Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 5

Wiederholung - Theorie: Allgemeines zu Funktionen

- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn für alle $x_1, x_1 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch immer folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$.
- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
- Eine reellwertige Funktion f auf einer Menge X ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet.
- Die Menge X wird auch als Definitionsbereich bezeichnet.
- Die Menge $f(X) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}$ wir auch als Wertebereich bezeichnet.
- Man schreibt auch $f : X \to \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$.
- Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt. Analog für monoton fallend.
- Sei $f : X \to \mathbb{R}$ injektiv. Die Vorschrift f^{-1} , die jedem $y \in f(Y)$ sein Urbild x zuordnet, heißt die Umkehrfunktion zu f .
$$f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}, f^{-1}(f(x)) = x$$
Achtung: f^{-1} ist nicht mit dem Reziproken zu verwechseln.
- Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt auf X , wenn ein $M \in \mathbb{R}$ exisitiert, so dass $|f(x)| < M$ für alle $x \in X$.
- Sei $X \subset \mathbb{R}$, so dass mit $x \in X$ auch $-x \in X$. Dann heißt eine Funktion gerade, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in X$ und ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in X$.
- Die Funktion f heißt Linearkombination der Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ wenn gilt
$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)$$
mit reellen Zahlen $c_1, c_2, ..., c_n$.
- Das Funktionensystem $f_1, f_2, ..., f_n$ heißt linear unabhängig, wenn aus
$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n = 0$$
folgt, dass $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ ist. Andernfalls heißt das Funktionensystem linear abhängig.

Wiederholung - Theorie: Grenzwert einer Funktion

- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ist die symbolische Abkürzung der Aussage, dass für jede gegen den Punkt a konvergente Folge x_n im Definitionsbereich von f die Bildfolge $f(x_n)$ gegen b konvergiert. Den Punkt b nennt man in diesem Fall den Grenzwert von f bei a .
- Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen übertragen sich auf das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen, z.B. gilt
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad ,$$
falls die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ gilt.

....

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 5.1.
Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \ln(x), \qquad f_3(x) = \sqrt{x}, \qquad f_4(x) = x(1-x).$$

Berechnen Sie die folgenden Iterierten

(a) $g_1 = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, **(b)** $g_2 = f_1 \circ f_3 \circ f_4$, **(c)** $g_3 = f_2 \circ f_4 \circ f_1$, **(d)** $g_4 = f_3 \circ f_4 \circ f_1$.

Bestimmen Sie die Definitions- und Wertebereiche von $g_i, i = 1, 2, 3, 4$ und zeichnen Sie die Funktionen.

Lösung zu Aufgabe 5.1.

(a) $g_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto (\ln(\sqrt{x}))^2$

(b) $g_2 : [0,1] \to [0, \frac{1}{4}]$, $x \mapsto (1-x)x$

(c) $g_3 : (-1,0) \cup (0,1) \to (-\infty, \ln(\frac{1}{4}))$, $x \mapsto (\ln(x^2(1-x^2)))$

(d) $g_4 : (-1,1) \to [0, \frac{1}{2}]$, $x \mapsto \sqrt{x^2(1-x^2)}$

Aufgabe 5.2.
Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^2+3}{2x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos(x)}{x+\pi}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x-\sin(2x)}{2x+3\sin(4x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{falls } x \neq 3 \\ 0 & \text{falls } x = 2 \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 5.2.

(a)
$$\lim_{x\to 2} \frac{5x^2+3}{2x+2} = \frac{23}{6}.$$

(b) Mittels einmaliger Anwendung von l'Hospital gilt:
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{8x^3-18x^2+2x}{1} = -8.$$

Man kann den Grenzwert mittels Polynomdivision auch direkt ausrechnen:
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x^3-4x^2-3x-3 = -8.$$

(c) Die Funktion konvergiert gegen Null, denn es gilt
$$\lim_{x\to -\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x+\pi} - 0 \right| \leq \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x+\pi} = 0.$$

(d) Mittels einmaliger Anwendung von l'Hospital gilt:
$$\lim_{x\to 0} \frac{6x-\sin(2x)}{2x+3\sin(4x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6-2\cos(2x)}{2+12\cos(4x)} = \frac{4}{14}.$$

Man kann den Grenzwert unter Benutzung von
$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}(x)^{2n+1}$$
auch direkt ausrechnen (mathematisch nicht ganz so exakt, da wir unendlich viele Glieder addieren, man müsste sich also noch überlegen warum man das darf (Restgliedabschätzung)):
$$\lim_{x\to 0} \frac{6x-\sin(2x)}{2x+3\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x - \left(2x - \frac{(2x)^3}{6} \pm \ldots\right)}{2x + 3\left(4x - \frac{(4x)^3}{6} \pm \ldots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{6 - \left(2 - \frac{2^3x^2}{6} \pm \ldots\right)}{2 + 3\left(4 - \frac{4^3x^2}{6} \pm \ldots\right)} = \frac{4}{14}$$

(e)
$$\lim_{x\to 3+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 3-} f(x) = -1.$$

Aufgabe 5.3.
Zeigen Sie direkt mittels Definition des Grenzwertes für Funktionen:

(a) $\lim\limits_{x\to 7}|x-7|=0$ (b) $\lim\limits_{x\to 5}x^3=125$ (c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}x\lfloor\frac{3}{3}\rfloor=3$

Lösung zu Aufgabe 5.3.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n\to 7$ für $n\to\infty$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-7|<\epsilon$ für alle $n\geq N$. Dies bedeutet aber zugleich auch

$$||x_n-7|-0|=|x_n-7|<\epsilon$$

für alle $n\geq N$. Somit konvergiert die Folge $(|x_n-7|)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ gegen Null. Also folgt aus $x_n\to 7$ sogleich auch $|x_n-7|\to 0$ für $n\to\infty$, wie behauptet.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5$, dann gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

$$\lim_{n\to\infty}x_n^3=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=5\cdot 5\cdot 5=125.$$

Also folgt aus $x_n\to 5$ auch $x_n^3\to 125$ für $n\to\infty$, was zu zeigen war.

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty}x_n=2$ mit $x_n\neq 2$ für alle n . Dann folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n^2-4}{x_n-2}\right)=\lim_{n\to\infty}(x_n+2)=2+2=4.$$

Also folgt aus $x_n\to 2$ auch $\frac{x_n^2-4}{x_n-2}\to 4$ für $n\to\infty$, was zu zeigen war.

(d) Wegen der Einschließung

$$\frac{3}{x}-1<\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor\leq\frac{3}{x}$$

gilt für $x>0$ demzufolge auch die Einschließung

$$3-|x|=3-x<x\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor\leq 3$$

und für $x<0$

$$3+|x|=3-x>x\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor\geq 3.$$

Somit folgt aus $|x|<\epsilon$ schon $|x\lfloor\frac{3}{x}\rfloor-3|<\epsilon$.

Aufgabe 5.4.
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

(a) $f_1(x)=x^2$ mit $x\in\mathbb{R}_0^+$, **(b)** $f_2(x)=3x+5$ mit $x\in\mathbb{R}$, **(c)** $f_3(x)=\sqrt[3]{2x-2}$,

(d) $f_4(x)=\ln(x^2+1)$, **(e)** $f_5(x)=a^{x+3}$, **(f)** $f_6(x)=\exp(3x+5)$

Lösung zu Aufgabe 5.4.

(a) $f_1^{-1}(y)=\sqrt{y}$, **(b)** $f_2^{-1}(y)=\dfrac{y-5}{3}$, **(c)** $f_3^{-1}(y)=\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{2}+1$,

(d) $f_4^{-1}(y)=\sqrt{\exp y-1}$, **(e)** $f_5^{-1}(y)=\log_a(y)-3$, **(f)** $f_6^{-1}(y)=\ln(y)^{\frac{1}{3}}-\dfrac{5}{3}$.

Aufgabe 5.5.
Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen und zeichnen Sie jeweils die Ausgangsfunktion und die Umkehrfunktion in einem Bild

(a) $f(x) = \ln(3x+5)+2, \qquad x > -\frac{5}{3}$

(b) $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2+2}, \qquad x \geq 0$

Lösung zu Aufgabe 5.5.

(a)
$$f^{-1}(y) = \frac{\exp(y-2)-5}{3}$$

(b)
$$g^{-1}(y) = \operatorname{arsinh}(y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

(c)
$$h^{-1}(y) = \sqrt{y^2-2}$$

Aufgabe 5.6.
Prüfen Sie welche der folgenden Funktionen ungerade, bzw. gerade sind

(a) $f_1(x) = x$, **(b)** $f_2(x) = x^2$, **(c)** $f_3(x) = \exp(|x|)$, **(d)** $f_4(x) = \log(|x-1|)$, **(e)** $f_5(x) = \sqrt{x}$.

Lösung zu Aufgabe 5.6.

(a) Offensichtlich gilt, dass $-f_1(x) = -x = f_1(-x)$, daher ist $f_1(x)$ ungerade.

(b) Offensichtlich gilt, dass $f_2(x) = x^2 = f_2(-x)$, daher ist $f_2(x)$ gerade.

(c) Offensichtlich gilt, dass $f_3(x) = \exp(|x|) = f_3(-x)$, daher ist $f_3(x)$ gerade.

(d) Offensichtlich gilt, dass $-f_4(x) = -\log(|x-1|) \neq \log(|-x-1|) = f_(-x)$, und $f_4(x) = \log(|x-1|) \neq \log(|-x-1|) = f_4(-x)$ daher ist $f_4(x)$ weder gerade noch ungerade.

(e) Offensichtlich ist $\sqrt{x}$ nur für nicht negative x definiert, daher kann $\sqrt{x}$ weder gerade noch ungerade sein.

Aufgabe 5.7.
Zerlegen Sie die folgenden Funktionen jeweils in ihren geraden und ungeraden Teil

(a) $f_1(x) = x^2 - 1$, **(b)** $f_2(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$, **(c)** $f_3(x) = \exp(x)$, **(d)** $f_4(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Lösung zu Aufgabe 5.7.

(a)
$$f_1^g(x) = x^2 - 1, \qquad f_1^u(x) = 0$$

(b)
$$f_2^g(x) = 2x^2 + 1, \qquad f_2^u(x) = 3x^3 - x$$

(c)
$$f_3^g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad f_3^u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(d)
$$f_4^g(x) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad f_1^u(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Aufgabe 5.8.
Zerlegen Sie die folgenden Funktionen jeweils in ihren geraden und ungeraden Teil

(a) $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad x \in (-1,1)$

(b) $g(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \frac{x^2+x}{x^3+1}, \qquad x \neq -1$

Lösung zu Aufgabe 5.8.

(a) $f_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$, $f_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$,

(b) $g_u(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x$, $g_g(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

(c) $h_u(x) = \frac{x^5-x}{x^6-1}$, $h_g(x) = \frac{x^4-x^2}{x^6-1}$.

Aufgabe 5.9.
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$1, 1+x, 1+x^2, x+x^3$$

linear unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 5.9.
Wir zeigen, dass es keine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2) + \alpha_4(x+x^3) \\ 0 &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_2+\alpha_4)x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \end{aligned}$$

gibt. Aus obigen Gleichungen erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0$$

Offensichtlich hat die Matrix vollen Rang (weil Determinante $= 1$) und daher existiert nur die triviale Lösung. Somit sind die Funktionen linear unabhängig.

Aufgabe 5.10.
Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen linear unabhängig sind

$$f_1(x) = 3x^2 + x + 3, \qquad f_2(x) = x^2 - 5x + 5, \qquad f_3(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

Lösung zu Aufgabe 5.10.
Die Funktionenfamilie $f_i, i = 1,2,3$ ist linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\begin{aligned} \alpha_1(3x^2+x+3) + \alpha_2(x^2-5x+5) + \alpha_3(2x^2+2x+1) &= 0 \\ (3\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3) + x(\alpha_1-5\alpha_2+2\alpha_3) + x^2(3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3) &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung besitzt. Das zugehörige Gleichungssystem lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

Offensichtlich hat die Matrix keinen vollen Rang (weil Determinante $= 0$). Somit besitzt das obige Gleichungssystem Lösungen, die ungleich der trivialen Lsung (z.B. $\alpha_3 = 4, \alpha_2 = 1, \alpha_1 = -3$) sind und die Funktionen sind somit linear abhängig.

Aufgabe 5.11.
Finden Sie mittels Polynomdivision die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen

(a) $p_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

(b) $p_2(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 36x$

(c) $p_3(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 14x - 5$

Lösung zu Aufgabe 5.11.

(a) $p_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$

(b) $p_2(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 36x = (x-3)(x+3)(x-4)x$

(c) $p_3(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 14x - 5 = (x+1)^3(x-5)$

. . . .