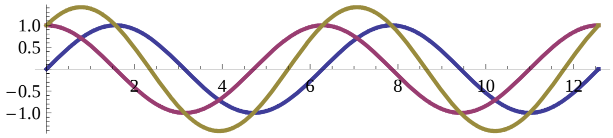

Abbildung 4: Überlagerung von Schwingungen $x_1 = \sin(t)$ (blau), $x_2 = \cos(t)$ (rot)