Lösungen der Aufgabenserie 7

Aufgabe 7.1
Wir bestimmen die Minimalstelle der Funktion $f(x) = \text{Abstand}^2 = (x-a)^2 + (y-1)^2 = (x-a)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2$. Offenbar ist $f'(x) = x^3 - 2a < 0$ für $x < \sqrt[3]{2a}$ und $f'(x) > 0$ für $x > \sqrt[3]{2a}$. Folglich ist die Stelle $x = \sqrt[3]{2a}$ relative und absolute Minimalstelle von $f(x)$, der Punkt mit den Koordinaten $x = \sqrt[3]{2a}$, $y = \sqrt[3]{a^2/2}$ auf der Parabel hat also den kleinsten Abstand zu P.

Aufgabe 7.2

a) Die Nullstellen sind $x_1 = 4$ und $x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{13}$, für die Ableitungen erhält man

$$y' = \frac{1}{2} + 18\,\frac{x^2-8}{(x^2+8)^2}, \quad y'' = -\frac{36x(x^2-24)}{(x^2+8)^3}.$$

Hierbei ist $y' = \dfrac{x^4+52x^2-224}{2(x^2+8)^2} = \dfrac{(x^2-4)(x^2+56)}{2(x^2+8)^2}$ genau dann ≤ 0, wenn $x^2-4 \le 0$, d.h. $-2 \le x \le +2$, ist. In diesem Intervall ist die Funktion monoton fallend, in den Intervallen $(-\infty, -2]$ und $[2, \infty)$ ist sie monoton wachsend. Hieraus ergibt sich, dass $x = -2$ eine relative Maximalstelle und $x = 2$ eine relative Minimalstelle ist.
Offenbar ist $y'' \ge 0$ genau dann, wenn $x(x^2-24) \le 0$. Dies ist in den Intervallen $(-\infty, -\sqrt{24}]$ und $[0, \sqrt{24}]$ der Fall. Dort ist die Funktion also konvex. In den Intervallen $[-\sqrt{24}, 0]$ und $[\sqrt{24}, \infty)$ ist sie konkav. Die x-Werte 0 und $\pm\sqrt{24}$ sind Wendestellen.
Da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{18x}{8+x^2} = 0$ ist, ist die Gerade $y = \dfrac{x}{2} + 1$ eine Asymptote für $x \to \pm\infty$.

b) Nullstellen sind $x = 0$ und $x = 8$. Aus der Darstellung $y = -\dfrac{x^2+4x+12}{2} + \dfrac{6^3}{(x-6)^2}$ (Polynomdivision) ergibt sich

$$y' = -x - 2 - \frac{2\cdot 6^3}{(x-6)^3} = -\frac{x^2\big((x-8)^2+8\big)}{(x-6)^3}, \quad y'' = -1 + \frac{6^4}{(x-6)^4}.$$

Offenbar ist $y' > 0$ für $x < 6$, dort ist die Funktion monoton wachsend. Für $x > 6$ ist sie monoton fallend. Es gibt keine Extremalstellen ($x = 6$ ist eine Polstelle).
Es gilt $y'' > 0$ genau dann, wenn $|x-6| < 6$ und $x \ne 6$. Dies ist in den Intervallen $[0, 6)$ und $(6, 12]$ der Fall, wo die Funktion konvex ist. In den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[12, \infty)$ ist sie konkav. Die x-Werte 0 und 12 sind Wendestellen. An der Polstelle haben wir die vertikale Asymptote $x = 6$.

Aufgabe 7.3
Stellt man die Formel für T nach g um, dann erhält man $g = f(T) = 4\pi^2\, l\, T^{-2}$. Nach der Formel für den relativen Fehler ist daher

$$\left|\frac{\Delta g}{\tilde g}\right| \le \left|\frac{f'(\tilde T)}{f(\tilde T)}\right| |\Delta T| = \frac{8\pi^2 l \tilde T^{-3}}{4\pi^2 l \tilde T^{-2}}\,|\Delta T| = \frac{2}{\tilde T}\,|\Delta T| \le 0.01\%$$

falls $\dfrac{|\Delta T|}{\tilde T} \le 0.005\%$. Die Schwingungsdauer T muss also mit einem relativen Fehler $\le 0.005\%$ gemessen werden.

Aufgabe 7.4
Da $f'(x) = e^x - 1$ genau dann ≥ 0 ist, wenn $x \ge 0$ ist, ist $f(x)$ is monoton wachsend für $x \ge 0$ und fallend für $x \le 0$. An der Stelle $x = 0$ nimmt die Funktion ihr Minimum $f(0) = -1$ an. Da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ist, hat die Funktion genau eine positive und genau eine negative Nullstelle. Berücksichtigt man, dass die Werte $f(1) = e - 3$ und $f(-1) = \frac{1}{e} - 1$ negativ, die Werte $f(2) = e^2 - 4$ und $f(-2) = e^{-2}$ hingegen positiv sind, so kann man schlussfolgern, dass jeweils eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ in den Intervallen $(-2, -1)$ und $(1, 2)$ liegt. Das Newton-Verfahren liefert nach 3 Iterationen die Näherungswerte $\xi_1 = 1.1488$ und $\xi_2 = -1.8414$.