Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 4

Wiederholung - Theorie: Reihen

(a) Zu jeder Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet $S_N := \sum\limits_{k=1}^{N} a_k$ die N **-te Partialsumme** der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Die **Reihe** einer zugehörigen Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist die Folge $\{S_N\}_{N=1}^{\infty} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\right\}_{N=1}^{\infty}$ der N -ten Partialsummen.

(c) Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn für die Folge $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ der Partialsummen eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existiert.

Bezeichnung: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

ACHTUNG: Häufig ist mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auch die Reihe selbst gemeint, unabhängig davon, ob sie konvergent ist oder nicht.

(d) Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(e) Konvergenzkriterien für Reihen:

- **Cauchy'sches Konvergenzkriterium:** Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:
  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_\varepsilon$.
- **Majorantenkriterium:** Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- **Leibnizkriterium:** Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.
- **Quotientenkriterium:** Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiterhin gebe es eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- **Wurzelkriterium:** Sei $0 < q < 1$ eine feste Zahl und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkungen:

a) Das Quotienten- und Wurzelkriterium sind Anwendungen des Majorantenkriteriums.
b) Das Cauchy'sche Konvergenzkriterium ist außerdem eine **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe.
c) Eine weitere **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, diese Bedingung ist aber nicht hinreichend (Beispiel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist bestimmt divergent gegen ∞).

....

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 4.1.
Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2}}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ **(c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n^2+1}}$ **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

Lösung zu Aufgabe 4.1.

(a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2}}$ divergiert, denn die notwendige Voraussetzung, dass $e^{\frac{1}{n^2}}$ eine Nullfolge ist, ist nicht erfüllt.

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{R})$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium (absolut), denn es gilt

$$\frac{\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.$$

(c) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n^2+1}}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium (absolut), denn es gilt

$$\frac{\left|e^{-\sqrt{(n+1)^2+1}}\right|}{\left|e^{-\sqrt{n^2+1}}\right|} = e^{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{(n+1)^2+1}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1.$$

Dabei sieht man die letzte Konvergenz wie folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{(n+1)^2+1} &= \frac{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{(n+1)^2+1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{(n+1)^2+1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{(n+1)^2+1}}\\ &= \frac{-2n-1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{(n+1)^2+1}}\\ &= \frac{-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} -1.\end{aligned}$$

(d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium (absolut), denn es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}} = \frac{n!}{n^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \le \frac{2}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.$$

Aufgabe 4.2.
Man berechne folgende Reihensummen!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+e^{-n}\right)$ **(b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$

Lösung zu Aufgabe 4.2.

(a) Wir benutzen, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+e^{-n}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n\\ &= \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}+\frac{1}{1-(\frac{1}{e})}\\ &= \frac{2}{3}+\frac{e}{e-1}.\end{aligned}$$

(b) Wir benutzen unsere Ergebnisse aus der ersten Übungsstunde, dort hatten wir bewiesen, dass wenn

$$a_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) &= \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \log\left(1-\frac{1}{6}\right) + ... + \log\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) + ... \\
&= \log\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot ... \cdot \left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)\cdot ...\right) \\
&= \log\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3.
Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$ **(b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-3n+2}{n+3}$ **(c)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$ **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{2^n}$

Lösung zu Aufgabe 4.3.

(a) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$ konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+3}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} < \infty.$$

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-3n+2}{n+3}$ konvergiert nicht, da das notwendige Kriterium, dass $(-1)^n \frac{n^2-3n+2}{n+3}$ eine Nullfolge sein muss nicht erfüllt ist.

(c) Die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn $\frac{1}{\log(n)}$ ist eine monoton fallende Nullfolge (aufgrund der Monotonie des Logarithmus'). Jedoch konvergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium nicht absolut, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\log(n)}\right| \ge \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{2^n}$ konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\cos(n!)}{2^n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Aufgabe 4.4.
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-2}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5n+2}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1-a^n)$, mit $a \in (0,1)$ (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ wobei $a_n := \begin{cases} 2^n & n \equiv 0 \mod 2, \\ 3^n & n \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 4.4.

(a) Es gilt $\left|\frac{n}{n^3-2}\right| \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, und die Reihe $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert (denn man kann zeigen, dass die zugehörige Folge der Partialsummen monoton wachsend ist und nach oben beschränkt bleibt), also konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-2}$.

Bemerke: Mit dem Quotientenkriterium wäre man wegen

$$\frac{\frac{n+1}{(n+1)^3-2}}{\frac{n}{n^3-2}} = \frac{n^4+n^3-2n-2}{n^4+3n^3+3n^2-n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

zu keiner Aussage gelangt.

(b) Es gilt $\frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$ für $n \to \infty$, also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

(c) Es gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{5n+2}$ eine alternierende Reihe, und da $\frac{1}{5n+1}$ monoton gegen Null konvergiert, liefert das Leibniz-Kriterium die Konvergenz.

(d) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist eine Nullfolge, denn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

und sie ist monoton fallend, denn

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

(e) Die Reihe divergiert, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Somit ist $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ keine Nullfolge, was für die Konvergenz notwendig ist.

(f) Die Reihe divergiert, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Somit ist $(-1)^n(1-a^n)$ keine Nullfolge, was für die Konvergenz notwendig ist.

(g) Es gilt $\sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{2}$, somit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 4.5.

Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+1}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{7k-4}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{2^k}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k3^{-k^2}$ (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+(-1)^{k+1}}$

Lösung zu Aufgabe 4.5.

(a) Bei $a_k = \frac{k}{k^2+1}$ handelt es sich wegen

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k^2+1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}}\right) = \frac{0}{0+1} = 0$$

und wegen

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{k+1}{(k+1)^2+1}}{\frac{k}{k^2+1}} = \frac{(k+1)(k^2+1)}{k((k+1)^2+1)} = \frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+2k^2+2k} < \frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+k^2+k+1} = 1$$

um eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+1}$ konvergent.

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{7k-4}$ divergiert, da

$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k\frac{k}{7k-4} \neq 0$$

und somit das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe verletzt ist.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ konvergiert nach dem Quotienten- und nach dem Wurzelkriterium absolut, denn es gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}}\right| = \frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{k^3+3k^2+3k+1}{k^3}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

bzw.

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} = \sqrt[k]{k^3}2^k = \frac{1}{2}\left(\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1.$$

(d) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k3^{-k^2}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{3^{k^2}}} = \left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3^k}\right)\left(\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\right) = 0\cdot 1 = 0 < 1.$$

(e) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+(-1)^{k+1}}$ divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+(-1)^{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} \overset{n=k+1}{=} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Aufgabe 4.6.
Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

Lösung zu Aufgabe 4.6.

(a) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}$ konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{3^n}{n^4}} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1.$$

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Wobei die letzte Gleicheit unmittelbar aus der Bernoulli-Ungleichung folgt, denn es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}\cdot n = 2.$$

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\cdot n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Aufgabe 4.7.
Untersuchen Sie mit Hilfe der Ihnen bekannten Konvergenzkriterien die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)}{(2n)!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi)}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}4^{-2n}n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$

Lösung zu Aufgabe 4.7.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{(2n)!}$ ist (absolut) konvergent nach dem Quotienten-Kriterium mit $q = \frac{1}{2}$, denn

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)}{(2n)!}} \right| = \frac{n+1}{2(n+1)(2n+1)} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. Die (sogar absolute) Konvergenz dieser Reihe kann gezeigt werden mittels

<u>Variante 1</u>: Anwendung des Leibniz-Kriteriums wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

<u>Variante 2</u>: Anwendung des Quotientenkriteriums mit $q = \frac{1}{2}$, denn

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n}{n!}} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi)}{n}$. Wegen $\cos(2n\pi) = (1)$ und erhalten wir gerade die harmonische Reihe und diese divergiert bekanntermaßen.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{-2n} n$. Wegen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{4^{-2(n+1)}(n+1)}{4^{-2n} n}\right| = \frac{1}{16} \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{8} < 1$ (denn es gilt $\frac{n+1}{n} \leq \frac{n+n}{n} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$) ist hier das Quotientenkriterium anwendbar, womit die Reihe (sogar absolut) konvergiert.

(e) Offensichtlich divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n}$, da bereits das notwendige Kriterium, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n}$ eine Nullfolge sein muss, verletzt ist.

Aufgabe 4.8.
Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^3}{n}$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n-1)^2}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{10} \frac{1}{n} + \sum\limits_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{-n^2}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Lösung zu Aufgabe 4.8.

(a) Hierbei handelt es sich um ein Vielfaches der Harmonischen Reihe, also divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^3}{n} = 10^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(b) Hierbei handelt es sich um eine (absolut) konvergent Reihe, da wir eine konvergente Majorante finden können.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n-1)^2} < 10 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

(c) Hierbei stimmt die Reihe ab dem elften Glied mit der Reihenentwicklung von $\exp(1)$ überein, also ist die Reihe (absolut) konvergent.

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} + \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n!} = c_1 + \exp(1) - c_2 < \infty.$$

(d) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n^2}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium (absolut), da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)^2}}{3^{-n^2}} < \frac{1}{3}.$$

(e) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium (absolut), da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1.$$

(f) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ divergiert nach dem Quotientenkriterium (absolut), da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Aufgabe 4.9.
Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz!

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+4n+5}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

Lösung zu Aufgabe 4.9.

(a) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, da $a_n = \frac{1}{2n+3}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Jedoch konvergiert die Reihe nicht absolut, da wir sie wie folgt mit der harmonischen Reihe abschätzen können.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{2n+3}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} > \frac{1}{20} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, da $a_n = \frac{1}{n^2+4n+5}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Weiterhin konvergiert sie auch absolut, da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{n^2+4n+5}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

(c) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, da $a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Jedoch konvergiert sie nicht absolut, da wir sie wie folgt mit der harmonischen Reihe abschätzen können.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} > \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Aufgabe 4.10.
Man berechne die folgenden Reihensummen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n} + 10^{-n}\right)$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n(n+1)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Lösung zu Aufgabe 4.10.

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n} + 10^{-n}\right) = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{4} + \frac{10}{9} = \frac{67}{36}$$

(b) Zuerst erhalten wir mittels Partialbruchzerlegung, dass

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}\\ &= 1+\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\left((-1)^{n-1}+(-1)^{n}\right)}_{=0}\frac{1}{n}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(c) Wir benutzen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot q^{n-1}=\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty}q^n\right)=\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

(d) Wir benutzen unsere Ergebnisse aus der ersten Aufgabenserie, dort hatten wir bewiesen, dass wenn

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$. Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\log\left(1-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\ldots\\ &= \log\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\ldots\right)\\ &= \log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\\ &= \log\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 4.11.
Bestimmen Sie mittels geometrischer Reihe und Exponentialreihe die folgenden Grenzwerte

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}3^{-2k}$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{7+5^k}{k!}$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{3k}}{(k+1)!}$ (d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{15+9(-7)^k}{11^k}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{3})^n}{2^{n-1}}$

Lösung zu Aufgabe 4.11.

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty}3^{-2k}=\sum_{k=1}^{\infty}9^{-k}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k\right)-1=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}-1=\frac{1}{8}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{7+5^k}{k!}=7\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k!}=7\exp(1)+\exp(5)$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{3k}}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-8)^k}{(k+1)!}=-\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-8)^k}{k!}\right)+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}\exp(-8)+\frac{1}{8}$$

(d)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{15+9(-7)^k}{11^k}=15\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{11^k}+9\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-7}{11}\right)^k=15\frac{1}{1-\frac{1}{11}}+\frac{9}{1+\frac{7}{11}}=\frac{33}{2}+\frac{11}{2}=22$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{2^{n-1}} = \sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{n-1}}{2^{n-1}} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

Aufgabe 4.12.
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen unter Verwendung der Reihenentwicklung der geometrischen und der Exponentialreihe!

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$

Lösung zu Aufgabe 4.12.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 2,1933$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 \cdot \exp(2) \approx 14,7781$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} = 3^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{10}{3}$

....