Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 6

Wiederholung - Theorie: Allgemeines zu Funktionen

- Eine Funktion f heißt **stetig** im Punkt a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt, und stetig auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.
- Äquivalent zur Stetigkeit von f im Punkt a ist, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, für das aus $|x-a| \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ folgt.
- Während in der vorigen Definition δ sowohl von ϵ als auch von a abhängen darf, verlangt man für die gleichmäßige Stetigkeit von f auf D die Unabhängigkeit des Wertes δ vom Punkt a: Eine Funktion f heißt gleichmäßig stetig auf $D \subset \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, für das aus $|x-y| \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ folgt (gleichgültig, wo $x, y \in D$ liegen).
- **Zwischenwertsatz:** Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und liegt y zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.
- **Satz vom Maximum und Minimum:** Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch beschränkt und nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.
- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig.
- Wir sprechen von einer **Unstetigkeitsstelle** a, falls der rechts- und linksseitige Grenzwert an der Stelle a nicht übereinstimmen oder einer von beiden nicht existiert.
- Eine **hebbare Unstetigkeitsstelle** liegt vor, wenn die beiden Grenzwert zwar existieren und identisch sind, aber nicht mit dem Funktionswert übereinstimmt.
- Eine **Sprungstelle** liegt vor, wenn die beiden Grenzwerte zwar existieren, aber nicht identisch sind.
- Eine **Polstelle** liegt vor, falls einer der beiden Grenzwerte $\pm\infty$ ist.
- Allgemein spricht man auch von **unbestimmten Unstetigkeitsstellen**, wenn mindestens einer der beiden Grenzwerte nicht existiert.

Wiederholung - Theorie Differenzierbarkeit

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt im Punkt $a \in D$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert
$$f'(a) := \lim_{x\to a; x\in D\setminus\{x\}} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$
existiert, d.h. der Limes des Differenzenquotienten. Der Grenzwert $f'(a)$ heißt die **Ableitung** von f im Punkt a.
Man kann die Ableitung äquivalenterweise auch durch
$$f'(a) = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
definieren.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt in D **differenzierbar**, falls f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist.
- Ob die auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f Werte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat, macht beim Ableiten keinen Unterschied: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ und $f(x) = u(x) + iv(x)$ eine Zerelgung in Realteil $u : D \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v : D \to \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.
- Ist darüberhinaus die Ableitung $f' : x \mapsto f'(x)$ eine stetige Funktion, so nennt man f stetig differenzierbar.
- Eine Funktion f heißt k-mal (stetig) differenzierbar, wenn f' existiert und $(k-1)$-mal (stetig) differenzierbar ist.
- Für differenzierbare Funktionen f, g gelten vielfältige Rechenregeln, unter anderem die Linearität $(af + bg)' = af' + bg'$ (für $a, b \in \mathbb{R}$), die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$, die Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-g'f}{g^2}$ (dort, wo $g \neq 0$) und die Kettenregel $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (bei $f(x)$ im Definitionsbereich von g).
- Ist f differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und hat f nahe x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6.1.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} 1 - ax & \text{für } x < 1 \\ a - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ stetig ?

Lösung zu Aufgabe 6.1.

Es gilt $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} a - x^2 = a - 1$ und $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} 1 - ax = 1 - a$. Die zusammengesetzte Funktion f ist daher genau dann stetig, wenn $a - 1 = 1 - a$ gilt, d.h. wenn $2a = 2$ und somit $a = 1$ ist.

Aufgabe 6.2.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x^2-9} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\} \\ a & \text{für} \quad x = 3 \\ b & \text{für} \quad x = -3. \end{cases}$$

Kann man die Zahlen a und b so bestimmen, dass $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist?

Lösung zu Aufgabe 6.2.

Zwar gilt

$$\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x+3)(x-3)}$$

und daher ist $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \frac{27}{6}$ jedoch existiert der Grenzwert bei $x = -3$ nicht (Polstelle). Deshalb kann man die Funktion nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Aufgabe 6.3.

Bestimme die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, bei denen die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} ax + bx^2 & \text{falls } x > 1 \text{ oder } x < -2 \\ |x| & \text{falls } -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

stetig wird.

Lösung zu Aufgabe 6.3.

Nur die Punkte $x = 1$ und $x = -2$ sind interessant, da die Funktion nahe aller anderen Punkte ein Polynom bzw. die Betragsfunktion ist, und diese Funktionen stetig sind.

Um Stetigkeit auch in den Punkten $x = 1$ und $x = -2$ zu erreichen, muss

$$a \cdot 1 + b \cdot 1^2 = |1|$$

und

$$a \cdot (-2) + b \cdot (-2)^2 = |-2| = 2$$

gelten. Die Gleichungen $a + b = 1$ und $-2a + 4b = 2$ werden aber gerade von $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{2}{3}$ gelöst.

Aufgabe 6.4.

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Funktionen stetig werden.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{für } x < -2, x > 3 \\ |x|, & \text{für } x \in [-2, 3] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{für } x < -5, x > 8 \\ |x|, & \text{für } x \in [-5, 8] \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 6.4.

(a) Wir erhalten die beiden Gleichungen $4-2b+c=2$ und $9+3b+c=3$. Daraus ergibt sich die Lösung $c=-\frac{18}{5}$ und $b=-\frac{4}{5}$.

(b) Wir erhalten die beiden Gleichungen $25-5b+c=5$ und $64+8b+c=8$. Daraus ergibt sich die Lösung $c=-\frac{440}{13}$ und $b=-\frac{36}{13}$.

Aufgabe 6.5.
Wie müssen die Konstanten A und B gewählt werden, damit die folgende Funktion überall stetig wird?

$$f(x) := \begin{cases} -2\sin(x) & \text{falls } x \le -\frac{\pi}{2} \\ A\sin(x)+B & \text{falls } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{falls } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Lösung zu Aufgabe 6.5.
Damit die Funktion f stetig wird, müssen die jeweiligen linken und rechten Grenzwerte mit den Funktionswerten an den entsprechenden Stellen übereinstimmen. Da f auf den Intervallen $\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\infty\right)$ als Komposition stetiger Funktionen selber wieder stetig ist, genügt es die jeweiligen Intervallschnittstellen zu betrachten.

$$\lim_{x\nearrow-\frac{\pi}{2}} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\searrow-\frac{\pi}{2}} f(x) = -A+B, \qquad \lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} f(x) = A+B, \qquad \lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

Somit sind die beiden Gleichungen $-A+B=2$ und $A+B=0$ zu lösen. Die Lösungen lauten dementsprechend $A=-1$ und $B=1$.

Aufgabe 6.6.
Überprüfen Sie mittels der Definition, ob die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind:

(a) $f(x)=x^2$ (b) $g(x)=1/x$ (c) $s(x)=|x|$

Lösung zu Aufgabe 6.6.

(a) Es gilt
$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h} = 2x$$
also ist f differenzierbar in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x)=2x$.

(b) Es gilt
$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$
also ist g differenzierbar in jedem Punkt $x\neq0$ mit Ableitung $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

(c) Da s mit x oder $-x$ in der Nähe jedes Punktes $x\neq0$ übereinstimmt, ist s in jedem Punkt $x\neq0$ differenzierbar. Jedoch ist s nicht im Punkt 0 differenzierbar, da $\lim\limits_{h\to0}\frac{|h|-0}{h}$ nicht existiert, denn $\frac{|h|}{h}=\pm1$, je nachdem ob h positiv oder negativ war.

Aufgabe 6.7.
Bestimme die Ableitung und den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) a^x bei gegebenem $a>0$ (b) $x^2\sinh(x)$ (c) $\tan(x)$ (d) $\exp(\tan(x))\cos^2(x)$

Lösung zu Aufgabe 6.7.

(a) $a^x=e^{x\ln(a)}$ und daher $(a^x)'=e^{x\ln(a)}\ln(a)=\ln(a)a^x$. Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(b) Zunächst gilt $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und daher $\sinh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$. Aus der Produktregel folgt damit

$$\left(x^2 \sinh(x)\right)' = 2x \sinh(x) + x^2 \cosh(x) \quad .$$

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(c)

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

und der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

(d)

$$\begin{aligned}\left(\exp(\tan(x))\cos^2(x)\right)' &= \exp(\tan(x))\frac{1}{\cos^2(x)}\cos^2(x) - \exp(\tan(x))2\cos(x)\sin(x) \\ &= \exp(\tan(x))\left(1 - 2\cos(x)\sin(x)\right)\end{aligned}$$

und der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{n\pi + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 6.8.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = f(x) = x^2$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

(b) Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes P ist.

(c) Vom Punkt $P(x_0, y_0)$ eines Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ wird das Lot auf die Abzissenachse gefällt; der Fußpunkt sei L . Die Tangente an den Graphen von f im Punkt P schneide die Abszissenachse in T . Zeigen Sie, dass $\overline{TL} = 1$ für jeden Punkt P gilt.

Lösung zu Aufgabe 6.8.

(a) Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

(b) Der Anstieg der Tangente im Punkt x_0 ist durch die Auswertung der 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = x_0$ gegeben. Da die erste Ableitung offenbar durch $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ gegeben ist, erhalten wir als Anstieg $m = -\frac{1}{x_0^2}$. Jetzt müssen wir noch den Rest der Tagentengleichung $t(x) = mx + n$ bestimmen, also n . Wir kennen jedoch den Funktionswert der Tangente an der Stelle $x = x_0$. Das heißt wir erhalten die Gleichung $-\frac{1}{x_0} + n = \frac{1}{x_0}$, woraus wir $n = \frac{2}{x_0}$ erhalten.

Der Schnittpunkt der Tangente mit der Ordinate ist durch $t(0) = \frac{2}{x_0}$ gegeben. Der mit der Abzisse durch $2x_0$. Demzufolge lautet der Flächeninhalt des Dreiecks $A = \frac{2}{x_0} \cdot x_0 = 2$, ist also unabhängig von der Wahl des Punktes P .

(c) Wir suchen wieder die Tangentengleichung im Punkt $x = x_0$. Der Anstieg m ist offenbar durch $m = e^{x_0}$ gegeben. Um n zu erhalten lösen wir die Gleichung $e^{x_0}x_0 + n = e^{x_0}$ und erhalten $n = e^{x_0}(1 - x_0)$. Somit lautet die Tangentengleichung

$$t(x) = e^{x_0}x + e^{x_0}(1 - x_0).$$

Um den Schnittpunkt mit der Abzisse zu bekommen setzen wir die Gleichung gleich Null und erhalten als Schnittpunkt $x = x_0 - 1$. Somit hat L die Koordinaten $L = (x_0; 0)$ und T die Koordinaten $T = (x_0 - 1; 0)$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Aufgabe 6.9.

Sei $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$.

(a) Ist $f(x)$ in $x = 0$ differenzierbar?

(b) Ist $f'(x)$ in $x = 0$ stetig?

Lösung zu Aufgabe 6.9.

(a) f ist in $x_0 = 0$ differenzierbar, denn der Differentialquotient an der Stelle $x_0 = 0$ existiert. Um dies zu zeigen benutzen wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \lim_{x\to 0} x = 0$$

und daher

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

(b) Jedoch ist $f'(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. In Aufgabenteil (a) haben wir bereits berechnet, dass wenn f in $x_0 = 0$ stetige wäre, dann muss die Ableitung dort den Wert $f'(0) = 0$ haben. Die Ableitung von f in $\mathbb{R}/\left\{0\right\}$ ist durch

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

gegeben. Damit diese stetig ist, muss per Definition gelten, dass $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Jedoch ist dies nicht korrekt, denn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \left[2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 - \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

existiert nicht, da $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \to 0$ oszilliert.

Aufgabe 6.10.
Überprüfen Sie mittels der Definition, ob die folgenden Funktionen auf ihren Definitionsbereich differenzierbar sind.

(a) $f_1(x) = x^3$ **(b)** $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **(c)** $f_3(x) = \sqrt{x}$ **(d)** $f_4(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

Lösung zu Aufgabe 6.10.

(a) Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2,$$

daher ist $f_1(x) = x^3$ auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{x^4 + 2hx^3 + h^2x^2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{x^4 + 2hx^3 + h^2x^2} \\
&= -\frac{2}{x^3},
\end{aligned}$$

daher ist $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ auf $\mathbb{R}/\left\{0\right\}$ differenzierbar.

(c) Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

daher ist $f_3(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar.

(d) Es gilt unter Benutzung von $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ sowie L'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(h) - \sin(h)\cos(x)}{h\sin(x)\left(\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)\right)} \\
&= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}
\end{aligned}$$

denn $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, da $\sin$ im Punkt 0 die Ableitung $\cos(0) = 1$ besitzt, und $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$, da Cosinus im Punkt 0 die Ableitung $-\sin(0) = 0$ besitzt.
Also ist $f_4(x)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ differenzierbar mit Ableitung $f_3'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Aufgabe 6.11.
Man berechne die Ableitungen der Funktionen:

(a) $\dfrac{1}{(a+bx^2)^3}$ **(b)** $\dfrac{x}{\sin(x)-x\cos(x)}$ **(c)** $e^{\sin(x)}$ **(d)** $\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **(e)** $x^2\cosh(x)$

Lösung zu Aufgabe 6.11.

(a)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(a+bx^2)^3}\right)=\frac{-6bx}{(a+bx^2)^4}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sin(x)-x\cos(x)}\right)=\frac{(\sin(x)-x\cos(x))-x(\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x))}{(\sin(x)+x\cos(x))^2}=\frac{\sin(x)(1-x^2)-x\cos(x)}{(\sin(x)+x\cos(x))^2}$$

(c)

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sin(x)}\right)=e^{\sin(x)}\cos(x)$$

(d)

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(e)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\cosh(x)\right)=2x\cosh(x)+x^2\sinh(x)$$

Aufgabe 6.12.
Bestimmen Sie mittels Rechenregeln zum Differenzieren jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen

(a) $f_1(x)=\ln(\sqrt{1+x^2})$

(b) $f_2(x)=\exp\left(x\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)$

(c) $f_3(x)=(x^2+2)\sqrt{x+1}$

(d) $f_4(x)=\sin(\cos(x))\cdot(x^2+4x+1)$

(e) $f_5(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^3}+\ln(x)}{\exp(4x+\sin(x))}$

Lösung zu Aufgabe 6.12.

(a)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{1+x^2}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left(\exp\left(x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\right)=\exp\left(x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\frac{x}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\frac{(-1)}{x^2}\right)$$

(c)

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+2)(\sqrt{x+1})\right)=2x\sqrt{x+1}+(x^2+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(d)

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(\cos(x))(x^2+4x+1)\right)=\cos(\cos(x))\cdot(-\sin(x))\cdot(x^2+4x+1)+\sin(\cos(x))\cdot(2x+4)$$

(e)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+x^3}+\ln(x)}{\exp(4x+\sin(x))}\right)$$
$$=\frac{\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}-\frac{1}{x}\right)\exp(4x+\sin(x))+\left(\sqrt{1+x^3}+\ln(x)\right)\exp(4x+\sin(x))(4+\cos(x))}{\exp(8x+2\sin(x))}$$

Aufgabe 6.13.
Berechnen Sie für $a > 0$ und $x > 0$ die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dx}a^x$ **(b)** $\frac{d}{dx}x^{(x^a)}$ **(c)** $\frac{d}{dx}x^{(a^x)}$ **(d)** $\frac{d}{dx}x^x$ **(e)** $\frac{d}{dx}x^{(x^x)}$ **(f)** $\frac{d}{dx}(x^x)^x$

Lösung zu Aufgabe 6.13.

(a)
$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\exp(\ln(a^x)) = \frac{d}{dx}\exp(x\ln(a)) = \ln(a)\exp(x\ln(a)) = \ln(a)a^x$$

(b)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{(x^a)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln(x^{(x^a)})\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(x^a\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(\ln(x^a)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(a\ln(x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(a\ln(x)\right)\ln(x)\right)\cdot\left(\exp(a\ln(x))\cdot\frac{a}{x}\cdot\ln(x) + \frac{\exp(a\ln(x))}{x}\right) \\
&= x^{(x^a)}\cdot\left(x^a\cdot\frac{a}{x}\cdot\ln(x) + \frac{x^a}{x}\right)
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{(a^x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln(x^{(a^x)})\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(a^x\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(\ln(a^x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(x\ln(a)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(x\ln(a)\right)\ln(x)\right)\cdot\left(\exp(x\ln(a))\cdot\ln(a)\cdot\ln(x) + \frac{\exp(x\ln(a))}{x}\right) \\
&= x^{(a^x)}\cdot\left(a^x\cdot\ln(a)\cdot\ln(x) + \frac{a^x}{x}\right)
\end{aligned}$$

(d)
$$\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}\exp(\ln(x^x)) = \frac{d}{dx}\exp(x\ln(x)) = (\ln(x)+1)\exp(x\ln(x)) = (\ln(x)+1)x^x$$

(e)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{(x^x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln(x^{(x^x)})\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(x^x\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(\ln(x^x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\exp\left(x\ln(x)\right)\ln(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(x\ln(x)\right)\ln(x)\right)\cdot\left(\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+1)\cdot\ln(x) + \frac{\exp(x\ln(x))}{x}\right) \\
&= x^{(x^x)}\cdot\left(x^x\cdot(\ln(x)+1)\cdot\ln(x) + \frac{x^x}{x}\right)
\end{aligned}$$

(f) Dasselbe wie bei (e), da $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Aufgabe 6.14.
Man ermittle die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x^n}{n} + \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{x^{n-2}}{\sqrt[3]{n-2}}$ **(b)** $f(x) = \left(\dfrac{x^2+7x}{(x-4)^4}\right)^9$

(c) $f(x) = a^{\tan(x)} + \tan(a^x)$ **(d)** $f(x) = x^{\sin(x)}$

Lösung zu Aufgabe 6.14.

(a)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt[3]{n-2}}\right) = x^{n-1} + \sqrt{n-1}\cdot x^{n-2} + \sqrt[3]{(n-2)^2}x^{n-3}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x^2+7x}{(x-4)^4}\right)^9\right) = 9\cdot\left(\frac{x^2+7x}{(x-4)^4}\right)^8\cdot\frac{(2x+7)(x-4)-(x^2+7x)\cdot 4}{(x-4)^5}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(a^{\tan(x)} + \tan(a^x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln\left(a^{\tan(x)}\right)\right)\right) + \left(1+\tan^2(a^x)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\left(\exp(\ln(a^x))\right)\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp(\tan(x)\ln(a))\right) + \left(1+\tan^2(a^x)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\left(\exp(x\ln(a))\right)\right)\\
&= \exp(\tan(x)\ln(a))\left(\ln(a)\left(1+\tan^2(x)\right)\right) + \left(1+\tan^2(a^x)\right)\cdot\left(\exp(x\ln(a))\ln(a)\right)\\
&= a^{\tan(x)}\left(\ln(a)\left(1+\tan^2(x)\right)\right) + \left(1+\tan^2(a^x)\right)\left(a^x\ln(a)\right)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{\sin(x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp(\ln(x^{\sin(x)}))\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\exp(\sin(x)\ln(x))\right)\\
&= \exp(\sin(x)\ln(x))\cdot(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x})\\
&= x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.15.
Aus der Beziehung $1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ leite man eine Formel für die Summe $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$ her. (**Hinweis:** Differenzieren!)

Lösung zu Aufgabe 6.15.
Es gilt

$$\begin{aligned}
1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+...+x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\
&= \frac{-(n+1)x^n\cdot(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}\\
&= \frac{(x^{n+1}-x^n)(n+1)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\
&= \frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.16.
Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve mit der Gleichung $f(x) = \frac{2\cos^2(x)}{1+\tan(x)}$ im Punkt mit den Koordinaten $(0,2)$?

Lösung zu Aufgabe 6.16.
Wir berechnen die erste Ableitung und werten diese bei $x = 0$ aus

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cos(x)(-\sin(x))(1+\tan(x)) - 2\cos^2(x)(1+\tan(x))^2}{(1+\tan^2(x))}, \qquad f'(0) = -2.$$

Die Tangente hat die Form $t(x) = mx + n$. Wir wissen dass $m = -2$ und $n = t(0) = f(0) = 2$. Demnach lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $(0,2)$ wie folgt: $t(x) = -2x + 2$.

. . . .