Übungsaufgaben — Mathematik für Informatiker II

SERIE 09 — Termin: $\boxed{\text{Projektwoche (ohne Punktvergabe)}}$

09.1 Die LAPLACE–Transformierte einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch das folgende uneigentliche Integral (abhängig vom Parameter – der Variablen – s):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \,.$$

Man berechne die LAPLACE–Transformierten der Funktionen

(a) $f(x) = a$, $s > 0$

(b) $f(x) = e^{ax}$, $s > a$

(c) $f(x) = \cos ax$, $s > 0$.

(**Hinweis:** $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b \sin bx)}{a^2+b^2}$.)

09.2 Es existiere die LAPLACE–Transformierte der Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$, und es sei $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-sb} f(b) = 0$. Man zeige, dass gilt:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0) \,.$$

09.3 Man berechne das Volumen und die Oberfläche (einschl. beider Grundflächen) des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = \cosh x$ $(-1 \le x \le 1)$ um die x-Achse entsteht.

09.4 Man untersuche, ob die folgende Funktionenreihe über $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert!

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \ldots$$

(**Hinweis:** Test auf Stetigkeit!)

09.5 Es sei $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$. Man beweise: $\int_0^\pi f(x)\, dx = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.