Lösungen der Aufgabenserie 5

Aufgabe 5.1

a) Es gilt $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x+2)} = \dfrac{x-1}{x}$ für $x \neq 0$, $x \neq -2$. Folglich ist $x=0$ eine Polstelle (denn $f(x) \to \mp\infty$ für $x \to \pm 0$), während $x=-2$ eine hebbare Unstetigkeit ist ($f(x) \to 3/2$ für $x \to -2$).

b) $x = 0$ ist eine Oszillationsstelle

c) Die einzige kritische Stelle von $f(x)$ ist $x = 0$. Sei (x_n) eine Folge, die gegen 0 strebt, dann gilt wegen $|f(x_n)| \leq |x_n|$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Folglich ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, der Grenzwert stimmt also mit dem Funktionswert an der Stelle $x = 0$ überein. Dies bedeutet, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ und damit überall stetig ist.

Aufgabe 5.2

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-(x+h)^2}{h\,x^2(x+h)^2} = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \;\Rightarrow\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{2}{x^3}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 5.3

a) $$y' = \frac{\left(e^x + \frac{1}{x}\right)\sin x - (e^x + \ln x)\cos x}{\sin^2 x}$$

b) $$y' = \frac{1}{e^x + e^{-x} - 2}\cdot(e^x - e^{-x}) = \frac{(e^{x/2}+e^{-x/2})(e^{x/2}-e^{-x/2})}{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2} = \frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} = \coth\frac{x}{2}$$

c) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x^2)}}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x = \frac{x}{(1+x^4)\sqrt{\arctan(x^2)}}$$

d) $$y = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)\Big) \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{1}{\cos x}$$

Aufgabe 5.4

a) $$f^{(n)}(x) = \frac{m!}{(m-n)!}\,a^n\,(ax+b)^{m-n}$$

b) $$f'(x) = \frac{b}{(ax+b)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2ab}{(ax+b)^3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,n!\,a^{n-1}\,b}{(ax+b)^{n+1}}$$