Lösungen der Aufgabenserie 3

Aufgabe 3.1

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+n^3}{3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3n^2} + \dfrac{n}{3}\right) = 0 + \infty = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+n^2}+\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{4/3}\,(\sqrt[3]{1+n^{-2}}+n^{-5/6})}{n^{4/3}\,(1+n^{-1/3}+n^{-4/3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+n^{-2}}+n^{-5/6}}{1+n^{-1/3}+n^{-4/3}} = \dfrac{1+0}{1+0+0} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^2} = \infty$, denn $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots \binom{n}{n} > \binom{n}{3}$ für $n \ge 3$,

d.h. $\dfrac{2^n}{n^2} > \dfrac{\binom{n}{3}}{n^2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{6n} \to \infty$ für $n \to \infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n+3} - n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)\,(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+2n^{-1}+3n^{-2}}+1} = \dfrac{2+0}{1+1} = 1$

Aufgabe 3.2

1. Zeigen zunächst, dass $a_n \le 2$ ist. Offenbar ist $a_1 \le 2$. Angenommen, es gilt $a_n \le 2$ für ein bestimmtes n, dann ergibt sich $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \le \sqrt{2+2} = 2$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist also $a_n \le 2$ für alle $n \ge 1$.

2. Aus den Ungleichungen $a_n \ge 0$ und $a_n \le 2$ folgt $(2-a_n)\,(1+a_n) \ge 0$, d.h. $2 + a_n \ge a_n^2$ und damit $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \ge \sqrt{a_n^2} = a_n$. Die Folge (a_n) ist also monoton wachsend.

3. Da die Folge (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist, existiert der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (s. Satz 2.4 aus der Vorlesung). Lässt man in der Gleichung $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ den Index n gegen ∞ streben, so ergibt sich die Gleichung $a = \sqrt{2+a}$, aus der $a = 2$ folgt.

Aufgabe 3.3

a) Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \ge \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (bestimmte Divergenz der harmonischen Reihe). Die gegebene Reihe ist also ebenfalls bestimmt divergent.

b) Offenbar ist $n \le 2n-1$ für $n \ge 1$ und damit $\dfrac{1}{(2n-1)^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. Da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (der Exponent bei n ist > 1), konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die gegebene Reihe.

c) Für $a_n = \dfrac{n^2+5}{2^n}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+5}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(n+1)^2+5}{n^2+5} = \dfrac{1}{2} < 1$. Die Reihe konvergiert also nach dem Quotientenkriterium.

d) Für die Reihenglieder $a_n = \dfrac{(3n+1)!}{8^n\,n^2}$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+4)!}{8^{n+1}(n+1)^2} \cdot \dfrac{8^n n^2}{(3n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+2)(3n+3)(3n+4)\,n^2}{8(n+1)^2} = \infty.$

Die Reihe divergiert also nach dem Quotientenkriterium. (Man kann auch zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.)

e) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{1/n}\right)$ ist monoton fallend und strebt gegen 0.

Aufgabe 3.4

a) $s_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$

Folglich ist $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$

b) Es gilt $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\Big).$

Folglich ist (ähnlich wie bei Aufgabe a)) $s_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ und damit $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{4}$