Die Clarkson'schen Ungleichungen

Lemma 1. *Seien $1 \leq p < \infty$ und $a, b \geq 0$, dann gilt*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{1}$$

Beweis. Für $p = 1$ ist (1) nur eine gewöhnliche Gleichung. Sei also $p > 1$. Die Funktion $t \mapsto t^p$ ist trivialerweise konvex auf $[0, \infty)$, daher gilt auch

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}.$$

□

Lemma 2. *Sei $0 < s < 1$. Dann ist $f(t) = \frac{1-s^t}{t}$ eine monoton fallende Funktion in $t > 0$.*

Beweis. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'(t) = \frac{(g(s^t) - 1)}{t^2}$$

mit $g(r) = r - r\ln(r)$. Weil nach Voraussetzung $0 < s^t < 1$ und $g'(r) = -\ln(r) \geq 0$ für $0 < r \leq 1$, folgt $g(s^t) < g(1) = 1$. Es folgt $f'(t) < 0$. □

Satz 3 (Ungleichung von Hölder)**.** *Seien $1 < p < \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$, dass $uv \in L^1(\Omega)$ und*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^{p'}(\Omega)} \tag{2}$$

Beweis. Seien $a, b > 0$ und $A = \ln(a^p)$, $B = \ln(b^p)$. Weil die Exponentialfunktion strikt konvex ist gilt

$$\exp\left(\left(\frac{A}{p}\right) + \left(\frac{B}{p'}\right)\right) \leq \left(\frac{1}{p}\right)\exp(A) + \left(\frac{1}{p'}\right)\exp(B),$$

mit Gleichheit nur wenn $A = B$. Daher gilt

$$ab \leq \left(\frac{a^p}{p}\right) + \left(\frac{b^{p'}}{p'}\right)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a^p = b^{p'}$. Ist entweder $||u||_{L^p(\Omega)} = 0$ oder $||v||_{L^{p'}(\Omega)} = 0$, dann ist $u(x)v(x) = 0$ fast überall in Ω. Andernfalls können wir

$$a = \frac{|u(x)|}{||u||_{L^p(\Omega)}}, \qquad b = \frac{|v(x)|}{||v||_{L^{p'}(\Omega)}}$$

in der obigen Ungleichung substituieren und über Ω integrieren. □

Satz 4 (Rückwärtsungleichung von Hölder)**.** *Sei $0 < p < 1$ und $p' = \frac{p}{p-1} < 0$. Ist $f \in L^p(\Omega)$ und*

$$0 < \int_\Omega |g(x)|^{p'}dx < \infty,$$

dann gilt

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3}$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $fg \in L^1(\Omega)$, andernfalls wäre die linke Seite von (3) unendlich. Seien $\phi = |g|^{-p}$ und $\psi = |fg|^p$, so dass $\phi\psi = |f|^p$. Dann ist $\psi \in L^q(\Omega)$ mit $q = \frac{1}{p} > 1$. Weil $p' = -pq'$, mit $q' = \frac{q}{q-1}$, gilt $\phi \in L^{q'}(\Omega)$. Nun können wir die Hölder'sche Ungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^p dx &= \int_\Omega \phi(x)\psi(x)dx \\ &\overset{(2)}{\leq} ||\psi||_{L^q(\Omega)} ||\phi||_{L^{q'}(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega |f(x)g(x)|dx\right)^p \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} dx\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

Nehmen wir nun die p-te Wurzel und dividieren durch den letzten Faktor auf der rechten Seiten, so erhalten wir (3). □

Satz 5 (Ungleichung von Minkowski). *Für $1 \leq p < \infty$ und $u, v \in L^p(\Omega)$ gilt*

$$||u+v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}. \tag{4}$$

Beweis. Offensichtlich gilt (4) für $p = 1$, da

$$\int_\Omega |u(x)+v(x)|dx \leq \int_\Omega |u(x)|dx + \int_\Omega |v(x)|dx.$$

Für $1 < p < \infty$ gilt für $w \geq 0$, $||w||_{L^{p'}(\Omega)} \leq 1$ mit der Ungeichung von Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|u(x)| + v(x)|)\, w(x)dx &\leq \int_\Omega |u(x)|w(x)dx + \int_\Omega |v(x)|w(x)dx \\ &\overset{(2)}{\leq} ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Satz 6 (Rückwärtsungleichung von Minkowski). *Für $0 < p < 1$ und $u, v \in L^p(\Omega)$ gilt*

$$|||u| + |v|||_{L^p(\Omega)} \geq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)} \tag{5}$$

Beweis. Für $u = v = 0$ in $L^p(\Omega)$ ist die rechte Seite von (5) Null. Ansonsten ist die rechte Seite größer als Null und wir können die Rückwarts-Hölder Ungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}|||u| + |v|||^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} (|u(x)| + |v(x)|)\, dx \\ &\overset{(3)}{\geq} \left(\int_\Omega |u(x)| + |v(x)|)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}\right) \\ &= |||u| + |v|||^{\frac{p}{p'}}_{L^p(\Omega)} \left(||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Division beider Seiten durch den ersten Faktor auf der rechten Seite führt auf die Behauptung. □

Lemma 7. *Seien $1 < p \leq 2$ und $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt mit $p' = \frac{p}{p-1}$, dass*

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^{p'} + \left(\frac{1-t}{2}\right)^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{6}$$

Beweis. Für $p = 2$ oder $t = 0$ oder $t = 1$ gilt in (6) Gleichheit, daher nehmen wir an, dass $1 < p < 2$ und $0 < t < 1$. Nun führen wir die Transformation

$$t = \frac{1-s}{1+s}$$

durch. Man bemerke, dass sich dann die Relation $0 < t < 1$ in $1 > s > 0$ umkehrt. Deshalb reduziert sich (6) zu der äquivalenten Form

$$\frac{1}{2}\left((1+s)^p + (1-s)^p\right) - \left(1+s^{p'}\right)^{p-1} \geq 0. \tag{7}$$

Nun wenden wir auf die linke Seite von Ungleichung (7) die binomische Formel an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=}^{\infty}\binom{p}{k}s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-s)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{p'k}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{2k}s^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{p'k}\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{p}{2k}s^{2k} - \binom{p-1}{2k-1}s^{p'(2k-1)} - \binom{p-1}{2k}s^{2p'k}\right]
\end{aligned}$$

Die obige Reihe konvergiert für $0 \leq s < 1$. Wir zeigen (7) indem wir nachweisen, dass jeder einzelne Summand positiv ist. Der k-te Term in der obigen Summe kann wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned}
&\frac{p(p-1)(2-p)(3-p)\dots(k-1-p)}{(2k)!}s^{2k}\\
&-\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)}{(2k-1)!}s^{p'(2k-1)} + \frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-p)}{(2k)!}s^{2kp'}\\
=&\frac{(2-p)\dots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}\left[\frac{p(p-1)}{2k(2k-p)} - \frac{p-1}{2k-p}s^{p'(2k-1)-2k} + \frac{p-1}{2k}s^{2kp'-2k}\right]\\
=&\underbrace{\frac{(2-p)\dots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}}_{>0,\text{ weil } p<2}\underbrace{\left[\frac{1-s^{\frac{2k-p}{p-1}}}{\frac{2k-p}{p-1}} - \frac{1-s^{\frac{2k}{p-1}}}{\frac{2k}{p-1}}\right]}_{>0,\text{ Lemma 2, da } 0<\frac{2k-p}{p-1}<\frac{2k}{p-1}}.
\end{aligned}$$

□

Satz 8. *Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Für $1 < p \leq 2$ und $p' = \frac{p}{p-1}$ gilt*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{8}$$

Für $2 \leq p < \infty$ gilt

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p} \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p. \tag{9}$$

Beweis.

(i) Sei $1 < p \leq 2$. Offensichtlich ist die Ungleichung (8) für $z = 0$ oder $w = 0$ erfüllt. Weiterhin ist die Ungleichung symmetrisch in z und w, daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $|z| \geq |w| > 0$. Für

$$\frac{w}{z} = re^{i\Theta}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \Theta < 2\pi,$$

können wir (8) dann in der Form

$$\left|\frac{1+re^{i\Theta}}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-re^{i\Theta}}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{10}$$

schreiben. Für $\Theta = 0$ ist dies genau Lemma 7. Wir vollenden den Beweis, in dem wir zeigen, dass die Funktion

$$f(\Theta) = \left|1+re^{i\Theta}\right|^{p'} + \left|1-re^{i\Theta}\right|^{p'}$$

für festes r $(0 < r \leq 1)$, sein Maximum für $0 \leq \Theta < 2\pi$ in $\Theta = 0$ annimmt. Wir schreiben f geschickt um und erhalten

$$f(\Theta) = \left(1 + r^2 + 2r\cos(\Theta)\right)^{\frac{p'}{2}} + \left(1 + r^2 - 2r\cos(\Theta)\right)^{\frac{p'}{2}}.$$

Nun erkennen wir dass

$$f(2\pi - \Theta) = f(\pi - \Theta) = f(\theta)$$

gilt, daher brauchen wir f nur auf dem Intervall $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$ untersuchen. Wegen $p' \geq 2$ gilt auf diesem Intervall jedoch

$$f'(\Theta) = -p'r\sin(\Theta)\left[\left(1 + r^2 + 2r\cos(\Theta)\right)^{\frac{p'-2}{2}} - \left(1 + r^2 - 2r\cos(\Theta)\right)^{\frac{p'-2}{2}}\right] \leq 0$$

Daher nimmt f sein Maximum wirklich bei $\Theta = 0$ an.

(ii) Sei nun $2 \leq p < \infty$, dann ist $1 < p' \leq 2$. Vertauschen wir nun p und p' in (8) und verwenden Lemma 1, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p &\overset{(8)}{\leq} \left(\frac{1}{2}|z|^{p'} + \frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}|z|^{p'} + \frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\overset{(1)}{\leq} 2^{\frac{p}{p'}-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p'}}|z|^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p'}}|w|^p\right] \\
&= \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p.
\end{aligned}$$

□

Satz 9 (Clarkson'sche Ungleichungen). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $u, v \in L^p(\Omega)$. Für $1 < p < \infty$ sei $p' = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt für $2 \leq p < \infty$*

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\,||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\,||v||^p_{L^p(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} \geq \left(\frac{1}{2}\,||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\,||v||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1}. \tag{12}$$

Für $1 < p \leq 2$ gilt

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{2}\,||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\,||v||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1}, \tag{13}$$

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \geq \frac{1}{2}\,||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\,||v||^p_{L^p(\Omega)}. \tag{14}$$

Beweis.

(i) Sei $2 \leq p < \infty$. Dann gilt mit Hilfe von (9) und $z = u(x)$, $w = v(x)$

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \\
=&\int_\Omega \left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^p \left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^p dx \\
\overset{(9)}{\leq}&\int_\Omega \frac{1}{2}|u(x)|^p + \frac{1}{2}|v(x)|^p dx \\
=&\frac{1}{2}||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}||v||^p_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

(ii) Sei $1 < p \leq 2$. Wir bemerken zu erst, dass

$$\left|\left||u|^{p'}\right|\right|_{L^{p-1}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u|^{p'}\right)^{p-1} dx\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{p'}{p}} = ||u||^{p'}_{L^p(\Omega)}.$$

für alle $u \in L^p(\Omega)$. Weiterhin gilt mit Hilfe der Rückwärtsungleichung von Minkowski

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} &= \left|\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right|\right|_{L^{p-1}(\Omega)} + \left|\left|\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right|\right|_{L^{p-1}(\Omega)} \\ &\overset{(5)}{\leq} \left[\int_\Omega \left(\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx\right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &\overset{(8)}{\leq} \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u(x)|^p + \frac{1}{2}|v(x)|^p\right) dx\right]^{p'-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}||v||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1}\end{aligned}$$

(iii) Sei $2 \leq p < \infty$. Dann gilt mit Hilfe der Ungleichung von Minkowski

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} &= \left|\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right|\right|_{L^{p-1}(\Omega)} + \left|\left|\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right|\right|_{L^{p-1}(\Omega)} \\ &\overset{(4)}{\geq} \left[\int_\Omega \left(\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx\right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &\overset{(*)}{\geq} \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u(x)|^p + \frac{1}{2}|v(x)|^p\right) dx\right]^{p'-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}||v||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1}\end{aligned}$$

Wobei wir bei $(*)$ die Ungleichung

$$\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} \geq \frac{1}{2}|\xi|^p + \frac{1}{2}|\eta|^p \tag{$*$}$$

verwendet haben. Diese folgt aus (8) indem man p durch p', z durch $\frac{\xi+\eta}{2}$ und w durch $\frac{\xi-\eta}{2}$ substituiert und anschließend mit 2^{p-1} multipliziert.

(iv) Sei $1 < p \leq 2$, dann gilt

$$\begin{aligned}&\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p}_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^{p}_{L^p(\Omega)} \\ =\ & \int_\Omega \left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^{p} + \left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^{p} dx \\ \overset{(*)}{\geq}\ & \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u(x)|^{p'} + \frac{1}{2}|v(x)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}} dx \\ \overset{(**)}{\geq}\ & \int_\Omega \frac{1}{2}|u(x)|^{\frac{p'}{p'-1}} + \frac{1}{2}|v(x)|^{\frac{p'}{p'-1}} dx \\ =\ & \int_\Omega \frac{1}{2}|u(x)|^p + \frac{1}{2}|v(x)|^p dx \\ =\ & \frac{1}{2}||u||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}||v||^p_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

Wobei wir bei $(**)$ benutzt haben, dass $p' \geq 2$ und somit $t \mapsto t^{\frac{1}{p'-1}}$ konkav ist.

□

Bemerkung 10.
Für $p = 2$ reduzieren sich alle vier Clarkson'schen Ungleichungen zu der Parallelogramm-Regel

$$||u+v||^2_{L^2(\Omega)} + ||u-v||^2_{L^2(\Omega)} = 2\,||u||^2_{L^2(\Omega)} + 2\,||{+v}||^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Daher sind die Clarkson'schen Ungleichungen als eine Verallgemeinerung der Parallelogramm-Regel in $L^p(\Omega)$ zu verstehen.

Definition 11. *Eine Norm $||\cdot||_X$ auf eine Banachraum X wird als **gleichmäßig konvex** bezeichnet, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ exisiert, so dass für alle $u, v \in X$ gilt dass*

$$||u||_X, ||v||_X \leq 1 \quad \text{und} \quad \left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|_X > 1-\delta \Rightarrow ||u-v||_X < \epsilon.$$

Satz 12. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.*

Beweis. Seien $u, v \in L^p(\Omega)$ mit $||u||_{L^p(\Omega)} = ||v||_{L^p(\Omega)} = 1$ und $||u-v|| \geq \epsilon$ mit $0 < \epsilon < 2$. Für $2 \leq p < \infty$ impliziert (11) dann

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq 1 - \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

Für $1 < p \leq 2$ impliziert (13)

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p'}_{L^p(\Omega)} \leq 1 - \frac{\epsilon^{p'}}{2^{p'}}.$$

In beiden Fällen existiert ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, sodass

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|_{L^p(\Omega)} \leq 1 - \delta.$$

□

Literatur

[Adams 03] Robert Adams, John J.F. Fournier, "*Sobolev Spaces*", Elsevier Science Ltd., Oxford, 2003

[Takac 10] Peter Takáč, "*Variationsrechnung*", Vorlesungsmitschrift, Rostock, Sommersemester 2010