Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 3

Wiederholung - Theorie: Zahlenfolgen

(a) Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Zahlenfolge **konvergent**, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, welches die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

$$(\text{in Zeichen:} \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)\ )$$

Außerdem heißt a dann **Grenzwert** der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(b) Seien $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen aus $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$$

Im Fall $b \neq 0$ gilt: $\exists\ N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$: $b_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

(c) Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **bestimmt divergent**,
falls einer der beiden Fälle auftritt:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall\, L \in \mathbb{R}\ \exists\, N = N(L) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(L) \Longrightarrow a_n > L)$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall\, L \in \mathbb{R}\ \exists\, N = N(L) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(L) \Longrightarrow a_n < L)$

Achtung: ∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen, das heißt $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$!

(d) Besitzt die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ den Grenzwert 0, so nennen wir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auch **Nullfolge**.

(e) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **monoton wachsend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} \geq a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

(f) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **monoton fallend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} \leq a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.

(g) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} > a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

(h) Eine Folge $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ heißt **streng monoton fallend**, falls für alle Glieder a_n $(n \geq n_0)$ gilt, dass $a_{n+1} < a_n$ oder (falls $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nur positive Glieder enthält) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

. . . .

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 3.1.
Zeigen Sie direkt mittels der **Definition des Grenzwertes**:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(b) Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge reeller Zahlen und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen $b \in \mathbb{R}$ konvergente Folge reeller Zahlen.
Dann konvergiert die Folge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n = 3a_n - 5b_n$ gegen den Grenzwert $3a - 5b$.

Lösung zu Aufgabe 3.1.

(a) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und fest. Als $N(\varepsilon)$ wählen wir irgendeine natürliche Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, für die $N(\varepsilon) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ gilt.
(Warum gibt es ein solches $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$? $\mathbb{R}$ erfüllt das **Archimedische Axiom**!)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$. Aus $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ folgt dann $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ und schließlich

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon .$$

(b) Es ist zu zeigen:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |c_n - (3a - 5b)| < \varepsilon)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, $\eta := \frac{\varepsilon}{6}$ und $\nu := \frac{\varepsilon}{10}$.
Nach Voraussetzung existiert ein M, so dass $\forall n \geq M$ die Bedingung $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$ gilt.
Weiter existiert nach Vor. ein K, so dass $\forall n \geq K$ die Bedingung $|b_n - b| < \nu = \frac{\varepsilon}{10}$ gilt.
Wir setzen nun $N(\varepsilon) := \max(M, K)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$.
Da $n \geq M$, folgt $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$ und ebenso auch $|b_n - b| < \eta = \frac{\varepsilon}{10}$ wegen $n \geq K$.
Insgesamt folgt nun:

$$|(3a_n - 5b_n) - (3a - 5b)| = |3(a_n - a) - 5(b_n - b)| \leq 3|a_n - a| + 5|b_n - b| < 3\frac{\varepsilon}{6} + 5\frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Aufgabe 3.2.
Untersuchen Sie das Grenzverhalten der folgenden Folgen

(a) $a_n := \dfrac{n^2}{2n^2 - 3n + 3}$ **(b)** $b_n := \dfrac{n-1}{n^2+1}$ **(c)** $c_n := \dfrac{4n^4 - 1}{8n - 1}$

Lösung zu Aufgabe 3.2.
Wir klammern stets die höchsten n-Potenzen des Nenners aus (und kürzen sie).

(a) Es gilt dann $a_n = \frac{n^2}{2n^2-3n+3} = \frac{1}{2-3\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}$. Für den Nenner erhalten wir dann $\lim\limits_{n\to\infty} \left((2 - 3\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2})\right) = 2 - 0 + 0 = 2$. Somit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(b) Die zweite Folge kann umgeformt werden zu $b_n := \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Für den Nenner gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + 0 = 1$. Im Zähler stehen jedoch nur Nullfolgen, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ folgt.

(c) Für die dritte Folge haben wir $c_n = \frac{4n^4-1}{8n-1} = \frac{4n^3 - \frac{1}{n}}{8-\frac{1}{n}}$. Für den Nenner erhalten wir dann $\lim\limits_{n\to\infty} \left(8 - \frac{1}{n}\right) = 8 + 0 = 8$. Da $4n^3$ bestimmt gegen ∞ divergiert und $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, folgt dann insgesamt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

Aufgabe 3.3.
Im Zuschauerraum eines Saals gibt es 40 Reihen Sitzplätze. In jeder Reihe ist 1 Platz mehr als in der vorausgehenden. Wie viele Sitzplätze gibt es insgesamt, wenn in der 20. Reihe 30 Sitzplätze sind?

Lösung zu Aufgabe 3.3.
Wir benutzen den Abzähltrick von Gauß und erkennen, dass wenn man jeweils die 20. mit der 21. Reihe addiert oder die 19. mit der 22. Reihe addiert auf 61 Sitzplätze kommt. Somit ergeben sich insgesamt $61 \cdot 20 = 1220$ Sitzplätze.

Ein anderer (sehr viel längerer) Lösungsweg mittels Folgenargumenten ist der Folgende: Aus der Aufgabenstellung kann man ablesen, dass es sich bei der Anzahl der Sitzplätze in der n-ten Reihe um eine arithmetische Folge handelt, also die Form $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ mit $d = 1$ hat. Wir wissen, dass $a_{20} = 30 = a_1 + 1 \cdot 19$. Demnach ist $a_1 = 11$. Die Anzahl der Sitzplätze im gesamten Raum ist dann durch

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = \sum_{n=1}^{30} 11 + 1(n-1) = 11 \cdot 40 + \sum_{n=1}^{39} n = 440 + 39 \cdot 20 = 440 + 780 = 1220$$

gegeben.

Aufgabe 3.4.
Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ **(b)** $b_n := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ **(c)** $c_n := \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n}$

(d) $d_n := \dfrac{3^n + (-3)^n}{2^n}$ **(e)** $e_1 := 1 \quad e_{n+1} := \dfrac{1}{4}(e_n + 1)$ **(f)** $f_n := \dfrac{n^2+1}{2n+3} - \dfrac{n^3+1}{2n^2-1}$

Lösung zu Aufgabe 3.4.

(a) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$.

(b) Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp(-1)$$

(c) $c_{2k} = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $c_{2k-1}=0$ und somit $c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\ (k,n\to\infty)$.

(d) $d_{2k} = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, $d_{2k-1}=0$. Die Folge divergiert.

(e) Zunächst zeigt man induktiv, dass $e_n > \frac{1}{3}$ für all $n\in\mathbb{N}$ gilt, da $e_1 = 1 > \frac{1}{3}$ gilt und aus $e_n > \frac{1}{3}$ die Ungleichung

$$e_{n+1} > \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

folgt. Daher ist e_n nach unten beschränkt. Außerdem ist e_n wegen

$$e_{n+1} = \frac{e_n}{4}+\frac{1}{4} = \frac{e_n}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} < \frac{e_n}{4}+\frac{3}{4}e_n = e_n.$$

monoton fallend. Also konvergiert e_n , und zwar gegen die eindeutige Lösung $e=\frac{1}{3}$ der Gleichung $e=\frac{1}{4}(e+1)$.

(f)

$$f_n = \frac{n^2+1}{2n+3}-\frac{n^3+1}{2n^2-1} = \frac{(n^2+1)(2n^2-1)-(n^3+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n^2-1)} = \frac{-3n^3+n^2-2n-4}{4n^3+6n^2-2n-3} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{3}{4}$$

Aufgabe 3.5.

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge a_n mit

$$a_n := n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right).$$

Lösung zu Aufgabe 3.5.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)+\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^2-1^2\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}+\lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2-1^2\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.6.

Man berechne die Grenzwerte der angegebenen Folgen!

(a) $a_n = \dfrac{(n+2)(3n^2-1)(5n^3+3)}{(n^2-1)(n^2+1)^2}$ **(b)** $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$ **(c)** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$

(d) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}$ **(e)** $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **(f)** $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

(g) $a_n = \sqrt[2n+(-1)^n n]{n+1+\cos(n)}$ **(h)** $a_n = \left(100+\dfrac{1}{n}\right)^2$

Lösung zu Aufgabe 3.6.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(3n^2-1)(5n^3+3)}{(n^2-1)(n^2+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{15n^6+30n^5...}{n^6+2n^4...} = \lim_{n\to\infty} \frac{15+\frac{30}{n}+...}{1+\frac{2}{n^2}+...} = 15$$

(b)

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}\right| \leq \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(c) Wegen $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+r}\right)^{bn+c} = \exp(ab) \qquad (a,b,c,r \in \mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+2} = \exp(3)$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} n^2 - n2n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

(e) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1$$

(g) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+(-1)^n n]{n+1+\cos(n)} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+(-1)^n n]{n+1+\cos(n)} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n} = 1$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+(-1)^n n]{n+1+\cos(n)} = 1.$$

(h)

$$\lim_{n\to\infty}\left(100+\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(100+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(100+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(100+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(100+\frac{1}{n}\right) = 100\cdot 100 = 10\,000$$

Aufgabe 3.7.
Untersuchen Sie die Monotonie der nachstehenden Folgen:

(a) $a_n := n$ **(b)** $b_n := n^k \ (k \in \mathbb{N})$ **(c)** $c_n := \sqrt{n}$ **(d)** $d_n := \dfrac{1}{n}$

Lösung zu Aufgabe 3.7.

(a) $a_{n+1} - a_n = (n+1) - n = 1 > 0$, also ist die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (sogar streng) monoton wachsend.

(b) Die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ positiv und (sogar streng) monoton wachsend, denn es gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k} = \frac{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^j n^{k-j}}{n^k} = \frac{n^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 1^j n^{k-j}}{n^k} > \frac{n^k}{n^k} = 1.$$

(c) Die Folge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine (sogar streng) monoton wachsende Folge, denn es gilt
$c_{n+1} - c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$,
weil sowohl Zähler als auch Nenner positiv sind.

(d) Wegen $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1$ ist die Folge $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ (sogar streng) monoton fallend.

Aufgabe 3.8.
Untersuchen Sie die Monotonie der nachstehenden Folgen:

(a) $a_n = \dfrac{n^2}{2^{n+3}}$ **(b)** $b_n = \dfrac{6n}{n^2+9}$ **(c)** $c_n = \dfrac{n-10}{n}$ **(d)** $d_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1)$ **(e)** $e_n = \dfrac{n!}{5^n}$.

Lösung zu Aufgabe 3.8.

(a) $a_n = \frac{n^2}{2^{n+3}}$ ist wegen $2n + 1 - n^2 = -(n-1-\sqrt{2})(n-1+\sqrt{2})$ und demzufolge

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+4}} - \frac{n^2}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+4}} (n^2 + 2n + 1 - 2n^2) \\ &= \frac{1}{2^{n+4}} (2n + 1 - n^2) \begin{cases} > 0 & \text{für } n = 1, 2 \\ < 0 & \text{für } n \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

bis $n = 3$ streng monoton wachsend und dann streng monoton fallend.

(b) $b_n = \frac{6n}{n^2+9}$ ist wegen $n^2 + 9 \geq 6n \quad \Leftrightarrow \quad (n-3)^2 \geq 0$ durch 1 nach oben beschränkt.
Wegen $9 - n - n^2 \begin{cases} > 0 & \text{für } n = 1, 2 \\ < 0 & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$ und $n^3 + 2n^2 + 10n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{6(n+1)}{(n+1)^2+9}}{\frac{6n}{n^2+9}} = \frac{6(n+1)}{6n} \frac{n^2+9}{(n+1)^2+9} = \frac{n^3+n^2+9n+9}{n^3+2n^2+10n} = 1 + \frac{9-n-n^2}{n^3+2n^2+10n}$$

ist die Folge bis $n = 3$ streng monoton wachsend und danach streng monoton fallend.

(c) $c_n = \frac{n-10}{n}$ ist streng monoton wachsend wegen
$c_{n+1} - c_n = \frac{n+1-10}{n+1} - \frac{n-10}{n} = 1 - \frac{10}{n+1} - \left(1 - \frac{10}{n}\right) = \frac{10}{n} - \frac{10}{n+1} = \frac{10}{n(n+1)} > 0$

(d) $d_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1)$ ist streng monoton fallend wegen

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = a^{-\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[n(n+1)]{a}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \sqrt[n(n+1)]{a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < a.$$

(e) $e_n = \frac{n!}{5^n}$ ist wegen $e_4 = e_5 = \frac{24}{625}$ und

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \frac{n+1}{5} \begin{cases} < 1 & \text{für } n = 1, 2, 3 \\ = 1 & \text{für } n = 4 \\ > 1 & \text{für } n \geq 5 \end{cases}$$

bis $n = 4$ streng monoton fallend und ab $n = 5$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 3.9.
Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad (n \geq 1)$$

auf Monotonie und Beschränktheit!

Lösung zu Aufgabe 3.9.
Die Folge ist beschränkt, da

$$0 \leq a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Weiterhin ist sie auch monoton wachsend, da

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= a_n \underbrace{- \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}_{\geq 0} \\ &\geq a_n. \end{aligned}$$

Somit ist handelt es sich um eine konvergente Folge.

Aufgabe 3.10.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt arithmetisch, wenn es eine Zahl d gibt, sodass $a_n = a_0 + nd$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (d heißt *Differenz*). Eine endliche arithmetische Folge $(a_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ habe die Differenz $d = -2$ und als letztes Glied $a_{N-1} = 17$.

(a) Wie viele Glieder hat die Folge, wenn die Summe aller Glieder 897 beträgt? Welchen Wert hat das erste Glied a_0 ?

(b) Das wievielte Glied hat den Wert 43 , wenn die Folge 50 Glieder hat?

Lösung zu Aufgabe 3.10.

(a) Wir benutzen die Summenformel für ungerade Zahlen, diese lautet:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Wir wissen, dass die Summe 897 betragen soll und die Folge mit 17 endet, demnach gilt

$$\begin{aligned} s_N - s_8 = N^2 - 8^2 &= 897 \\ N^2 &= 961 \\ N &= 31. \end{aligned}$$

Dementsprechend hat die Folge $31 - 8 = 23$ Folgeglieder. Das erste Folgenglied lautet also

$$a_0 = a_{N-1} - (N-1) \cdot d = 17 - ((23-1) \cdot (-2)) = 17 + 44 = 61.$$

(b) Wir wissen, dass $a_{50-1} = 17$. Nun ist das Glied mit den Wert 43 gesucht, dementsprechend muss gelten

$$\begin{aligned} a_{50-1-x} = 17 - (-2) \cdot x &= 43 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Also $a_{36} = 43$.

Aufgabe 3.11.
Es sei

$$a_n := \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

Durch geeignetes Zusammenfassen der Brüche beweise man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 3.11.
Bei genauerem Hinsehen erkennen wir, dass wegen $(n-k)(n-k+1)-2 = (n-k-1)(n-k+2)$

$$\ldots\cdot\left(\tfrac{(n-2)(n-1)-2}{(n-2)(n-1)}\right)\left(\tfrac{(n-1)n-2}{(n-1)n}\right)\left(\tfrac{n(n+1)-2}{n(n+1)}\right)\left(\tfrac{(n+1)(n+2)-2}{(n+1)(n+2)}\right)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\left(\frac{(n-3)\cancel{n}}{\cancel{(n-2)}(n-1)}\right)\left(\frac{\cancel{(n-2)(n+1)}}{\cancel{(n-1)n}}\right)\left(\frac{\cancel{(n-1)(n+2)}}{\cancel{n(n+1)}}\right)\left(\frac{\cancel{n}(n+3)}{(n+1)\cancel{(n+2)}}\right)\cdot\ldots$$

Daher kürzen sich alle hinteren Faktoren systematisch weg und wir müssen uns nur die forderen Faktoren ankucken:

$$\left(\tfrac{3\cdot2-2}{3\cdot2}\right)\left(\tfrac{3\cdot4-2}{3\cdot4}\right)\left(\tfrac{4\cdot5-2}{4\cdot5}\right)\cdot\ldots$$
$$\left(\frac{1\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot3}\right)\left(\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\right)\left(\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cancel{5}}\right)\cdot\ldots$$

Somit bleibt für $n\to\infty$ nur der Term $\frac{1}{3}$ übrig. Alternativ können wir a_n auch explizit als $a_n = \frac{n+2}{3n}$ schreiben und erhalten $a_n = \frac{n+2}{3n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$.

Aufgabe 3.12.
Berechnen Sie, mittels $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n+r})^{bn+p} = e^{ab}$ $(a,b,r,p\in\mathbb{R}$ fest), die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls a_n gleich ist:

(a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$ (b) $a_n = \left(1-(n-2)^{-1}\right)^{n+5}$ (c) $a_n = \left(1-n^{-1}\right)^{-87}\left(1-n^{-1}\right)^{-n}\left(6+n^{-1000}\right)^{-1}$

Lösung zu Aufgabe 3.12.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = e^{\frac{1}{3}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-(n-2)^{-1}\right)^{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+5} = e^{-1}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1-n^{-1}\right)^{-87}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1}\underbrace{\left(1-n^{-1}\right)^{-n}}_{\xrightarrow{n\to\infty}e^1}\underbrace{\left(6+n^{-1000}\right)^{-1}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}e^1$

Aufgabe 3.13.
Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliert ein Lichtstrahl durch Reflexion an den Grenzflächen und durch Inhomogenität des Materials 5% seiner Lichtstärke L .

(a) Wir groß ist die Intensität des Lichtstrahls nach 12 Platten?

(b) Nach wie viel Platten liegt die Intensität des Lichtstrahls bei 25% ?

Lösung zu Aufgabe 3.13.

(a) Nach dem Durchgang durch eine Platte beträgt die Lichtstärke des Lichtstrahls noch 95% . Dementsprechend beträgt die Intensität nach 12 Platten $0.95^{12} \approx 0.5404 \approx 54\%$ der ursprünglichen Lichtstärke. Man könnte das Problem auch als eine rekursiv definierte oder geometrische Folge auffassen, dessen Glieder jeweils der noch verbleibenden Lichtstärke entsprechen. Dann wäre

$$a_0 = 1, \qquad a_n = 0.95\cdot a_{n-1} \qquad \text{oder} \qquad a_n = 0.95^n\cdot a_0.$$

Gesucht wäre dann

$$a_{12} = 0.95\cdot a_{11} = \ldots = 0.95^{12}\cdot a_0 = 0.95^{12}.$$

(b) Um zu errechnen, nach wie vielen Platten die Intensität nur noch bei 25% liegt, müssen wir die folgende Gleichung Lösung:

$$\begin{aligned} 0.95^x &= 0.25 \\ x &= \log_{0.95} 0.25 \\ x &= \frac{\log(0.25)}{\log(0.95)} \\ x &\approx 27.0268. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.14.
Man berechne jeweils den Grenzwert der folgenden Folgen, falls dieser existiert:

(a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 4^n}$ **(b)** $b_n = \sqrt[n]{(-7)^n + 8^n}$ **(c)** $c_n = \sqrt[n]{(-4)^n + 4^n}$

Lösung zu Aufgabe 3.14.

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n \cdot \left(1 + \left(\frac{2^n}{4^n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = 4.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(-7)^n + 8^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n \cdot \left(1 + \left(\frac{(-7)^n}{8^n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} 8 \cdot \sqrt[n]{\left(1 + \left(-\frac{7}{8}\right)^n\right)} = 8.$$

(c) Die Folge konvergiert nicht, sondern hat die beiden Häufungspunkte 0 und 4, denn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(-4)^n + 4^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 4 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Aufgabe 3.15.
Man bestimme die Summe der

(a) ersten 200 natürlichen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest -1 lassen

(b) ersten 30 Potenzen der 3

Lösung zu Aufgabe 3.15.

(a) Wir müssen die Summe der Zahlen $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 599 = \sum_{n=1}^{200} 3n - 1$ berechnen. Es gilt unter Benutzung von $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{n=1}^{200} 3n - 1 = 3 \cdot \sum_{n=1}^{200} n - 1 \cdot 200 = 3 \cdot \frac{200(201)}{2} - 200 = 3 \cdot 20\,100 - 200 = 60\,100.$$

(b) Wir müssen die Summe der Zahlen $3 + 9 + 27 + ... + 3^{30} = \sum_{n=1}^{30} 3^n$ berechen. Es gilt unter Benutzung von $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1, \quad (q \neq 1)$

$$\sum_{n=1}^{30} 3^n = \frac{1 - 3^{31}}{1 - 3} - 1 \approx 3.088 \cdot 10^{14}$$

Aufgabe 3.16.
Mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums zeige man die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{\sin(1)}{2} + ... + \frac{\sin(n)}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k}.$$

Lösung zu Aufgabe 3.16.
Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ und $p \in \mathbb{N}$. Nun gilt

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(k)}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{\sin(k)}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{p}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also existiert auch ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$.

Aufgabe 3.17.
Es sei $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < 1$. Die Folge (a_n) sei für $n \geq 1$ rekursiv durch

$$a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$$

definiert. Man untersuche das Konvergenzverhalten dieser Folge und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert!

Lösung zu Aufgabe 3.17.
Es handelt sich um eine beschränkte Folge, denn sei $a_n = 1 - x$ mit $x \in (0, 1)$ dann gilt

$$a_{n+1} = a_n(2 - a_n) = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2 \in (0, 1).$$

Weiterhin ist die Folge monoton wachsend, denn es gilt

$$a_{n+1} = a_n \underbrace{(2 - a_n)}_{>1} \geq a_n.$$

Somit handelt es sich bei der Folge (a_n) um eine konvergente Folge. Um den Grenzwert auszurechnen setzen wir einfach in die Fixpunktgleichung ein und erhalten

$$g = g(2 - g) \Rightarrow g_1 = 0, \quad g_2 = 1.$$

da der Startwert a_0 in $(0, 1)$ lag und die Folge monoton wachsend war, ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ der gesuchte Grenzwert.

Aufgabe 3.18.
Es sei (a_n) die rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ definierte Folge. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert. Den Grenzwert könnte man heuristisch als

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

schreiben. Berechnen Sie ihn!

Lösung zu Aufgabe 3.18.
Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass (a_n) eine streng monoton wachsende Folge ist, d.h. dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} > a_n$$

<u>IA:</u> $n = 1$

$$a_{n+1} = a_2 = \sqrt{2} > \sqrt{1} = a_1 = a_n$$

<u>IS:</u> $n \to n + 1$
<u>IV:</u> Es gelte $a_{n+1} > a_n$ für ein $n \geq 1$
<u>IB:</u> zu zeigen: $a_{n+2} > a_{n+1}$
<u>Beweis der IB:</u>

$$a_{n+2} = \sqrt{1 + a_{n+1}} \overset{\text{I.V.}}{>} \sqrt{1 + a_n} = a_{n+1}$$

Als nächstes zeigen wir wieder mittels vollständiger Induktion, dass

$$a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>IA:</u> $n = 1$

$$a_n = a_1 = 1 < 2 \qquad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $a_n < 2$
IB: zu zeigen: $a_{n+1} < 2$
Beweis der IB:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \overset{\text{I.V.}}{<} \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$$

Wir wissen jetzt, dass (a_n) streng monoton wachsend und beschränkt ist, dass heißt sie ist konvergent. Somit existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$. Weiterhin sieht man sofort, dass $a_n > 0$ und daher auch $a \geq 0$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+a_n}\right) = \sqrt{1+a}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = a$ aus $(a_{n+1}) = (\sqrt{a_n+1})$ auch

$$a = \sqrt{1+a}$$

oder

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

Als Lösungen erhalten wir

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Da aber $a \geq 0$ folgt

$$a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Die Zahl a wird auch als der goldene Schnitt bezeichnet.

Aufgabe 3.19.

(a) Sei τ die positive Lösung von $x^2 = x+1$ (goldener Schnitt). Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Potenzen von τ die folgende Formel gilt:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt.

(b) Beweisen Sie weiterhin mittels vollständiger Induktion, dass

$$\tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt. Wobei die Folge f_n die Fibonacci-Folge ist, also $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, f_1 = f_2 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3.19.

(a) IA: $n = 2$

$$\tau^2 = \tau + 1 \qquad \checkmark$$

gilt offenbar weil τ Lösung von $x^2 = x+1$ ist
IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$ für ein $n \geq 2$.
IB: zu zeigen: $\tau^{n+1} = \tau^n + \tau^{n-1}$
Beweis der IB:

$$\tau^{n+1} = \tau^n \cdot \tau \overset{I.V.}{=} (\tau^{n-1} + \tau^{n-2}) \cdot \tau = \tau^n + \tau^{n-1}$$

(b) IA: $n = 2$

$$\tau^2 = f_2 \cdot \tau + f_1 = \tau + 1 \qquad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}$ für ein $n \geq 2$.
IB: zu zeigen: $\tau^{n+1} = f_{n+1}\tau + f_n$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
\tau^{n+1} = \tau^n \cdot \tau &\overset{I.V.}{=} (f_n \cdot \tau + f_{n-1}) \cdot \tau \\
&= f_n \cdot \tau^2 + f_{n-1} \cdot \tau \\
&\overset{I.A.}{=} f_n \cdot (\tau + 1) + f_{n-1} \cdot \tau \\
&= \tau(f_n + f_{n-1}) + f_n \\
&= f_{n+1} \cdot \tau + f_n
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.20.
Beweisen Sie, dass die rekursiv durch
$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \qquad a_1 = 1,$$
definierte Folge konvergiert. Beweisen Sie weiterhin, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 3.20.
Wir bilden die beiden Teilfolgen
$$(n_k) = 2k, \qquad (m_k) = 2k - 1.$$
Dann gilt offenbar, dass $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Jetzt sollte man erkennen, dass die Folge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist und die Folge $\{a_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Dies können wir mittels Induktion beweisen

<u>IA:</u> $k = 1$
$$a_{n_2} - a_{n_1} = a_4 - a_2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} < 0$$
<u>IS:</u> $k \to k + 1$
<u>IV:</u> Es gelte $a_{n_k} < a_{n_{k-1}}$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$
<u>Beweis der IB:</u>
$$\begin{aligned}
a_{n_{k+1}} = a_{2k+2} &= 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k}}} \\
&\overset{I.V.}{<} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-2}}} \\
&= 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} \\
&= a_{2k} \\
&= a_{n_k}
\end{aligned}$$

<u>IA:</u> $k = 1$
$$a_{m_2} - a_{m_1} = a_3 - a_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$
<u>IS:</u> $k \to k + 1$
<u>IV:</u> Es gelte $a_{m_k} > a_{m_{k-1}}$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $a_{m_{k+1}} > a_{m_k}$
<u>Beweis der IB:</u>
$$\begin{aligned}
a_{m_{k+1}} = a_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{a_{2k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} \\
&\overset{I.V.}{>} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-3}}} \\
&= 1 + \frac{1}{a_{2k-2}} \\
&= a_{2k-1} \\
&= a_{m_k}
\end{aligned}$$

Weiterhin können wir zeigen, dass die monoton fallende Teilfolge der geraden Folgeglieder von unten durch die monoton wachsende Teilfolge der ungeraden Glieder begrenzt wird. Andersrum trifft dies natürlich auch zu.

<u>IA:</u> $k = 1$
$$a_{n_1} = a_2 = 2 > 1 = a_1 = a_{m_1}$$
<u>IS:</u> $k \to k + 1$
<u>IV:</u> Es gelte $a_{n_k} > a_{m_k}$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $a_{n_{k+1}} > a_{m_{k+1}}$

Beweis der IB:

$$\begin{aligned} a_{n_{k+1}} = a_{2k+2} &= 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k}}} \\ &\overset{I.V.}{>} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} \\ &= 1 + \frac{1}{a_{2k}} \\ &= a_{2k+1} \\ &= a_{m_{k+1}} \end{aligned}$$

Der Satz über die monotone Konvergenz garantiert uns nun, dass beide Teilfolgen konvergieren. Demnach können wir die Fixpunktgleichung aufstellen und es folgt bei beiden Teilfolgen

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \\ a^2 &= a + 1 \\ a_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Wobei die negative Lösung natürlich entfällt, da beide Teilfolgen echt größer Eins waren. Somit erhalten wir $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als Lösung. Da wir mittels unserer beiden Teilfolgen alle $n \in \mathbb{N}$ berücksichtigt haben und beide gegen den selben Grenzwert konvergieren, folgt auch dass die gesamte Folge (a_n) gegen a konvergiert. a ist aber genau der Goldene Schnitt, womit wir alles gezeigt haben.

Aufgabe 3.21.
Es seien Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = a > 0$ und $b_1 = b > 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. (Dieser gemeinsame Grenzwert wird als arithmetisch-geometrisches Mittel bezeichnet.)

Hinweis: Beweisen Sie erst, dass $a_n \geq b_n$, leiten Sie daraus dann die Monotonie/Beschränktheit beider Folgen her und schließlich bilden sie die Differenz und zeigen, dass diese gegen 0 konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 3.21.
Für alle $n \geq 2$ gilt

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \leq \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_n.$$

Dies kann man leicht einsehen, denn für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\geq 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle $n \geq 2$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

und

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$

(a_n) ist für $n \geq 2$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, folglich gegen ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 0$ konvergent. Wir setzen $\alpha_n = a_n - b_n$. Dann gilt für $n \geq 2$, dass $\alpha_n \geq 0$. Wir zeigen durch vollständige Induktion dass für $n \geq 2$

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}\alpha_2.$$

IA: $n = 2$

$$\alpha_n = \alpha_2 = \frac{1}{2^0}\alpha_2 = \frac{1}{2^{n-2}}\alpha_2$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $\alpha_n \leq \frac{\alpha_2}{2^{n-2}}$

IB: $\alpha_{n+1} \le \frac{\alpha_2}{2^{n-1}}$
Beweis der IB:

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\alpha_n - b_{n+1} \le a_n - \frac{1}{2}\alpha_n - b_n = \frac{1}{2}\alpha_n \overset{\text{I.V.}}{\le} \frac{1}{2^{n-1}}\alpha_2.$$

Wegen $0 \le \alpha_n \le \frac{1}{2^{n-2}}\alpha_2$ für $n \ge 2$, folgt $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n) = 0$. Wegen $b_n = a_n + \alpha_n$, gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = a + 0 = a$. Im Ergebnis konvergieren also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert.

Aufgabe 3.22.
Wir definieren rekursiv eine Folge durch $x_1 = \pi$ und

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n(x_n-2)^2}{x_n^2-4x_n+5} & \text{wenn } x_n^2 - 4x_n + 5 \neq 0, \\ \pi & \text{wenn } x_n^2 - 4x_n + 5 = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass alle x_n nichtnegativ sind.
(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.
(c) Beweisen Sie mittels (b), dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Lösung zu Aufgabe 3.22.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \ge 1 > 0.$$

Darum tritt die Bedingung des zweiten Astes nie ein und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n-2)^2}{x_n^2 - 4x_n + 5} = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1}.$$

Da stets $(x_n - 2)^2 \ge 0$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} < 1 \tag{$*$}$$

(a) Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \ge 0$.
IA: $n = 1$

$$x_1 = \pi > 0 \qquad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$
IV: Es gelte $x_n \ge 0$
IB: zu zeigen: $x_{n+1} \ge 0$
Beweis der IB:

$$x_{n+1} = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} \overset{(*)}{\ge} 0$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es folgt wegen $(*)$

$$x_{n+1} = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} < x_n.$$

(c) Folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass (x_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist.
(d) Sei $g \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von (x_n). Dann folgt aus bekannten Grenzwertsätzen

$$g = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x_n \frac{(x_n-2)^2}{(x_n-2)^2+1} = g \frac{(g-2)^2}{(g-2)^2+1},$$

da $(g-2)^2 + 1 \neq 0$. Wäre $g \neq 0$, so wäre

$$1 = \frac{(g-2)^2}{(g-2)^2+1},$$

bzw.

$$(g-2)^2 + 1 = (g-2)^2,$$

also $0 = 1$, Widerspruch. Also ist $g = 0$ und insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

....