Lösungen der Aufgabenserie 9

Aufgabe 9.1

a) Die Substitution $2x^4 = t$ führt wegen $8x^3\,dx = dt$ auf das Integral

$$\frac{1}{8}\int \frac{dt}{9-t^2} = \frac{1}{48}\int \Big(\frac{1}{t+3} - \frac{1}{t-3}\Big)\,dt = \frac{1}{48}\ln\Big|\frac{t+3}{t-3}\Big| + C = \frac{1}{48}\ln\Big|\frac{2x^4+3}{2x^4-3}\Big| + C$$

b) Bei der Substitution $2\ln x = t$ wird $\frac{2}{x}\,dx = dt$ und damit

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin(2\ln x) + C$$

c) Setzt man $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, dann erhält man mit der Formel der partiellen Integration

$$\int x\cos x\,dx = \int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Aufgabe 9.2

a) Es ist $\sinh x\,\cosh x = \dfrac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$. Mit der Substitution $e^{2x} = t$ (d.h. $2e^{2x}\,dx = dt$ oder $dx = \frac{dt}{2t}$) erhält man

$$\int \frac{dx}{\sinh x\,\cosh x} = \int \frac{2\,dt}{t(t-t^{-1})} = \int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| + C = \ln\Big|\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Big| + C = \ln|\tanh x| + C$$

b) Substitution $\sqrt[6]{x} = t \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$. Folglich ist

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}} = 6\int \frac{t^2}{t^2+4}\,dt = \int \Big(6 - \frac{24}{t^2+4}\Big)\,dt = 6t - 12\arctan\frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} - 12\arctan\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$$

Aufgabe 9.3

a) $I(\mathfrak{Z}_n, f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\,\Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} (\sqrt[n]{a})^{2j}\,\big((\sqrt[n]{a})^j - (\sqrt[n]{a})^{j-1}\big) = \Big(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\Big)\sum_{j=1}^{n}(\sqrt[n]{a})^{3j}.$

Benutzt man die Formel $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} q^j = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$ für die geometrische Reihe mit $q = (\sqrt[n]{a})^3$, dann erhält man

$$I(\mathfrak{Z}_n, f) = \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\sqrt[n]{a}}\,\frac{(\sqrt[n]{a})^3\,\big((\sqrt[n]{a})^{3n}-1\big)}{(\sqrt[n]{a})^3-1} = \frac{(\sqrt[n]{a})^3\,(a^3-1)}{(\sqrt[n]{a})^2 + \sqrt[n]{a} + 1}\,.$$

Hier wurde die Formel $\dfrac{q-1}{q^3-1} = \dfrac{1}{q^2+q+1}$, d.h. $\dfrac{\sqrt[n]{a}-1}{(\sqrt[n]{a})^3-1} = \dfrac{1}{(\sqrt[n]{a})^2 + \sqrt[n]{a}+1}$ verwendet.

b) Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ist, erhält man $\lim\limits_{n\to\infty} I(\mathfrak{Z}_n, f) = \dfrac{a^3-1}{3}$.

Aufgabe 9.4

a) $\displaystyle\int_2^9 (x-1)^{1/3}\,dx = \Big[\frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big]_2^9 = \frac{45}{4}.$

b) Mittels Partialbruchbruchzerlegung erhält man $\dfrac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} = -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}$. Somit ist

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \Big[-\ln(x+1) + \ln(x^2+1) + \arctan x\Big]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

c) Bei der Substitution $\tan\frac{x}{2} = t$ gehen die Grenzen 0 und $\pi/2$ für x in die Grenzen $\tan 0 = 0$ und $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ für t über. Wegen $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ (s. Vorlesung) führt diese Substitution also auf das Integral

$$\int_0^1 \frac{2\,dt}{t^2+5} = \Big[\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}}\Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{1}{\sqrt{5}} = 0.376137$$