Lösungen der Aufgabenserie 8

Aufgabe 8.1

a) Substituiert man $\cos x = t$, dann ist $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, d.h. $\sin x\, dx = -dt$. Somit ergibt sich

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

b) Mit der Substitution $\arctan x^2 = t$ erhält man nach der Kettenregel $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x$, d.h. $\frac{2x}{1+x^4}\, dx = dt$ und damit

$$\int \frac{4x \arctan x^2}{1+x^4}\, dx = \int 2t\, dt = t^2 + C = (\arctan x^2)^2 + C$$

c) Zunächst erhält man mit der Substitution $\ln t = x$ die Gleichung $\int \cos(\ln t)\, dt = \int e^x \cos x\, dx$. Anschließend wenden wir zweimal die Formel der partiellen Integration an und erhalten

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x\, (-\sin x)\, dx \quad \text{und} \quad \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Die beiden letzten Gleichungen kombiniert ergeben $2\int e^x \cos x\, dx = e^x \big(\cos x + \sin x\big) + C$. Somit erhalten wir

$$\int \cos(\ln t)\, dt = \int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}\big(\cos x + \sin x\big) + C = \frac{t}{2}\big(\cos(\ln t) + \sin(\ln t)\big) + C.$$

d) Mit der Substitution $x^2 + 1 = t$ erhält man zunächst $2\int t \ln(t^2+1)\, dt = \int \ln x\, dx$. Setzt man $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, dann erhält man mit der Formel der partiellen Integration

$$\int \ln x\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x \ln x - x + C$$

Das gesuchte Integral ist also gleich $\frac{x}{2}\big(\ln x - 1\big) + C = \frac{t^2+1}{2}\big(\ln(t^2+1) - 1\big) + C$

Aufgabe 8.2

a) $x^5 - 2x^3 + x = x(x^4 - 2x^2 + 1) = x(x^2-1)^2 = x(x-1)^2(x+1)^2$.
$x_1 = 0$ ist einfache, $x_{2,3} = \pm 1$ sind doppelte Nullstellen.

b) Offenbar ist $p(1) = 0$. Division von $p(x)$ durch $(x-1)$ ergibt $x^2 - 4x + 4$, d.h. es ist
$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$.
$x_1 = 1$ ist einfache, $x_2 = 2$ ist doppelte Nullstelle.

Aufgabe 8.3

a) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)\,(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

b) $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})\,(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$

Ein anderer Lösungsweg zu b) besteht darin die komplexen Lösungen der Gleichung $x^4 + 1 = 0$, d.h. die vierten Wurzeln aus -1, zu bestimmen. Wegen $-1 = \cos\pi + i \sin\pi$ sind dies die Zahlen $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, d.h. $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$. Damit erhält man die komplexe Zerlegung

$$x^4 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = (x - x_1)(x - x_2)(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_1).$$

Hierbei ist $(x - x_1)(x - \bar{x}_1) = \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = x^2 - x\sqrt{2} + 1$ und $(x - x_2)(x - \bar{x}_2) = x^2 + x\sqrt{2} + 1$.

Aufgabe 8.4

a) $= \displaystyle\int \left(x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2/3}{x-2} - \frac{1/3}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$

b) $= \displaystyle\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$

c) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung des Integranden lautet (s. Aufgabe 8.3b)

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

Für die Koeffizienten erhält man die Werte $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $d = \frac{1}{2}$. Die Anwendung der Formeln für die Integrale der Partialbrüche aus der Vorlesung liefert dann das Endergebnis

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{8}\sqrt{2}\Big(\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + 2\arctan(x\sqrt{2}+1) + 2\arctan(x\sqrt{2}-1)\Big)$$