Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 7

Lokale Extrema, Satz von Rolle, Mittelwertsatz

- Man sagt, in x liegt ein **lokales Maximum**, wenn $f(y) \leq f(x)$ für alle y aus einer Umgebung U von x gilt (analog: **lokales Minimum**).
- **Notwendige Bedingung für lokale Extrema**: Liegt in x ein lokales Maximum/Minimum der differenzierbaren Funktion f, dann gilt $f'(x) = 0$.
- Satz von Rolle:
  Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in $]a,b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.
  - Folgerung (Mittelwertsatz):
    Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $]a,b[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.
- Das Monotonieverhalten wird durch die Ableitung bestimmt:
  - $f' \geq 0$ ist äquivalent dazu, dass f monoton wächst
  - $f' \leq 0$ äquivalent dazu, dass f monoton fällt.
- **Hinreichende Bedingung für lokale Extrema**:
  - Ist $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$, so besitzt f ein lokales Minimum in $x \in]a,b[$, falls außerdem $f''(x) > 0$ (anlog $f''(x) < 0$ für Maxima).
  - Ist $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt neben $f'(x) = 0$ auch noch $f' \leq 0$ links von x und $f' \geq 0$ rechts von x, so liegt in x ein lokales Minimum vor (analog für Maxima).

Konvexität

- Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \Big(0 < \lambda < 1 \implies f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\ \leq\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\Big) .$$

  f heißt **konkav**, falls $-f$ konvex.
- Satz:
  Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff \forall x \in \mathbb{D}\ :\ f''(x) \geq 0$$

Bernoulli- L'Hospitalsche Regel

- Seien $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) zwei differenzierbare Funktionen. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, und es gelte $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to b} g(x)$ (bzw. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to b} g(x)$). Existiert $\lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (auch als uneigentlicher Grenzwert), so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

  (Eine entsprechende Aussage gilt für $x \to a$.)

Taylor-Formel, Taylor-Reihen, Taylor-Polynome

- **Satz [Taylor-Formel]:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x, x_0 \in I$ die Taylorsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

  oder

$$R_{n+1}(x) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))\, d\theta.$$

  Definition: Es heißt $\boxed{T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ das n-te **Taylorpolynom** von f bei x_0.

- **Satz [Lagrange'sche Form des Restgliedes]:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ existiere die n-te Ableitung $f^{(n)} : [a,b] \to \mathbb{R}$, welche stetig sei. Weiterhin existiere die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)} :]a,b[\to \mathbb{R}$ im Inneren. Dann existiert für beliebige $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x und x_0 (oder alternativ ein $\theta \in]0,1[$), so dass die TAYLORsche Formel
$$f(x) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \; + \; R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) \; := \; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
oder $R_{n+1}(x) := \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ gilt. R_{n+1} heißt **Lagrange'sches Restglied**.
- **Definition [Taylor-Reihe]:** Ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $x_0 \in [a,b]$, dann heißt die Potenzreihe
$$T_{f,x_0}(x) \; := \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
die **Taylor-Reihe** oder **Taylor-Entwicklung** von f um den **Entwicklungspunkt** x_0. Der Konvergenzradius muss nicht > 0 sein und auf dem Konvergenzintervall muss T_{f,x_0} auch nicht unbedingt gegen f konvergieren, sondern tut dies nur dann, wenn das Restglied für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
- **Satz [Abelscher Grenzwertsatz]:** Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge und konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gleichmäßig auf $[0,1]$.
- **Satz:**
  - Für alle $|x| < 1$ (und sogar $x = 1$) gilt $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. (**Logarithmus-Reihe**)
  - Für alle $|x| \leq 1$ gilt $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. (**Arcus-Tangens-Reihe**)
  - Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für alle $|x| < 1$ gilt dann $(1+x)^\alpha \; = \; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. (**Binomische Reihe**)

. . . .

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 7.1.
Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen jeweils mittels des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion:

(a) $f_1(x) = \arcsin(x)$ **(b)** $f_2(x) = \arccos(x)$ **(c)** $f_3(x) = \operatorname{arccot}(x)$

Lösung zu Aufgabe 7.1.

(a) Offensichtlich ist $f_1^{-1}(x) = \sin(x)$ und $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$. Somit gilt
$$f_1'(x) = \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass für $y = \arcsin(x)$ gilt dass
$$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}.$$

(b) Offensichtlich ist $f_2^{-1}(x) = \cos(x)$ und $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Somit gilt
$$f_2'(x) = \frac{-1}{\sin\left(\arccos(x)\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass für $y = \arccos(x)$ gilt dass
$$\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}.$$

(c) Offensichtlich ist $f_3^{-1}(x) = \cot(x)$ und $\frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1-\cot^2(x)$. Somit gilt
$$f_3'(x) = \frac{-1}{1+\cot(\operatorname{arccot}(x))} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 7.2.

(i) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die folgenden Funktionen monoton fallend, bzw. monoton wachsend sind!

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) die lokalen Extrema der Funktionen!

(iii) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die folgenden Funktionen konkav, bzw. konvex sind!

(iv) Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktionen!

(a) $f_1(x) = x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 18x + 1$ **(b)** $f_2(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ **(c)** $f_3(x) = e^{2x}(x^2 - 2x - 55)$

Lösung zu Aufgabe 7.2.

(a) Die ersten beiden Ableitungen lauten

$$f'(x) = 3x^2 + 15x + 18 \qquad\qquad f''(x) = 6x + 15$$

(i) Zur Untersucheung der Monotonie setzen wir die 1. Ableitung $= 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 15x + 18 \\ 0 &= x^2 + 5x + 6 \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

somit als kritische Stellen -3 und -2. Da $f'(x)$ stetig ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Monotonie auf die drei Intervalle $(-\infty, -3), (-3, -2)$ und $(-2, \infty)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns jeweils auf beliebige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned} f'(-1000) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton wachsend in } (-\infty, -3) \\ f'\left(-\frac{5}{2}\right) &< 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton fallend in } (-3, -2) \\ f'(1000) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton wachsend in } (-2, \infty) \end{aligned}$$

(ii) Aufgrund des Übergangs der Monotoniearten können wir nun schließen, dass bei $x = -3$ eine lokale Maximalstelle und bei $x = -2$ eine lokale Minimalstelle vorliegt. Dabei handelt es sich aber nicht um globale Extremstellen, da

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

(iii) Zur Untersuchung der Konvexität setzen wir die 2.Ableitung $= 0$ und erhalten

$$0 = 6x + 15 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Da $f''(x)$ stetig ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Konvexität auf die beiden Intervalle $(-\infty, -\frac{5}{2})$ und $(-\frac{5}{2}, \infty)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns auf jeweilige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned} f''(-1000) &< 0 \quad \Rightarrow \text{f ist konkav in } \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \\ f''(1000) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist konvex in } \left(-\frac{5}{2}, \infty\right) \end{aligned}$$

(iv) Aufgrund des Wechsels bei der Konvexität liegt bei $-\frac{5}{2}$ eine Wendestelle vor.

(b) Die ersten beiden Ableitungen lauten

$$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1, \qquad\qquad f''(x) = 4\cos(x) \cdot (-\sin(x))$$

(i) Zur Untersucheung der Monotonie setzen wir die 1. Ableitung $= 0$ und erhalten

$$0 = 2\cos^2(x) - 1 \quad \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2},$$

somit als kritische Punkte $\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$. Da $f'(x)$ stetig und 2π-periodisch ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Monotonie auf die vier Intervalle $\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ und

$\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns jeweils auf beliebige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned} f'(0) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton wachsend in } \left(\frac{(8k-1)\pi}{4}, \frac{(8k+1)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\ f'(\frac{\pi}{2}) &< 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton fallend in } \left(\frac{(8k+1)\pi}{4}, \frac{(8k+3)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\ f'(\pi) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton wachsend in } \left(\frac{(8k+3)\pi}{4}, \frac{(8k+5)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\ f'(\frac{3\pi}{2}) &< 0 \quad \Rightarrow \text{f ist monoton fallend in } \left(\frac{(8k+5)\pi}{4}, \frac{(8k+7)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(ii) Aufgrund des Übergangs der Monotoniearten können wir nun schließen, dass bei $\left\{\frac{(4k+1)\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ jeweils eine lokale Maximalstelle und bei $\left\{\frac{(4k+3)\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ jeweils eine lokale Minimalstelle vorliegt. Dabei ist jede lokale Extremstelle zugleich auch globale Extremstelle, da f 2π-periodisch ist.

(iii) Zur Untersuchung der Konvexität setzen wir die 2.Ableitung $= 0$ und erhalten

$$0 = 4\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \Rightarrow x \in \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Da $f''(x)$ stetig und 2π-periodisch ist, können wir uns bei der weiteren Untersuchung der Konvexität auf die vier Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ und $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ beschränken. Aufgrund der Stetigkeit können wir den ZWS anwenden und uns auf jeweilige Vertreter der Intervalle beschränken.

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &< 0 \quad \Rightarrow \text{f ist konkav in } \left(\frac{4k\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\ f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist konvex in } \left(\frac{(4k+1)\pi}{4}, \frac{(4k+2)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) &< 0 \quad \Rightarrow \text{f ist konkav in } \left(\frac{(4k+2)\pi}{4}, \frac{(4k+3)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\ f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) &> 0 \quad \Rightarrow \text{f ist konvex in } \left(\frac{(4k+3)\pi}{4}, \frac{(4k+4)\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(iv) Aufgrund des Wechsels bei der Konvexität liegen bei $x \in \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ jeweils Wendestellen vor.

(c) Es ergeben sich für die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f'(x) = 2e^{2x}(x-8)(x+7) \quad , \qquad f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 - 113) \quad .$$

(i) Es ist $2e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und als nach oben geöffnete Parabel ist

$$(x-8)(x+7) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in [-7, 8] \\ > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-7, 8] \end{cases} .$$

Demnach ist f monoton fallend in $[-7, 8]$ (denn dort ist die Ableitung nichtpositiv) und monoton wachsend in $]-\infty, -7]$ bzw. in $[8, \infty[$ (denn dort ist die Ableitung nichtnegativ).

(ii) Wiederum ist $4e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und als nach oben geöffnete Parabel ist

$$x^2 - \frac{113}{2} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in \left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right] \\ > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right] \end{cases} .$$

Demnach ist f konkav in $\left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right]$ (denn dort ist die zweite Ableitung nichtpositiv) und konvex in $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{113}{2}}\right]$ bzw. in $\left]\sqrt{\frac{113}{2}}, \infty\right[$ (denn dort ist die zweite Ableitung nichtnegativ).

(iii) Aus dem Monotonieverhalten der Funktion folgt:

- Bei $x = -7$ besitzt f ein lokales Maximum mit Wert $f(-7) = 8e^{-14}$.
- Bei $x = 8$ besitzt f ein lokales Minimum mit Wert $f(8) = -7e^{16}$.
- Weitere lokale Extremstellen besitzt die Funktion nicht, da alle Punkte des Definitionsintervalls innere Punkte sind und $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{-7, 8\}$.

Da $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 > -7e^{16} = f(8)$, folgt:

- Die Funktion f besitzt in 8 ein globales Minimum mit Wert $f(8) = -7e^{16}$.
- Die Funktion f besitzt keine weiteren globalen Extremstellen.

(iv) Aus dem „Wölbungsverhalten"der Funktion folgt:

- Bei $-\sqrt{\frac{113}{2}}$ und $\sqrt{\frac{113}{2}}$ besitzt f Wendepunkte.
- Die Funktion besitzt keine weiteren Wendepunkte, da alle Punkte des Definitionsintervalls innere Punkte sind und $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \left\{-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right\}$.

Aufgabe 7.3.

(a) Man bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad x \in [-2, 2]$$

(b) Sind die folgenden Funktionen in der Umgebung von $x_0 = 0$ konkav oder konvex?

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 3 \qquad g(x) = \arctan(x+1)$$

Lösung zu Aufgabe 7.3.

(a) Die ersten beiden Ableitungen sind gegeben durch

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 \qquad f''(x) = 6x + 4.$$

Setzen wir die erste Ableitung Null, so erhalten wir die kritischen Punkte

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} \\ x_{1,2} &= -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Somit bekommen wir als Kandidaten für lokale Extrema $x_1 = -1$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$. Wegen

$$f''(-1) = -6 < 0, \qquad f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 > 0$$

handelt es sich bei $x_1 = -1$ um ein lokale Maximumstelle und bei $x_2 = -\frac{1}{3}$ um eine lokale Minimumstelle. Weiterhin handelt es sich wirklich nur um lokale Extremstellen, da

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

(b) Um zu erkennen, ob eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion konvex oder konkav ist, können wir die 2. Ableitung bilden. Diese lauten

$$f''(x) = 6 > 0$$

und

$$g'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} \qquad g''(x) = \frac{-2(x+1)}{(1+(1+x)^2)^2} \qquad g''(0) = \frac{-2}{4} < 0$$

Dementsprechend ist die Funktion $f(x)$ bei $x_0 = 0$ konvex und die Funktion $g(x)$ bei $x_0 = 0$ konkav.

Aufgabe 7.4.

(a) Man beweise die Ungleichung $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.

Hinweis: Man wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf $f(x) = \ln(1+x)$ an.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

die k-te Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ ist.

Lösung zu Aufgabe 7.4.

(a) Sei $a = 0$ und $b = x$. Offenbar ist $f(x) = \ln(1+x)$ stetig in $[a; b]$ und differenzierbar in (a, b). Daher existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a, b) = (0, x)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi}.$$

Weil $\xi \in (0, x)$ folgt daraus, dass

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi} > \frac{x}{1+x},$$

sowie

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi} < x.$$

(b) IA: $k = 1$

$$\frac{d\ln(x+1)}{dx} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \checkmark$$

IS: $k \to k+1$
IV: Es gelte $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ für ein $k \geq 1$.
IB: zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k (k)!(1+x)^{-k-1}$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \frac{d^{k+1}\ln(x+1)}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\frac{d^k \ln(x+1)}{dx^k} &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}\right) \\ &= (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot (-k) \cdot (1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^k (k)!(1+x)^{-k-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5.
An den Ecken einer rechtwinkligen Platte mit den Seiten a und b seien 4 gleichgroße Quadrate ausgeschnitten. Aus der verbleibenden kreuzförmigen Figur werde eine (offene) Schachtel hergestellt, deren Höhe gleich der Seitenlänge der ausgechnittenen Quadrate ist. Man bestimme diejenige Seitenlänge der Quadrate, für welche die Schachtel das größte Volumen hat!

Lösung zu Aufgabe 7.5.
Die zu maximierende Funktion ist gegeben durch

$$f(x) = \text{ Höhe } \cdot \text{Länge } \cdot \text{ Breite } = x(a-2x)(b-2x) = x(ab - 2ax - 2bx + 4x^2) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + (ab)x.$$

Leiten wir diese zweimal ab, so folgt

$$f'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab, \qquad f''(x) = 24x - 4(a+b).$$

Setzen wir nun die erste Ableitung gleich Null, so ergeben sich als Lösung

$$\begin{aligned} f'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab &= 0 \\ x^2 - \frac{1}{3}(a+b)x + \frac{ab}{12} &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{(a+b)}{6} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{36} - \frac{3ab}{36}} \\ x_{1,2} &= \frac{(a+b)}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{a^2 - ab + b^2}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $f''(x) > 0$ für $x > \frac{(a+b)}{6}$ und $f''(x) < 0$ für $x < \frac{(a+b)}{6}$. Da $x_2 = \frac{(a+b)}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{a^2 - ab + b^2} < \frac{(a+b)}{6}$ liegt in x_2 ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 7.6.
Welcher Punkt auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$ hat zu $(1; 1)$ den minimalsten Abstand?

Lösung zu Aufgabe 7.6.
Für das Quadrat der Distanzfunktion gilt

$$\text{dist}^2(x) = (x-1)^2 + (x^{\frac{3}{2}} + 1 - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^3.$$

Um das Minimum zu finden bilden wir die 1.Ableitung und erhalten

$$(\mathrm{dist}^2)'(x) = 2x - 2 + 3x^2 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right).$$

Dies setzen wir $=0$ und erhalten mittels quadratischer Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1+6}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Logischerweise entfällt die negative Lösung und es beibt $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ als Lösung übrig. Dies ist wirklich ein Minimum, denn es gilt

$$(\mathrm{dist}^2)''(x) = 6x + 2, \qquad (\mathrm{dist}^2)''\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right) > 0$$

Aufgabe 7.7.
Es soll ein Tunnel mit möglichst großen Umfang entstehen. Dabei setzt sich der Tunnelquerschnitt aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis zusammen. Der Flächeninhalt soll als konstant angenommen werden. Wie groß ist das Rechteck zu wählen?

Lösung zu Aufgabe 7.7.
Der Flächeninhalt ist gegeben durch

$$A = A(a,r) = a \cdot 2r + \frac{r^2\pi}{2}$$

und der Umfang durch

$$U(a,r) = 2r + 2a + r\pi.$$

Die Formel für den Flächeninhalt stellen wir nach a um und erhalten

$$a = \frac{A}{2r} - \frac{r\pi}{4}.$$

Dies setzen wir in die Funktion für den Umfang ein und erhalten

$$U(a,r) = U(r) = 2r + \frac{A}{r} - \frac{r\pi}{2} + r\pi = 2r + \frac{A}{r} + \frac{r\pi}{2}.$$

Dies leiten wir nach r ab und setzen die Ableitung $=0$, also

$$U'(r) = 2 - \frac{A}{r^2} + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Somit lautet die Lösung

$$r = \sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}.$$

Dementsprechend hat das Rechteck Seitenlängen von $2 \cdot \sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}$ und $\frac{A}{2\sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}} - \frac{\sqrt{\frac{A}{2+\frac{\pi}{2}}}\,\pi}{4}$.

Aufgabe 7.8.
Unter allen Rechtecken von gegebenen Unfang l ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 7.8.
Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist durch

$$A(a,b) = ab$$

gegeben, der Umfang durch

$$U(a,b) = l = 2a + 2b.$$

Da der Umfang gegeben ist, stellen wir einfach nach der Seite a um und setzen das Ergebnis in die Formel für den Flächeninhalt ein. Dann bestimmen wir davon die Ableitung und setzen diese $=0$.

$$A(b) = \frac{lb - 2b^2}{2}, \qquad \frac{dA(b)}{db} = \frac{l-4b}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{l}{4}$$

Also erhalten wir insgesamt, dass $a = b = \frac{l}{4}$. Das Ergebnis ist also immer ein Quadrat. Dass es sich wirklich um ein Maximum handelt folgt aus

$$\frac{d^2}{db^2} A(b) = -2 < 0.$$

Aufgabe 7.9.
Welche Punkte (x, y) der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ haben vom Punkt $(1; 0)$ die kleinste Entfernung?

Lösung zu Aufgabe 7.9.
Die Distanzfunktion ist offensichtlich durch

$$\operatorname{dist}^2(x) = (x-1)^2 + (1+x^2) = 2x^2 - 2x + 2$$

gegeben. Leiten wir diese ab und setzen dies dann $= 0$, dann erhalten wir

$$\frac{d\operatorname{dist}^2(x)}{dx} = 4x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir für die y -Koordinate $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Dass es sich wirklich um ein Minimum handelt folgt aus

$$\frac{d\operatorname{dist}^2}{dx^2} = 4 > 0.$$

Aufgabe 7.10.
Sei $f(x) := (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$.

(a) Berechnen Sie für den Graphen dieser Funktion f die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte!

(b) In welchen Intervallen ist f konvex bzw. konkav?

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-2, 8]$. Geben Sie alle für diese Darstellung verwendeten Eigenschaften an und begründen Sie diese!

Lösung zu Aufgabe 7.10.
Zu ersteinmal berechnen wir die ersten 3 Ableitungen von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(-x^2 + 1) \\ f''(x) &= e^{-x}(x^2 - 2x - 1) \\ f'''(x) &= e^{-x}(-x^2 + 4x - 1) \end{aligned}$$

(a) Der Schnittpunkt mit der Ordinate (y-Achse) ist durch $(0, f(0)) = (0, 1)$ gegeben. Der Schnittpunkt mit der Abzisse (x-Achse) ist als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ definiert:

$$f(x) = \underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{(x+1)^2}\underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0.$$

Somit ist der Schnittpunkt (eigentlich handelt es sich um einen Berührungspunkt) durch $(-1, 0)$ gegeben. Um eine Menge von Stellen zu erhalten, die als Extremstellen in Frage kommen (kritische Stellen), setzen wir die 1. Ableitung Null:

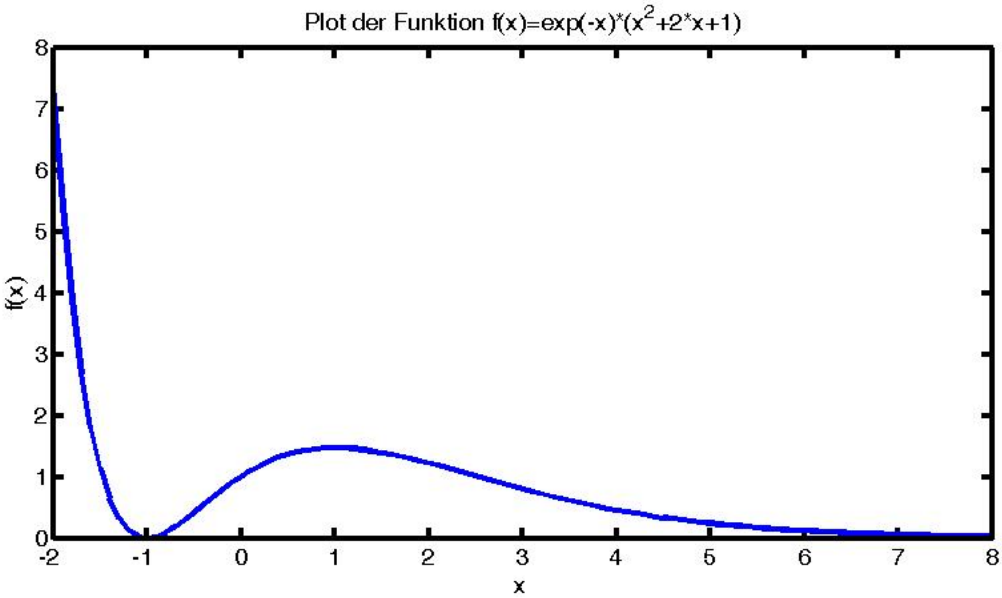
$$f'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0}\underbrace{(-x^2 + 1)}_{(x-1)(x+1)} = 0$$

Demnach kommen als kritische Stellen $x_{1,2} = \pm 1$ in Frage. Um die Art des Extremums zu bestimmen, setzen wir in die 2. Ableitung ein und erhalten

$$f''(1) = e^{-1}(1 - 2 - 1) = -2e^{-1} < 0, \qquad f''(-1) = e^{1}(1 + 2 - 1) = 2e^{1} > 0.$$

Daher liegt im Punkt $(1, f(1)) = (1, 4e^{-1})$ ein lokales Maximum und bei $(-1, 0)$ ein lokales Minimum vor. Um die Menge der Kandidaten zu bestimmen, die als Wendepunkte in Frage kommen, setzen wir die 2. Ableitung Null

$$f''(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}} \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})} = 0$$



Somit kommen $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$ als Kandidaten für die Wendestellen in Frage. Damit dies auch wirklich der Fall ist, setzen wir in die 3. Ableitung ein und erhalten $f'''(1 \pm \sqrt{2}) \neq 0$. Somit liegen bei

$$\left(1+\sqrt{2}, \left((1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2}) + 1\right) e^{-1-\sqrt{2}}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(1-\sqrt{2}, \left((1-\sqrt{2})^2 + 2(1-\sqrt{2}) + 1\right) e^{-1+\sqrt{2}}\right)$$

jeweils Wendepunkte vor.

(b) Um das Krümmungsverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir die Ergebnisse aus der ersten Teilaufgabe genauer und studieren die zweite Ableitung. Als kritische Punkte haben wir $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$ berechnet. Weil f eine $C^\infty(\mathbb{R})$ Funktion ist, kann sich nur an diesen beiden Stellen das Krümmungsverhalten ändern. Da bei $x = 1$ eine lokale Maximumstelle vorliegt, muss die Funktion im Intervall $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ konkav sein. Da wir auch schon verifiziert hatten, dass bei $x_{3,4}$ Wendestellen liegen und sich dort das Krümmungsverhalten ändert, folgt, dass f in den Intervallen $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ und $(1+\sqrt{2}, \infty)$ konvex sein muss.

(c) Die Begründung der Skizze ist offensichtlich und steht in den beiden vorangegangenen Aufgabenteilen.

Aufgabe 7.11.
Man beweise mittels vollständiger Induktion die LEIBNIZsche Produktregel

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Lösung zu Aufgabe 7.11.
<u>IA:</u> $n = 1$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f^{(1)}(x) g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x) g^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)} g^{(k)}$$

<u>IS:</u> $n \to n+1$
<u>IV:</u> Es gelte $(f \cdot g)^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} f^{(j-k)} g^{(k)}$ für alle $j \leq n$.
<u>IB:</u> zu zeigen: $(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$

Beweis der IB:

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(n+1)} &= \frac{d}{dx}\left((f\cdot g)^{(n)}\right)\\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n+1-k)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n+1-k)}g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k+1)}\\
&= f^{n+1}g + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(n+1-k)}g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}g^{(k)} + fg^{(n+1)}\\
&\overset{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}g^{(k)} + f^{n+1}g + fg^{(n+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}g^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.12.
Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweise man die Ungleichung

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Aufgabe 7.12.
Sei $a = 0$ und $b = x$ ($x > -1$). Offenbar ist $f(x) = \ln(1 + x)$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) . Daher existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a, b) = (0, x)$ (für $x \in (-1, 0)$ dreht sich das Intervall natürlich um, jedoch ändert das nichts an der Vorgehensweise) mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{1 + \xi}.$$

Weil $\xi \in (0, x)$ folgt daraus, dass

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + \xi} \geq \frac{x}{1 + x},$$

sowie

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + \xi} \leq x \qquad \forall x > -1.$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, ändert sich die Relation beim exponieren nicht und es folgt

$$1 + x \leq e^x \qquad \forall x > -1.$$

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ positiv bleibt, gilt weiter

$$1 + x \leq 0 \leq e^x \qquad \forall x \leq -1.$$

Alternativ kann man den Mittelwertsatz auch dirket auf e^x im Intervall $(0, x)$ anwenden.

Aufgabe 7.13.
Sie sollen möglichst materialsparend zylindrische Konservendosen produzieren. Wie müssen Sie den Durchmesser und die Höhe des Zylinders einstellen, damit Sie möglichst wenig Blech verbrauchen (minimale Oberfläche), um ein vorgegebenes Dosenvolumen von genau einem Liter zu erreichen.

Lösung zu Aufgabe 7.13.
Sei die Stärke des Blechs durch die Konstante $a > 0$ gegeben (wir nehmen vereinfacht an, dass das Blech überall gleich stark ist). Dann ist das Volumen durch

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

gegeben. Die Oberfläche ist durch

$$A = 2 \cdot (r+a)^2 \cdot \pi + h \cdot \pi \cdot 2(r+a)$$

gegeben. Da das Volumen ein Liter betragen soll, setzen wir dies in die Gleichung für das Volumen ein und formen nach h um:

$$h = \frac{1}{r^2\pi}.$$

Dies setzen wir in die Gleichung für die Oberfläche ein, welche wir minimieren wollen und erhalten

$$A(r) = 2 \cdot (r+a)^2\pi + \frac{2(r+a)}{r^2} = 2\pi r^2 + 4\pi ar + 2a^2\pi + \frac{2}{r} + \frac{2a}{r^2}$$

Um hiervon das Minimum zu finden, bilden wir die erste Ableitung und setzen diese Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}A(r,a) = 4\pi r + 4\pi a - \frac{2}{r^2} - \frac{4a}{r^3} &= 0 \\ \pi r^4 + a\pi r^3 - \frac{1}{2}r - a &= 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung ohne Computer schwer zu lösen ist, vernachlässigen wir die Materialstärke und setzen $a = 0$. Wir erhalten dann als Lösungen $r = 0$ und $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. Offensichtlich scheidet $r = 0$ als Lösung schonmal aus. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}A(r,a) = 4\pi + \frac{4}{r^3} + \frac{12a}{r^4}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, 0\right) = 4\pi + 8\pi < 0.$$

liegt dort eine lokale Minimumstelle vor. Die Höhe der Ummantelung der Dose ist dementsprechend durch

$$h = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2 \pi} = \frac{1}{\left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

gegeben. Die Einheit von r und h ist jeweils Dezimeter, da $1l \equiv 1(dm)^3$.

Aufgabe 7.14.
Für welche Punkte P der Parabel $y^2 = 2px$ ist das vom Berührungspunkt P bis zur *Leitlinie*, der Geraden $x = -\frac{p}{2}$, betrachtete Stück der Tangente in P ein Minimum?

Lösung zu Aufgabe 7.14.
Wir betrachten das Problem für $p > 0$ und somit $x \geq 0$, da wir das Problem ansonsten an der x -Achse spiegeln könnten. Weiterhin genügt es nur einen der beiden Äste der Parabel zu betrachten, da es sich bezüglich der y -Achse ebenfalls um ein symmetrisches Problem handelt. Der Punkt P hat somit die Koordinaten $P = \left(x_P, \sqrt{2px_P}\right)$. Die Steigung der Tangente $t(x) = mx + n$ an diesem Punkt ist durch

$$m = \frac{p}{\sqrt{2px_P}} = \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}}{\sqrt{x_P}}$$

gegeben. Der absolute Anteil n ist wegen

$$t(x_P) = \frac{p}{\sqrt{2px_p}}x_p + n = \sqrt{2px_P} \qquad \text{durch} \qquad n = \sqrt{2px_P} - \frac{px_P}{\sqrt{2px_P}} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{px_P} = \sqrt{\frac{p}{2}x_P}$$

gegeben. Somit lautet die Tangentengleichung

$$t(x) = \sqrt{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x_P}}x + \sqrt{x_P}\right).$$

Der Schnittpunkt mit der Leitline ist wegen

$$t\left(-\frac{p}{2}\right) = \sqrt{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x_P}}\left(-\frac{p}{2}\right) + \sqrt{x_P}\right) = *,$$

durch $S = \left(-\frac{p}{2}, *\right)$ gegeben. Nun berechnen wir den Abstand der beiden Punkte P und S und minimieren diesen.

$$\begin{aligned}
A^2(x_P) &= \left(x_P + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2px_P} - \sqrt{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x_P}}\left(-\frac{p}{2}\right) + \sqrt{x_P}\right)\right)^2 \\
&= x_P^2 + px_P + \frac{p^2}{4} + \left(\sqrt{px_P}\left(\sqrt{2} + \frac{p}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot x_P} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \\
&= x_P^2 + px_P + \frac{p^2}{4} + px_P\left(\frac{2x_P + p}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot x_P}\right)^2 \\
&= x_P^2 + px_P + \frac{p^2}{4} + px_P\left(\frac{4x_P^2 + 4px_P + p^2}{8x_P^2}\right) \\
&= x_P^2 + px_P + \frac{p^2}{4} + \frac{1}{2}px_P + \frac{1}{2}p^2 + \frac{p^3}{8x_P}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_P}A^2(x_P) &= 2x_P + p + \frac{1}{2}p - \frac{p^3}{8x_P^2} \\
&= \left(x_P + \frac{p}{2}\right)\left(x_P^2 + \frac{1}{4}px_P - \frac{p^3}{8}\right) \\
&= \left(x_P + \frac{p}{2}\right)\left(x_P + \frac{p}{2}\right)\left(x_P - \frac{1}{4}p\right).
\end{aligned}$$

Die beiden negativen Lösungen scheiden aus, da wegen $p > 0$ auch $x \geq 0$ sein muss. Wegen

$$\frac{d^2}{dx_P^2}A^2(x_P) = 2 + \frac{p^3}{4x_P^3}, \qquad \frac{d^2}{dx_P^2}A^2\left(\frac{p}{4}\right) > 0$$

liegt dort auch ein lokales Minimum vor. Die Koordinaten der Punkte lauten also $P_1 = \left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ und wegen der Symmetrie $P_2 = \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$. Für $p = 0$ ist nichts zu zeigen, da die Parabel dann zu einem Punkt degeneriert.

Aufgabe 7.15.
Berechnen Sie nach geeigneter Umformung mit der Regel von L'Hospital (Bernoulli-L'Hospital)

(a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$ **(d)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)\tan(x)$ **(e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ für $a \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 7.15.

(a) Wegen $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x} = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow 0}(-\ln(x)) = \infty$ folgt nach Anwendung der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln(x) = -\lim_{x\searrow 0}\frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Regel von L'Hospital}}{=} -\lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\searrow 0} x = 0 .$$

(b) Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt nun sofort

$$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0}\exp\left(\ln\left(x^x\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\searrow 0}\left(x\ln(x)\right)\right) = \exp(0) = 1 .$$

(c) Durch zweimalige Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)} = \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

wegen $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(2\cos(x) - x\sin(x)) = 2$.

(d) Wiederum durch Anwenden der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi - 2x}{\cot(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\frac{1}{(\sin(x))^2}} = \frac{-2}{-1} = 2 .$$

(e) Es gilt zunächst $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \;=\; e^{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} \;=\; e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} \;=\; 0$ und

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \;=\; \lim_{t\to 0}\ln(1+t\cdot a) \;=\; \ln(1+0\cdot a) \;=\; \ln(1) \;=\; 0$$

ist die Regel von L'Hospital anwendbar, so dass aufgrund von

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \;=\; \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \;\overset{\text{Regel von L'Hospital}}{=}\; \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot a\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \;=\; a$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

Aufgabe 7.16.
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$ c) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x-10}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\cot x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot(x)-\frac{1}{x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to -0}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\arctan x$ l) $\lim\limits_{x\to +0}(\cot x)^{\sin x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ n) $\lim\limits_{x\to +0}(2^x-1)^{\sin x}$

Lösung zu Aufgabe 7.16.

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

(c)

$$\lim_{x\to 10}\frac{\lg(x)-1}{x-10} = \lim_{x\to 10}\frac{\frac{1}{x\ln(10)}}{1} = \frac{1}{10\ln(10)}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{1} = a-b$$

(e)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-x^2-8x+12} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{3x^2-2x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{6x-2} = \frac{1}{5}$$

(f)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

(g)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

(h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)}{2x\sin(x) + x^2\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - x\cos(x)}{2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) - \cos(x) + x\sin(x)}{2\cos(x) + 4\cos(x) - 4x\sin(x) - 2x\sin(x) - x^2\cos(x)} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(i)

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \exp\left(\frac{1}{1-x}\ln(x)\right) = 1,$$

wobei die letzte Gleichheit aus

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\ln(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^2}{x} = 0$$

folgt.

(j)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

(k)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\arctan(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{2\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{2xx^2-(1+x^2)2x}{x^4}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+x^2)x\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)x\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}{1+x^2} = \pm 1
\end{aligned}$$

und daher undefiniert.

(l)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^{\sin(x)} = \exp\left(\sin(x)\ln\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\right) = 1,$$

wobei die letzte Gleicheit aus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)\frac{-1}{\sin^2(x)}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 0$$

folgt.

(m)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x - xe^x} = \frac{1}{2}$$

(n)

$$\lim_{x\to 0}(2^x - 1)^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\sin(x)\ln(2^x - 1)\right) = 1,$$

wobei die letzte Gleichheit aus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\frac{1}{\ln(2^x-1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{-\ln(2)2^x}{\ln^2(2^x-1)\cdot(2^x-1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)\ln^2(2^x-1)\cdot(2^x-1)}{\ln(2)2^x} = 0$$

folgt.

Aufgabe 7.17.
Man entwickle die Funktion $f(x) = 2x - \ln(1+2x)$ in eine TAYLOR-Reihe nach Potenzen von x.

Lösung zu Aufgabe 7.17.
Für die ersten beiden Ableitungen gilt

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{1+2x}, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(x) = \frac{(-2)^2}{(1+2x)^2}, \qquad f''(0) = (-2)^2.$$

Mittels Induktion lässt sich zeigen, dass $f^{(n)}(x) = \frac{(-2)^n(n-1)!}{(1+2x)^n}$ und daher $f^{(n)}(0) = (-2)^n(n-1)!$. Für das Taylorpolynom folgt

$$T(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n.$$

Der Konvergenzradius beträgt $R = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 7.18.
Man entwickle die Funktion $f(x) = \cosh(x)$ in eine Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$

(a) direkt durch die Berechnung der Ableitungen,

(b) unter Verwendung der TAYLOR-Reihe für e^x.

Man bestimme insbesondere das Restglied und zeige, dass dies für $n \to \infty$ gegen Null strebt!

Lösung zu Aufgabe 7.18.
Die n-te Ableitung von $\cosh(x)$ ist durch

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cosh(x)) = \begin{cases} \sinh(x) & \text{falls } n = 2k-1 \\ \cosh(x) & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

gegeben. Somit gilt für die Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$

$$T_{\cosh,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Andererseits gilt

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Für das $(N+1)$-te Restglied (nach Lagrange) und festes $x \in \mathbb{R}, \Theta \in (0,1)$ gilt

$$R_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(\Theta x) x^{N+1}}{(N+1)!} & , N = 2k-1 \\ \frac{\cosh(\Theta x) x^{N+1}}{(N+1)!} & , N = 2k \end{cases} \leq e^{\Theta x} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leq e^{\Theta x} \frac{(ex)^{N+1}}{(N+1)^{N+1}} = e^{\Theta x}\left(\frac{ex}{N+1}\right)^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Für das $(N+1)$-te Restglied (nach Cauchy) und festes $x \in \mathbb{R}, \Theta \in (0,1)$ gilt

$$R_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(\Theta x) x^{N+1}(1-\Theta)^N}{N!} & , N = 2k-1 \\ \frac{\cosh(\Theta x) x^{N+1}(1-\Theta)^N}{N!} & , N = 2k \end{cases} \leq e^{\Theta x} \frac{x^{N+1}}{N!} \leq e^{\Theta x} \frac{x(ex)^N}{N^N} = xe^{\Theta x}\left(\frac{ex}{N}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 0,$$

wobei wir beide male die Ungleichung $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ benutzt haben.

....