Lösungen der Aufgabenserie 6

Aufgabe 6.1

a) Für $f(x)=\sin\frac{5x}{2}$ gilt $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\left(\frac{5}{2}\right)^{2k}\sin\frac{5x}{2}$ und $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\left(\frac{5}{2}\right)^{2k+1}\cos\frac{5x}{2}$. Damit ist $f^{(2k)}(0)=0$ und $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\left(\frac{5}{2}\right)^{2k+1}$. Die Taylorreihe von $f(x)$ ist also

$$\frac{5}{2}x-\frac{1}{3!}\left(\frac{5}{2}\right)^3x^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{5}{2}\right)^5x^5-+\cdots$$

b) Die Funktion $f(x)=\ln(1+2x)$ besitzt die Ableitungen $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\,2^n\,(n-1)!\,(1+2x)^{-n}$. Damit ist $f(0)=0$ sowie $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\,2^n\,(n-1)!$ für $n=1,2,\ldots$. Die Taylorreihe von $f(x)=\ln(1+2x)$ ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2^n}{n}\,x^n=2x-\frac{2^2}{2}\,x^2+\frac{2^3}{3}\,x^3-+\cdots$$

Aufgabe 6.2

Es ist $y'=\frac{1}{3}(x+8)^{-2/3}$, $y''=-\frac{2}{9}(x+8)^{-5/3}$, $y'''=\frac{10}{27}(x+8)^{-8/3}$, $y^{(4)}=-\frac{80}{81}(x+8)^{-11/3}$,
Damit erhält man $y(0)=2,\ y'(0)=\frac{1}{12},\ y''(0)=-\frac{2}{9}\cdot 2^{-5}$, $y'''(0)=\frac{10}{27}\cdot 2^{-8}$, woraus sich die Taylorentwicklung

$$(x+8)^{1/3}=2+\frac{1}{12}\,x-\frac{1}{288}\,x^2+\frac{5}{20736}\,x^3+R_3(x)$$

mit dem Restglied $R_3(x)=-\frac{80}{81}\,(\xi+8)^{-11/3}\,\frac{x^4}{4!}$ ergibt.
Für $x=1$ erhält man den Näherungswert $\sqrt[3]{9}\approx 2+\frac{1}{12}-\frac{1}{288}+\frac{5}{20736}=2.080102238$.
Für den Fehler gilt $|R_3(1)|<\frac{80}{81}\,8^{-11/3}\,\frac{1}{4!}=\frac{10}{243}\cdot 2^{-11}=2,01\cdot 10^{-5}$

Aufgabe 6.3

a) $$=\lim_{x\searrow 0}\frac{(\tan 2x)^{-1}\cdot(1+\tan^2 2x)\cdot 2}{(\tan x)^{-1}\,(1+\tan^2 x)}=\lim_{x\searrow 0}\frac{2\tan x}{\tan 2x}\cdot\frac{1+\tan^2 2x}{1+\tan^2 x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{2\tan x}{\tan 2x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{2(1+\tan^2 x)}{2(1+\tan^2 2x)}=1$$

b) $$=\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(1-x)}{(\ln x)^{-1}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{-(1-x)^{-1}}{-(\ln x)^{-2}\,x^{-1}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{(\ln x)^2}{x^{-1}}\cdot\frac{1}{1-x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{(\ln x)^2}{x^{-1}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{2\ln x\cdot x^{-1}}{-x^{-2}}$$
$$=-\lim_{x\searrow 0}\frac{2\ln x}{x^{-1}}=-\lim_{x\searrow 0}\frac{2x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\searrow 0}2x=0$$

c) $$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+e^x)^{-1}\,e^x}{(1+x^2)^{-1/2}\,x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

d) Es gilt $(\pi-2x)^{\cos x}=e^{(\ln(\pi-2x))\cdot\cos x}$. Hierbei ist

$$\lim_{x\nearrow\pi/2}(\ln(\pi-2x))\cdot\cos x=\lim_{x\nearrow\pi/2}\frac{\ln(\pi-2x)}{(\cos x)^{-1}}=\lim_{x\nearrow\pi/2}\frac{-2(\pi-2x)^{-1}}{(\cos x)^{-2}\sin x}=-\lim_{x\nearrow\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$
$$=-\lim_{x\nearrow\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}=-\lim_{x\nearrow\pi/2}\frac{2\cos x\,(-\sin x)}{-2}=0.$$

Damit ergibt sich $\lim\limits_{x\nearrow\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}=e^0=1$.

Aufgabe 6.4

a) $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ in $[0,4]$, d.h. die Funktion ist monoton wachsend in $[0,4]$. Folglich ist das Maximum gleich $f(4)=3/5$ und das Minimum gleich $f(0)=-1$.

b) $y'=\dfrac{4x-2}{(1+x-x^2)^2}\ \Rightarrow\ y'(x)>0$ für $x>1/2$ und $y'(x)<0$ für $x<1/2$
$\Rightarrow$ wir haben ein relatives (und absolutes) Minimum in $x=1/2$, $f(\frac{1}{2})=3/5$,
das Maximum $f(0)=f(1)=1$ wird in den in den Randpunkten des Intervalls I angenommen
(die Polstellen $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ der Funktion liegen außerhalb von I).