Lösungen der Aufgabenserie 4

Aufgabe 4.1

Verwenden als Näherungswert für e die 7. Partialsumme $s_7 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots \dfrac{1}{7!} = 2.718253968$.

Der Fehler ist dann der Reihenrest $r_7 = \dfrac{1}{8!} + \dfrac{1}{9!} + \cdots$. Für $n \geq 8$ gilt aber

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdots n} \leq \frac{1}{5040 \cdot 8 \cdots 8} = \frac{1}{5040 \cdot 8^{n-7}} < \frac{1}{4096 \cdot 8^{n-7}} = \frac{1}{8^{n-3}}$$

Folglich ist $r_7 < \dfrac{1}{8^5} + \dfrac{1}{8^6} + \cdots = \dfrac{1}{8^5} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \dfrac{1}{7 \cdot 8^4} < 10^{-4}$. Der Fehler bei s_7 ist also kleiner als 10^{-4} (exakter Wert $e = 2.718281828$)

Aufgabe 4.2

a) Aus der Gleichung $x = \ln \sqrt{\dfrac{4y+3}{3y-2}}$ folgt

$$e^{2x} = \frac{4y+3}{3y-2} \quad \Rightarrow \quad (3y-2)\, e^{2x} = 4y + 3 \quad \Rightarrow \quad y(3e^{2x} - 4) = 3 + 2\, e^{2x}.$$

Die inverse Funktion ist also $y = \dfrac{3 + 2e^{2x}}{3e^{2x} - 4}$.

b) Da $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist, ergibt sich nach einem Additionstheorem für den Sinus:

$$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\sin x \, \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \, \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Vertauscht man x und y, so erhält man $\frac{x}{\sqrt{2}} = \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$ mit $-\frac{3}{4}\pi \leq y \leq \frac{\pi}{4}$. Da dann $y + \frac{\pi}{4}$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}\, ,\, \frac{\pi}{2}]$ (dem Wertebereich der arcsin-Funktion) liegt, ergibt sich $y + \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}$. Die inverse Funktion ist also $y = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 4.3

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1$

b) $\sinh x \, \cosh x' + \cosh x \, \sinh x' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^{x'} + e^{-x'}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^{x'} - e^{-x'}}{2} = \dfrac{e^{x+x'} - e^{-x-x'}}{2}$
$= \sinh(x + x')$

c) Die Gleichung $y =$arcosh x ist gleichbedeutend damit, dass $\cosh y = x$ und $y \geq 0$ ist. Hieraus folgt $e^y + e^{-y} = 2x$ oder $(e^y)^2 - 2x\, e^y + 1 = 0$. Letzteres ist eine quadratische Gleichung für e^y mit der Lösung $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ (da $e^y \geq 1$ ist). Damit ergibt sich $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Aufgabe 4.4

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + 1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$