Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 8

Partielle Integration, Substitution

- **Partielle Integration:**
  Besitzen $u(x)$, $v(x)$ stetige Ableitungen, dann gilt

$$\int u(x)\; v'(x)\; dx \;=\; u(x)\; v(x) - \int u'(x)v(x)\; dx \quad .$$

- **Substitutionsmethode:**
  Ist $x = \varphi(t)$ bzw. $t = \psi(x)$ die Umkehrfunktion zu $x = \varphi(t)$, dann gilt

$$\int f(x)\; dx \;=\; \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int f(x)\; dx \;=\; \int \frac{f(\varphi(t))}{\psi'(\varphi(t))}\; dt \quad .$$

Partialbruchzerlegung

- Jeder echte Bruch $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $n = \deg(P) < \deg(Q) = m$ und P und Q teilerfremd, dh. mit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$ und $Q(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} b_l x^l$ $(b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R})$, kann eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden; wird der höchste Koeffizient des Nenners b_m auf den Wert 1 gebracht, besitzen die Partialbrüche die Form

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l} \qquad \text{mit} \qquad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

Bei reellen Koeffizienten treten demnach vier Fälle auf:

A: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt nur einfache reelle Wurzeln α_l $(l = 1, \ldots, m)$. Dann besitzt die Zerlegung die Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\prod\limits_{l=1}^{m}(x-\alpha_l)} \;=\; \sum_{l=1}^{m} \frac{A_l}{x-\alpha_l} \qquad \text{mit} \qquad A_l = \frac{P(\alpha_l)}{Q'(\alpha_l)}$$

B: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt mehrfach auftretende reelle Nullstellen, etwa $r < m$ verschiedene reelle Nullstellen α_l $(l = 1, \ldots, r)$ der Mehrfachheit k_l mit $\sum\limits_{l=1}^{r} k_l = m$, dann erfolgt die Zerlegung nach der Formel

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\prod\limits_{l=1}^{r}(x-\alpha_l)^{k_l}} \;=\; \sum_{l=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{l,s}}{(x-\alpha_l)^s}.$$

C: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt neben $r < m$ verschiedenen reellen Nullstellen α_l $(l = 1, \ldots, r)$ der Mehrfachheit k_l mit $\sum\limits_{l=1}^{r} k_l = t < m$ noch $\frac{m-t}{2} (\in \mathbb{N})$ Paare von einfachen komplexen Nullstellen, dann erfolgt die Zerlegung nach der Formel

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} \;&=\; \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\left(\prod\limits_{l=1}^{r}(x-\alpha_l)^{k_l}\right)\left(\prod\limits_{v=1}^{\frac{m-t}{2}}(x^2+p_v x+q_v)\right)} \\ &=\; \sum_{l=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{l,s}}{(x-\alpha_l)^s} + \sum_{v=1}^{\frac{m-t}{2}} \frac{B_v x + C_v}{x^2+p_v x+q_v}.\end{aligned}$$

D: Die Gleichung $Q(x) = 0$ für das Nennerpolynom $Q(x)$ besitzt neben $r < m$ verschiedenen reellen Nullstellen α_l $(l = 1, \dots, r)$ der Mehrfachheit k_l mit $\sum_{l=1}^{r} k_l = t < m$ noch z Paare von komplexen Nullstellen der Mehrfachheit j_v $(v = 1, \dots, z)$ mit $\sum_{v=1}^{z} j_v = \frac{m-t}{2} \in \mathbb{N}$, dann erfolgt die Zerlegung nach der Formel

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\left(\prod_{l=1}^{r} (x-\alpha_l)^{k_l}\right)\left(\prod_{v=1}^{z} (x^2 + p_v x + q_v)^{j_v}\right)} \\ &= \sum_{l=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{l,s}}{(x-\alpha_l)^s} + \sum_{v=1}^{z}\sum_{i=1}^{j_v} \frac{B_{v,i}x + C_{v,i}}{(x^2 + p_v x + q_v)^i}.\end{aligned}$$

- Jede rationale Funktion kann in der Form $P_0(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$ dargestellt werden, wobei P_0, P, Q Polynome sind, $\deg(P) < \deg(Q)$ und P und Q teilerfremd. Da die Integration über P_0 trivial ist, betrachten wir nur den echt gebrochenen Teil.
Mit Partialbruchzerlegung (siehe voriger Punkt) wird $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in Summanden der Form

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \tag{1}$$

und

$$\frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^l}, \quad x^2 + px + q \text{ besitzt keine reelle Nullstelle,} \tag{2}$$

wobei $(x-\alpha)^k | Q(x)$ und $(x^2 + px + q)^l | Q(x)$, zerlegt. Die Integration von Funktionen (1) ist trivial. Es bleibt die Integration von Funktionen der Form (2) zu betrachten. Siehe unten.

....

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 8.1.
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int x \sin(x)\ dx$, (b) $\int x \sin(x^2)\ dx$, (c) $\int (\sin x)^2\ dx$.

Lösung zu Aufgabe 8.1.

(a) Partielle Integration liefert

$$\int x\sin(x)\ dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = \sin(x) - x\cos(x) + C.$$

(b) Mit der Substitution $z = x^2$, d.h. $dz = 2x dx$, ergibt sich

$$\int x\sin(x^2)\ dx = \int \frac{\sin(z)}{2} dz = -\frac{\cos(z)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C.$$

(c) Partielle Integration mit $u'(x) = \sin x, u(x) = -\cos x$ und $v(x) = \sin x, v'(x) = \cos x$ führt zu

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^2\ dx &= \int \sin x \sin x\ dx \\ &= -\sin x\cos x + \int (\cos x)^2\ dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \left(1 - (\sin x)^2\right)\ dx.\end{aligned}$$

Umstellen führt zu

$$\int (\sin x)^2\ dx = \frac{x - \sin x\cos x}{2} + C.$$

Aufgabe 8.2.
Man berechne

(a) $\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx$ **(b)** $\int 1\cdot \arctan(x)\,dx$ **(c)** $\int \frac{\cot(\ln(x))}{x}\,dx$ **(d)** $\int x\ln(x+3)\,dx$

Lösung zu Aufgabe 8.2.

(a)

$$\begin{aligned}\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx &= \int (x+2)\sin((x+2)^2-10)\,dx\\ &\overset{y=x+2}{=} \int y\sin(y^2-10)\,dy\\ &= -\frac{1}{2}\cos(y^2-10)\\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)\end{aligned}$$

(b)

$$\int 1\cdot\arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

(c)

$$\int \frac{\cot(\ln(x))}{x}\,dx \overset{y=\ln(x)}{=} \int \cot(y)\,dy = \ln|\sin(y)| = \ln|\sin(\ln(x))|$$

(d)

$$\begin{aligned}\int x\ln(x+3)\,dx &= \int (y-3)\ln(y)\,dy\\ &= \int y\ln(y)\,dy - 3\int \ln(y)\,dy\\ &= \frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{2}\int y\,dy - 3\left(y\ln(y) - \int 1\,dy\right)\\ &= \frac{1}{2}y^2(\ln(y)-\frac{1}{2}) - 3y(\ln(y)-1)\\ &= \frac{1}{2}(x+3)^2(\ln(x+3)-\frac{1}{2}) - 3(x+3)(\ln(x+3)-1)\end{aligned}$$

Aufgabe 8.3.
Berechnen Sie mittels Substitution die Integrale

(a) $\int_{-5}^{0} \frac{6}{1-3x}\,dx$ **(b)** $\int_1^4 3\sqrt{8x-4}\,dx$ **(c)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-7}}$ **(d)** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\,dx$

(e) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx$ **(f)** $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+8}\,dx$ **(g)** $\int_0^1 (6x+3)e^{x^2+x+5}\,dx$ **(h)** $\int_2^5 3e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

Lösung zu Aufgabe 8.3.

(a)

$$\int_{-5}^{0} \frac{6}{1-3x}\,dx \overset{y=1-3x}{=} 6\int_{16}^{1} \frac{1}{y}\frac{dy}{(-3)} = 2\ln(y)\Big|_{1}^{16} = 2\ln(16)$$

(b)

$$\int_{1}^{4} 3\sqrt{8x-4}\,dx \overset{y=8x-4}{=} 3\int_{4}^{28} \sqrt{y}\,\frac{dy}{8} = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{4}\Big|_{4}^{28} = \frac{1}{4}\left(28^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$$

(c)

$$\int \sqrt[3]{5x-7}\,dx \overset{y=5x-7}{=} \int \sqrt[3]{y}\frac{dy}{5} = \frac{3}{20}y^{\frac{4}{3}} = \frac{3(5x-7)^{\frac{4}{3}}}{20}$$

(d)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\,dx \overset{y=x^2+8}{=} \int \frac{\sqrt{y-8}}{\sqrt{y}}\,\frac{dy}{2\sqrt{y-8}} = \sqrt{y} = \sqrt{x^2+8}$$

(e)

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx \overset{y=x^2+4x+7}{=} \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(y) = \ln(x^2+4x+7)$$

(f)

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+8}\,dx \overset{y=x^2-5x+8}{=} \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(y) = \ln(x^2-5x+8)$$

(g)

$$\int_{0}^{1} (6x+3)e^{x^2+x+5}\,dx \overset{y=x^2+x+5}{=} \int_{5}^{7} (6x+3)e^{y}\,\frac{dy}{2x+1} = 3e^{y}\Big|_{5}^{7} = 3(e^7 - e^5)$$

(h)

$$\int_{2}^{5} 3e^{x}\sqrt{e^x+1}\,dx \overset{y=e^x+1}{=} \int_{e^2+1}^{e^5+1} 3\sqrt{y}\,dy = 2y^{\frac{3}{2}}\Big|_{e^2+1}^{e^5+1} = 2\left(\left(e^5+1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(e^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Aufgabe 8.4.
Bestimmen Sie mittels partieller Integration oder Substitution Stammfunktionen zu

(a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x > 0$ **(b)** $g(x) = x\sqrt{1+x^2}$ **(c)** $h(x) = \cos(x)(1 - 2x\sin(x))$

Lösung zu Aufgabe 8.4.

(a) Substituiert man $y = \ln(x)$, so erhält man wegen $dy = \frac{1}{x}dx$ gerade

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx \overset{y=\ln(x)}{=} \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$

(b) Substituiert man $y = 1 + x^2$, so erhält man wegen $dy = 2xdx$ gerade

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx \overset{y=1+x^2}{=} \frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}.$$

(c) Wegen $((\cos(x))^2)' = -2\cos(x)\sin(x)$ gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\int \cos(x)(1-2x\sin(x))\,dx \\
&\qquad = \int \cos(x) - \int 2x\cos(x)\sin(x)\,dx \\
&\qquad = \sin(x) + \left(x(\cos(x))^2 - \int (\cos(x))^2\,dx\right)
\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich mittels partieller Integration

$$\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\,dx$$

und daraus wegen $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ auch

$$2\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + x,$$

also insgesamt

$$\int \cos(x)(1 - 2x\sin(x))\,dx = \sin(x) + x(\cos(x))^2 - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{2}x.$$

Aufgabe 8.5.
(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)}\ -\int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^2 (x^5 - 3x^2 + x - 7)\,dx, \qquad \text{(c)}\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx,$$

(ii) Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an

$$\text{(d)}\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \text{(e)}\ \int r\cos t\,dt, \qquad \text{(f)}\ \int \frac{dx}{2x}, \qquad \text{(g)}\ \int x\sqrt{x}\,dx, \qquad \text{(h)}\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

$$\text{(i)}\ \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx, \qquad \text{(j)}\ \int \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}\,dx, \qquad \text{(k)}\ \int \frac{x^4}{x-1}\,dx, \qquad \text{(l)}\ \int e^{-x}\,dx.$$

Lösung zu Aufgabe 8.5.

(a)

$$-\int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\,dx = -\left(\sin(x)\Big|_{x=\pi}^{x=2\pi}\right) = 0$$

(b)

$$\int_0^2 (x^5 - 3x^2 + x - 7)\,dx = \left(\frac{1}{6}x^6 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7x\Big|_{x=0}^{x=2}\right) = \frac{64}{6} - 8 + 2 - 14 = \frac{-28}{3}$$

(c)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \left(-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

(d)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left(\arctan(x)\Big|_{x=0}^{x=1}\right) = \arctan(1)$$

(e)

$$\int r\cos(t)\,dt = r\sin(t)$$

(f)

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln(2x)$$

(g)

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

(h)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2x^{-\frac{1}{2}}$$

(i)

$$\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln(x)$$

(j)

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}\,dx = \int x + 1 + \frac{3}{x-2}dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln(x-2)$$

(k)

$$\int \frac{x^4}{x-1}\,dx = \int x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1)$$

(l)

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

Aufgabe 8.6.
Man berechne folgende Integrale durch partielle Integration:

(a) $\int x^2 \ln x\,dx$ **(b)** $\int\limits_0^{\pi/2} x \sin x\,dx$ **(c)** $\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx$ **(d)** $\int x^2 \sin x\,dx$,

(e) $\int x \ln x^2\,dx$ **(f)** $\int x\ \arctan(x)\,dx$ **(g)** $\int\limits_1^2 x^{-2} \ln x\,dx$

Lösung zu Aufgabe 8.6.

(a)

$$\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx = -\cos(x)x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\ln(x+1) - \int \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2}{x+1}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int 2x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int x^2\sin(x)dx &= -\cos(x)x^2 + \int 2x\cos(x)\,dx \\
&= -\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx \\
&= -\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x)
\end{aligned}$$

(e)

$$\int x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x^2) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int x\arctan(x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x)
\end{aligned}$$

(g)

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x}\Big|_{x=1}^{x=2} + \int_1^2 \frac{1}{x}\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=2} = -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}$$

Aufgabe 8.7.
Man zerlege in Partialbrüche:

(a) $\dfrac{3x^3 - x^2 + x + 10}{(x^2+2x+2)(x+2)(x-3)}$ (b) $\dfrac{4x^3 - 20x^2 + 25x - 8}{(x-1)(2-x)^3}$

Lösung zu Aufgabe 8.7.

(a) Ansatz:

$$\frac{A+Bx}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3} = \frac{3x^3 - x^2 + x + 10}{(x^2+2x+2)(x+2)(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir nun das folgende lineare GLS

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & -6 & -4 & 6 \\ -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Da das Gleichungssystem per Hand eher aufwendig zu lösen ist, benutzen wir zusätzlich noch die Grenzwertmethode

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to -2} \frac{3x^3 - x^2 + x + 10}{(x^2+2x+2)(x-3)} = \frac{-20}{2\cdot(-5)} = 2 \\ D &= \lim_{x\to 3} \frac{3x^3 - x^2 + x + 10}{(x^2+2x+2)(x+2)} = \frac{85}{17\cdot 5} = 1 \end{aligned}$$

Für die anderen beiden Koeffizienten erhalten wir durch einsetzen in die beiden ersten Gleichungen des GLS, dass $B = 0$ und $A = -3$ sein muss. Sommit lautet die Partialbruchzerlegung

$$\frac{3x^3 - x^2 + x + 10}{(x^2+2x+2)(x+2)(x-3)} = \frac{-3}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

(b) Ansatz:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} = \frac{-4x^3 + 20x^2 - 25x + 8}{(x-1)(x-2)^3}$$

Da das Gleichungssystem per Hand eher aufwendig zu lösen wäre, benutzen wir die Grenzwertmethode

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 1} \frac{-4x^3 + 20x^2 - 25x + 8}{(x-2)^3} = \frac{-4+20-25+8}{-1} = 1 \\ D &= \lim_{x\to 2} \frac{-4x^3 + 20x^2 - 25x + 8}{(x-1)} = \frac{-32+80-50+8}{1} = 6 \\ C &= \lim_{x\to 2} \frac{-4x^3 + 20x^2 - 25x + 8}{(x-1)(x-2)} - \frac{D}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-4x^3 + 20x^2 - 25x + 8 - 6x + 6}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-4x^3 + 20x^2 - 31x + 14}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2 + 12x - 7)(x-2)}{(x-2)(x-2)} \\ &= \frac{-16+24-7}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Um B zu bestimmen kucken wir uns noch mal die Ansatzgleichung an und erkennen, dass $(A+B)x^3 = -4x^3$ gelten muss, womit $B = -5$. Sommit lautet die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{6}{(x-2)^3} = \frac{-4x^3 + 20x^2 - 25x + 8}{(x-1)(x-2)^3}$$

Aufgabe 8.8.
Man berechne

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$$

Lösung zu Aufgabe 8.8.
Wir berechnen das Integral mittels Partialbruchzerlegung. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir nun das folgende lineare GLS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da das Gleichungssystem per Hand eher aufwendig zu lösen ist, benutzen wir zusätzlich noch die Grenzwertmethode

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{x\to -1} \frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2} \\
A &= \lim_{x\to 3} \frac{x}{(x^2+1)(x+1)} - \frac{B}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{2}\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für die anderen beiden Koeffizienten erhalten wir durch einsetzen in letzte und in eine andere Gleichung des GLS, dass $D = \frac{1}{2}$ und $C = -3$ sein muss. Sommit lautet die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Für das gesuchte Integral gilt daher

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = -\int_0^1 \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)} = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 8.9.
Berechnen Sie für die folgenden rationalen Funktionen den Definitionsbereich in $\mathbb{R}$, die reelle Partialbruchzerlegung und eine Stammfunktion. (Führen Sie ggf. eine Probe durch.)

(a) $\frac{1}{x^3-x}$ **(b)** $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ **(c)** $\frac{1}{x^4-1}$

Lösung zu Aufgabe 8.9.

(a) Da $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ die einfachen Nullstellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ besitzt, ergibt sich für die rationale Funktion

$$r_1 := \frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)}$$

der Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ und für die Partialbruchzerlegung der Ansatz

$$r_1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{x+1} \quad .$$

Die Koeffizienten können entweder mittels Koeffizientenvergleich oder einfacher mit der Grenzwertmethode $a_i = \lim\limits_{x \to x_i} (x - x_i) r_1 \quad , \; i = 1, 2, 3$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)(x-1)} &= -1\,, \\ a_2 &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{2}\,, \\ a_3 &= \lim_{x\to -1} \frac{1}{x(x-1)} &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$r_1 = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

mit einer Stammfunktion $R_1 \;=\; -\ln(x) + \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) + \ln(x-1)\right) \;=\; \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

Probe:

$$\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\right)' \;=\; \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} \;=\; \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2} \;=\; \frac{1}{x^3-x}$$

(b) Für die Funktion $r_4 = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ liefert der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

den Koeffizientenvergleich $A(x-3) + B(x-2) = 2x - 1$ mit dem linearen Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{aligned} A + B &= 2, \\ -3A - 2B &= -1 \end{aligned} \right. \qquad \Longrightarrow \quad A = -3,\; B = 5.$$

Eine Stammfunktion R_4 ist demnach

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2-5x+6} &= -3\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-3} \\ &= -3\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C \\ &= \ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-2)^3}\right| + C. \end{aligned}$$

(c) Mit dem Ansatz

$$r_5 \;=\; \frac{1}{x^4-1} \;=\; \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

für die entsprechende Partialbruchzerlegung gelangen wir nach Ausmultiplizieren zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \;=\; \frac{(A+B)x}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{((A+B)x + (A-B))(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)}{x^4-1}, \end{aligned}$$

so dass sich aus dem Koeffizientenvergleich

$$(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D) \;=\; 1$$

demnach das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt, welches die eindeutige Lösung $(A, B, C, D)^T = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2})^T$ besitzt. Somit erhält man eine Stammfunktion

$$R_5 \;=\; \int \frac{dx}{x^4-1} \;=\; \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \;=\; \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan(x) + C.$$

Aufgabe 8.10.
Eine Funktion $f(x)$ heißt *gerade* (bzw. *ungerade*) genau dann, wenn für alle x gilt: $f(x) = f(-x)$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$). f sei über $[-a, a]$ integrierbar. Man zeige

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } f \text{ ungerade} \\ 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{falls } f \text{ gerade} \end{cases}.$$

Lösung zu Aufgabe 8.10.

(a) f sei gerade.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

(b) f sei ungerade.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.11.
Man berechne:

(a) $\int x^2 \ln(x)\,dx$ **(b)** $\int \arcsin(x)\,dx$ **(c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\,dx$

(d) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,dx$ **(e)** $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad (x = \tan(z))$

Lösung zu Aufgabe 8.11.

(a) Mit Hilfe einmaliger partieller Integration folgt

$$\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + c.$$

(b)

$$\int \arcsin(x)\,dx \overset{x=\sin(y)}{=} \int y\cos(y)\,dy = \sin(y)y - \int \sin(y)\,dy = \sin(y)y + \cos(y) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx &= \int \sin(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\,dx \\
&= \int \sin(x)\,dx - \int \sin^3(x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos(x)\sin^2(x) + \frac{2}{3}\cos(x) \\
&= \frac{1}{3}\cos(x)\left(\sin^2(x)-1\right) \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3(x),
\end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ benutzt haben, dass

$$\begin{aligned}
\int \sin^3(x)\,dx &= -\cos(x)\sin^2(x) - \int (-\cos(x))(2\sin(x)\cos(x))\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) + 2\int \cos^2(x)\sin(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) + 2\int \left(1-\sin^2(x)\right)\sin(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) + 2\int \sin(x)\,dx - 2\int \sin^3(x)\,dx \\
&\Rightarrow\ 3\int \sin^3(x)\,dx = -\cos(x)\sin^2(x) - 2\cos(x).
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,dx &\overset{y=2+4x}{=} \frac{1}{4}\int_6^{18} \frac{\frac{y}{4}-\frac{1}{2}}{\sqrt{y}}\,dy \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\int_6^{18}\sqrt{y}\,dy - \int_6^{18}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right]_{y=6}^{y=18} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}(18)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{18} - \frac{1}{6}(6)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{6}\right) \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &\overset{x=\tan(z)}{=} \int \frac{1}{1+\tan^2(z)}\,dz \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}}\,dz \\
&= \int \frac{\cos^2(z)}{\cos^2(z)+\sin^2(z)}\,dz \\
&= \int \cos^2(z)\,dz \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\left(z+\cos(z)\sin(z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan(x)+\cos(\arctan(x))\sin(\arctan(x))\right).
\end{aligned}$$

wobei $(**)$ aus

$$\begin{aligned}\int \cos^2(z)\,dz &= \int \left(1-\sin^2(z)\right)\,dz\\ &= z - \int \sin(z)\sin(z)\,dz\\ &= z+\cos(z)\sin(z) - \int \cos(z)\cos(z)\,dz\\ &\Rightarrow \int \cos^2(z)\,dz = \frac{1}{2}\left(z+\cos(z)\sin(z)\right)\end{aligned}$$

folgt. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\left[\arctan(x)+\cos(\arctan(x))\sin(\arctan(x))\right]_{x=-1}^{x=1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan(1)+\cos(\arctan(1))\sin(\arctan(1)) - \arctan(-1) - \cos(\arctan(-1))\sin(\arctan(-1))\right)\\ &= \arctan(1)+\cos(\arctan(1))\sin(\arctan(1)) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.12.
Man zerlege die rationale Funktion $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{(x+2)^2(x-1)}$ in Partialbrüche.

Lösung zu Aufgabe 8.12.
Wir benutzen den Ansatz

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x-1} = \frac{2x^2-x+1}{(x+2)^2(x-1)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}C &= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{2}{9}.\\ B &= \lim_{x\to -2} \frac{2x^2-x+1}{x-1} = \frac{8+2+1}{-3} = -\frac{11}{3}.\\ A &= \lim_{x\to -2} \frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x+2)} - \frac{B}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{2x^2-x+1+\frac{11}{3}x-\frac{11}{3}}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-1)(x+2)} = \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.13.
Man berechne

$$\int \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)}\,dx.$$

Lösung zu Aufgabe 8.13.
Wir berechnen das Integral mittels Partialbruchzerlegung. Der Ansatz lautet also

$$\frac{Ax+B}{4x^2+1}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{x-2} = \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}C &= \lim_{x\to -3} \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x-2)} = \frac{8(-3)^3+(-3)^2-(-3)+19}{(4(-3)^2+1)(-3-2)} = \frac{-8\cdot 27+9+22}{37\cdot(-5)} = \frac{-185}{-185} = 1,\\ D &= \lim_{x\to 2} \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x+3)} = \frac{64+4+17}{17\cdot 5} = 1,\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\frac{Ax+B}{4x^2+1} &= \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} - \frac{C}{x+3} - \frac{D}{x-2} \\
\frac{Ax+B}{4x^2+1} &= \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-2} \\
\frac{(Ax+B)(x+3)(x-2)}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} &= \frac{8x^3+x^2-x+19-(x-2)(4x^2+1)-(x+3)(4x^2+1)}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} \\
\frac{(Ax+B)(x^2+x-6)}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} &= \frac{8x^3+x^2-x+19-4x^3-x+8x^2+2-4x^3-x-12x^2-3}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} \\
\frac{Ax^3+Ax^2-6Ax+Bx^2+Bx-6B}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)} &= \frac{-3x^2-3x+18}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)},
\end{aligned}$$

also $A=0$ und $B=-3$. Somit lautet die Lösung

$$\begin{aligned}
\int \frac{8x^3+x^2-x+19}{(4x^2+1)(x+3)(x-2)}\,dx &= \int \frac{-3}{4x^2+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2}\,dx \\
&= -3\int \frac{1}{(2x)^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx \\
&= -\frac{3}{2}\arctan(2x) + \ln|x+3| + \ln|x-2| + c.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.14.

(a) Seien $u=f(x)$ und $v=g(x)$ Funktionen, die eine stetige n-te Ableitung haben. Man beweise:

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - ... + (-1)^n \int u^{(n)}v\,dx$$

(b) Welche Vereinfachung ergibt sich, wenn $u^{(n)}=0$ ist?

(c) Man verwende (a) zur Berechnung von $\int\limits_0^\pi x^4\sin(x)\,dx$.

Lösung zu Aufgabe 8.14.

(a) Wir beweisen per vollständiger Induktion.

IA: $n=1 \Rightarrow$ partielle Integration ✓.
IS: $n\to n+1$
IV: Es gelte $\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - ... + (-1)^n\int u^{(n)}v\,dx$.
IB: zu zeigen: $\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - ... + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$
Beweis der IB:

$$\begin{aligned}
\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\,dx &\overset{I.V.}{=} uv^{(n)} - \left(u'v^{(n-1)} - u''v^{(n-2)} + ... + (-1)^n\int u^{(n+1)}v\,dx\right) \\
&= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - ... + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx
\end{aligned}$$

(b) Offensichtlich fällt für $u^{(n)}=0$ der letzte Summand weg. Dies hat aber nicht nur den Vorteil dass ein Summand weniger aufzusummieren ist, sondern dass dann kein Integral mehr berechnet werden muss, was in der Regel sehr schwer ist.

(c) Wir setzen $u(x)=x^4$ und $v^{(5)}(x)=\sin(x)$. Dann folgt

$$\begin{array}{lllll}
u'(x)=4x^3 & u''(x)=12x^2 & u^{(3)}(x)=24x & u^{(4)}(x)=24 & u^{(5)}(x)=0 \\
v^{(4)}(x)=-\cos(x) & v^{(3)}(x)=-\sin(x) & v''(x)=\cos(x) & v'(x)=\sin(x) & v(x)=-\cos(x)
\end{array}$$

Setzen wir dies in die obige Formel ein, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^4\sin(x)\,dx &= \left[x^4(-\cos(x)) - 4x^3(-\sin(x)) + 12x^2\cos(x) - 24x\sin(x) + 24(-\cos(x))\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \left[\cos(x)\left(-x^4+12x^2-24\right) + \sin(x)\left(4x^3-24x\right)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\left(-\pi^4+12\pi^2-24\right) - (-24) = \pi^4 - 12\pi^2 + 48.
\end{aligned}$$