

06.1 Man berechne mit Hilfe der Regel von L'HOSPITAL die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, a, b > 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\sinh^2 x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{a+x}, a > 0$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[x]{x}}$

06.2 Man berechne durch Interpretation als Riemannsche Summe

$$S := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

06.3 Für die Funktion $f(x) = \begin{cases} 3 \sin x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -5x & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x \leq 3 \end{cases}$ berechne man $\int_0^3 f(x) dx$.

06.4 Für die Funktion $f(x) = x^2 - 8x + 2, x \in [3, 6]$, berechne man den Mittelwert $T = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, ($a = 3, b = 6$). An welcher Stelle $\xi \in (3, 6)$ ist $f(\xi) = T$?

06.5 Man beweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx = 0.$$