Zusatzmaterial zur Mathematik I für E-Techniker – Übung 9

Aufgabe 9.1.

(a) Die Funktion x^2 ist als stetige Funktion auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. Berechnen Sie die Riemann-Summe von $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0,\ldots,n$, und den durch das geometrische Mittel gegebenen Stützstellen $\xi_k := \sqrt{x_{k-1}x_k}$, sowie durch Limesbildung $n \to \infty$ den Wert des Integrals.

(b) Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist als stetige Funktion auf $[1,2]$ Riemann-integrierbar. Berechnen Sie die Riemannsche Untersumme des Integrals $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ bzgl. der äquidistanten Zerlegung $x_k := 1 + \frac{k}{n}$, $k = 0,\ldots,n$, sowie unter Verwendung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \ln(2)$ den Wert des Integrals durch Limesbildung $n \to \infty$.

(c) Berechnen Sie die Riemann-Summe von $\int\limits_0^1 c^x\,dx$, $c > 0$, bzgl. der äquidistanten Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0,\ldots,n$, und den rechten Knoten als Stützstellen, sowie durch Limesbildung $n \to \infty$ den Wert des Integrals.

Lösung zu Aufgabe 9.1.

(a) Die Riemann-Summe ist

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)k}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n(n+1)}{2n^3} = \frac{2n^3+n^2-n}{6n^3} \quad ,$$

und für $n \to \infty$ ergibt sich als Grenzwert $\frac{1}{3}$, dies ist also der Wert des Integrals $\int_0^1 x^2\,dx$.

(b) Als monoton fallende Funktion ergibt sich hier für die Untersumme

$$US\left(Z,\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\inf_{x\in]x_{k-1},x_k[}\frac{1}{x}\right)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

Wie man leicht sieht, gilt für die Summe jedoch

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Daher konvergiert sie für $n \to \infty$ gegen $\ln(2)$. Der Wert des Integrals $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ ist somit $\ln(2)$.

(c) Die Riemann-Summe lautet

$$\sum_{k=1}^{n}c^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{c}\right)^k = \frac{1}{n}\left(\frac{1-\sqrt[n]{c}^{\,n+1}}{1-\sqrt[n]{c}} - 1\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{c}-\sqrt[n]{c}^{\,n+1}}{1-\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{c}(c-1)\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{c}-1} \quad .$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = 1$ (falls $c > 0$) strebt der erste Faktor für $n \to \infty$ gegen $c - 1$. Für den zweiten Faktor folgt mit $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}} = e^{\ln c^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\ln c}$ und der Regel von L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{c}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[n]{c}\left(-\frac{\ln(c)}{n^2}\right)} = \frac{1}{\ln(c)} \quad ,$$

so dass sich insgesamt $\int\limits_0^1 c^x\,dx = \frac{c-1}{\ln(c)}$ ergibt.

Aufgabe 9.2.
Integrieren Sie $\displaystyle\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}\,dx$, falls x^2+px+q keine reelle Nullstelle besitzt.

Lösung zu Aufgabe 9.2.
Da x^2+px+q keine reelle Nullstelle besitzt, ist $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + D$ mit $D := q - \frac{p^2}{4} > 0$. (Achtung: D ist hier genau das Negative der Diskriminanten $\frac{p^2}{4} - q$, welche im Falle von zwei echt komplexen Wurzeln ihrerseits negativ sein muss.) Insbesondere gilt dann $x^2+px+q > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $Ex+F = Ex + \frac{pE}{2} - \frac{pE}{2} + F = \frac{E}{2}(2x+p) + \big(F - \frac{pE}{2}\big)$ können wir das Integral folgendermaßen aufspalten und berechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(F - \frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D}\,dx \\ &= \frac{E}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right) + C,\end{aligned}$$

wobei wir für das erste Integral die Substitutionsmethode mit $t = \varphi(x) = x^2+px+q$ und folglich $\frac{dt}{dx} = 2x+p$ angewendet haben. Für das zweite Integral haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D} = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1}, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$$

und die Substitutionsmethode mit $t = \varphi(x) = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{D}}$.

Bemerkung:

Offenbar gilt für $l > 1$ analog stets

$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^l}\,dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l}\,dx + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+D)^l}\,dx \\ &= -\frac{E}{2(l-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{l-1}} \\ &\quad + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\frac{1}{D^l}\int\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1\right)^{-l}dx,\end{aligned}$$

so dass wie zuvor nach Substitution mit $t = \varphi(x) = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{D}}$ nur Integrale der Form

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^l}\,dt \tag{1}$$

zu berechnen sind, für die es Rekursionsformeln in $l > 1$ gibt, die mit partieller Integration hergeleitet werden können.

Aufgabe 9.3.

(a) Zeigen Sie, dass für $l > 1$ und $D > 0$

$$\int \frac{1}{(t^2+D)^l}\,dt = \frac{1}{2(l-1)D}\left[\frac{t}{(t^2+D)^{l-1}} + (2l-3)\int\frac{1}{(t^2+D)^{l-1}}\,dt\right].$$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+D)^2}$, $D > 0$.

Lösung zu Aufgabe 9.3.

(a) Ableiten der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(l-1)D}\left[\frac{(t^2+D)^{l-1}-2(l-1)t^2(t^2+D)^{l-2}}{(t^2+D)^{2(l-1)}}+(2l-3)\frac{1}{(t^2+D)^{l-1}}\right]\\
&= \frac{1}{2(l-1)D}\left[\frac{(t^2+D)-2(l-1)t^2}{(t^2+D)^l}+(2l-3)\frac{(t^2+D)}{(t^2+D)^l}\right]\\
&= \frac{1}{(2l-2)D}\left[\frac{(2l-2)(t^2+D)-(2l-2)t^2}{(t^2+D)^l}\right] \quad = \quad \frac{1}{(t^2+D)^l}
\end{aligned}$$

(b) Nach der Rekursionsformel aus der vorhergehenden Aufgabe haben wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t^2+D)^2}\,dt &= \frac{1}{2(2-1)D}\left[\frac{t}{(t^2+D)^{2-1}}+(2\cdot 2-3)\int\frac{1}{(t^2+D)^{2-1}}\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2D}\left[\frac{t}{t^2+D}+\frac{1}{D}\int\frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{D}})^2+1}\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2D}\frac{t}{t^2+D}+\frac{1}{2D^{3/2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{D}}\right)+C.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder die Substitutionsmethode mit $x = \varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{D}}$ sowie $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$ verwendet.

Bemerkung:

Oft können bestimmte Integrale nach Substitution in Integrale von rationalen Funktionen überführt werden. Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion zweier Variablen, dann leisten für Integrale der Form

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

die drei Eulerschen Substitutionen (in verschiedenen Fällen) das Gewünschte; siehe folgende Aufgabe für ein Beispiel zur 1. Eulerschen Substitution.

Hier noch ein anderes Beispiel:

Aufgabe 9.4.
Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion zweier Variablen. Führen Sie durch die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ für $-\pi < x < \pi$ das Integral $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion von t zurück.

Lösung zu Aufgabe 9.4.
Die Substitution liefert zunächst $x = 2\arctan t$ sowie $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ (siehe Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion).
Mit $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ und wegen $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ sowie

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2} = \frac{1}{1+\frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned}
\cos x &= 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2-1 = \frac{2}{1+t^2}-1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Die rechte Seite ist ein Integral einer rationalen Funktion, die wir bereits integrieren können.

Aufgabe 9.5.
Überprüfen Sie die Existenz der uneigentlichen Integrale $(a)\ \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $(b)\ \int_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Lösung zu Aufgabe 9.5.

(a) Wegen $\int\limits_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2\sqrt{x}\Big|_{x=s}^{x=9} \;=\; 2(3-\sqrt{s})$ für $s \in (0,3)$ folgt

$$\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \lim_{s\searrow 0} \int\limits_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \lim_{s\searrow 0} 2(3-\sqrt{s}) \;=\; 6.$$

(b) Wegen $\int\limits_s^3 \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; -\frac{1}{x}\Big|_{x=s}^{x=3} \;=\; \frac{1}{s}-\frac{1}{3}$ existiert das uneigentliche RIEMANN-Integral $\int\limits_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ **nicht**.

Aufgabe 9.6.
Für das folgende Integral $I_n(n \in \mathbb{N})$ ist eine Rekursionsformeln aufzustellen. Außerdem gebe man jeweils I_0, I_1, I_2, I_3 an.

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx \qquad a \neq 0$$

Lösung zu Aufgabe 9.6.
Es gilt

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} x^n - \int \frac{n}{a} x^{n-1} e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} x^n - \frac{n-1}{n} I_{n-1}$$

und daher für die ersten Integrale

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{e^{ax}}{a} \\
I_1 &= \frac{e^{ax}}{a} x - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a} \\
I_2 &= \frac{e^{ax}}{a} x^2 - \frac{2}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a} x - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a}\right) \\
I_3 &= \frac{e^{ax}}{a} x^3 - \frac{3}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a} x^2 - \frac{2}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a} x - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$