Zusatzmaterial zur Vorlesung: Partielle DGL - Wärmeleitungsgleichung und Laplace-Gleichung

Lösungen der bisherigen elementaren Gleichungen:

- Das Anfangswertproblem für die **inhomogene Transportgleichung** auf unbeschränkten Gebiet

$$\begin{cases} u_t(t,x) + b \cdot D_x u(t,x) = f(t,x) & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

besitzt die Lösung

$$u(t,x) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s-t)b, s)\, ds \qquad (x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0).$$

- Das Anfangswertproblem für die eindimensionale **inhomogene Wellengleichung** auf unbeschränkten Gebiet

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx} = F(t,x) & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

besitzt die Lösung

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau. \tag{3}$$

Gleichung (3) ist auch als **d'Alambertsche Formel** bekannt.

- Das Anfangswertproblem für die **inhomogene Wärmeleitungsgleichung** auf unbeschränkten Gebiet

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(t,x) & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t, x-y) g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)\, dy\, ds \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds \qquad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0). \end{aligned}$$

Wobei wir annehmen, dass $f \in C_c^{1,2}\left([0,T] \times \mathbb{R}^N\right)$.

Beweis. Dass

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t, x-y) g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$$

das homogene Anfangswertproblem löst, wurde bereits in der Vorlesung gezeigt. Da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, genügt es nun, um das gesamte inhomogene Problem zu lösen, einfach das inhomogene Problem zu Nullanfangswertbedingungen

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(t,x) & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{5}$$

zu lösen und dann die beiden Lösung zu addieren. Die Grundidee des Beweises basiert auf der Beobachtung, dass die Abbildung $(t,x) \mapsto \Phi(t-s, x-y)$ die Wärmeleitungsgleichung für festes $y \in \mathbb{R}^N$ und $s \in (0,t)$ löst. Somit erfüllt die Funktion

$$u(t,x;s) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t-s, x-y) f(y,s)\, dy$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) = 0 & (\cdot) \in (s,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(\cdot;s) = f(\cdot,s) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{6}$$

Nun benutzen wir das sogenannte **Duhamel'sche Prinzip**, welches behauptet, dass wir eine Lösung von (5) aus (6) durch Integration bezüglich s konstruieren können. Deshalb betrachten wir

$$u(t,x) = \int_0^t u(t,x;s)\, ds$$

und erhalten somit

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t-s,x-y) f(y,s)\, dy\, ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds. \tag{7}$$

Es verbleibt noch nachzuprüfen, dass

(a) $u_t(t,x) + \Delta u(t,x) = f(t,x)$

(b) $u \in C^{1,2}\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^N\right)$ (u ist klassische Lösung)

(c) $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x^0);\, x\in\mathbb{R}^N, t>0} = 0$ für alle $x^0 \in \mathbb{R}^N$.

Dies sieht man folgendermaßsen:

(a) Da Φ bei $(0,0)$ singulär ist, können wir nicht direkt unter dem Integral differenzieren, weshalb wir anders vorgehen müssen. Dazu führen wir als erstes eine Substitution aus und betrachten

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) f(t-s,x-y)\, dy\, ds.$$

Da $f \in C^{1,2}\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^N\right)$ kompakten Träger hat und $\Phi(s,y)$ bei $s = t > 0$ glatt ist, erhalten wir

$$u_t(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) f_t(t-s,x-y)\, dy\, ds + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy$$

sowie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(t-s,x-y)\, dy\, ds,$$

weshalb $u_t, D_x^2 u$ und genauso $u, D_x u$ zu $C\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^N\right)$ gehören.

(b) Wir setzen ersteinmal ein und erhalten

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(t-s,x-y)\right] dy\, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy \\ &= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(t-s,x-y)\right] dy\, ds \\ &\quad + \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(t-s,x-y)\right] dy\, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy \\ &= I_\epsilon + J_\epsilon + K. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt, dass

$$|J_\epsilon| \le \left(||f_t||_{L^\infty} + \left|\left| \left|D^2 f\right| \right|\right|_{L^\infty}\right) \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y)\, dy\, ds \le \epsilon C.$$

Integration per part führt zu

$$\begin{aligned} I_\epsilon \quad &= \quad \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) \Phi(s,y)\right] f(t-s, x-y)\, dy\, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\epsilon, y) f(t-\epsilon, x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\epsilon, y) f(t-\epsilon, x-y)\, dy - K, \end{aligned}$$

da Φ die Wärmeleitungsgleichung löst. Fassen wir nun alles zusammen, so erhalten wir

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\epsilon,y) f(t-\epsilon, x-y)\, dy = f(t,x).$$

(c) Letztendlich gilt weiterhin, dass $||u(t,\cdot)||_{L^\infty} \le t\, ||f||_{L^\infty} \xrightarrow{t\searrow 0} 0.$

□

- Die Laplace-Gleichung auf dem Kreis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(r,\Theta)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u(r,\Theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u(r,\Theta)}{\partial \Theta^2} = 0 & (r,\Theta) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \\ u(R,\Theta) = f(\Theta) & \Theta \in [0,2\pi) \end{cases} \tag{8}$$

  besitzt die Lösung

$$u(r,\Theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\phi)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\Theta-\phi)}\, d\phi. \tag{9}$$

  Gleichung (9) wird auch als **Poisson'sche Integralformel** bezeichnet.

- Um viel allgemeiner **Gleichungen mit Randwerten** zu lösen, unabhängig davon, um welchen Typ es sich handelt, benutzt man den **Fourieransatz**. Um die richtige Ansatzfunktion bestimmen zu können, nimmt man an, dass sich die Lösung separieren lässt, genauer, dass $u(t,x) = T(t)X(x)$. Daraus lassen sich dann individuell durch Einsetzen in die Differentialgleichungen Eigenwertprobleme herleiten und auch individuelle Ansätze aufstellen.

. . . .

Zusatzaufgaben mit Lösungen

Zusatzsaufgabe 1.1.

(a) Sei $u : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Diffusionsgleichung $u_t = u_{xx}$. Zeigen Sie, dass für $c > 0$ dann auch $(t,x) \mapsto u(c^2 t, cx)$ eine Lösung der Diffusionsgleichung ist.

(b) Zeigen Sie, dass mit der Funktion $S(t,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)$ für jedes $t > 0$ die folgende Gleichung gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t,y)\, dy = 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$, um $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2-y^2)\, dx\, dy$ zu berechnen. Folgern Sie daraus $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$ und berechnen Sie schließlich $\int_{-\infty}^{\infty} S(t,x)\, dx$.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.1.

(a) Wegen

$$(u(c^2t, cx))_t = c^2 u_t(c^2t, cx)$$

und

$$(u(c^2t, cx))_{xx} = c(u(c^2t, cx))_x = c^2 u(c^2t, cx)$$

löst auch $u(c^2t, cx)$ die Diffusionsgleichung.

(b) Für die Polarkoordinaten $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, gilt nach dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2)\,dxdy &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r\,d\phi dr \\
&= \pi \int_0^{\infty} 2r\exp(-r^2)\,dr \\
&= \pi \exp(-r^2)|_{r=0}^{\infty} = \pi \quad .
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2)\,dxdy = \pi$$

und daher $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$. Mit der Substitution $x^2 = y^2/4t$, also $dx = \frac{dy}{\sqrt{4t}}$, folgt somit die Behauptung

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2/4t)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} S(t,y)\,dy.$$

Zusatzaufgabe 1.2.
Lösen Sie die Diffusionsgleichung $u_t = u_{xx}$ zu den folgenden Anfangswerten:

(a) $u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $u(0,x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Hinweis: Die Lösung darf die nicht-elementare Stammfunktion $\mathrm{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-y^2)\,dy$ enthalten.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.2.

(a) Unter Benutzung von Substitutionen und der vorherigen Aufgabe

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^{\infty} \exp(-(x-y)^2/4t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-x}^{\infty} \exp(-y^2/4t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{4t}}^{\infty} \exp(-y^2)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \exp(-y^2)\,dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{4t}}^{0} \exp(-y^2)\,dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4t}} \exp(-y^2)\,dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).
\end{aligned}$$

(b) Unter Benutzung von Substitutionen und der vorherigen Aufgabe gilt

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^\infty \exp(-(x-y)^2/4t)\exp(-y)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^\infty \exp(-(x^2-2xy+y^2+4ty)/4t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^\infty \exp(-((y+2t-x)^2+4tx-4t^2)/4t)\,dy \\
&= \exp(t-x)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^\infty \exp(-(y+2t-x)^2/4t)\,dy \\
&= \exp(t-x)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{2t-x}^\infty \exp(-y^2/4t)\,dy \\
&= \exp(t-x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(2t-x)/\sqrt{4t}}^\infty \exp(-y^2)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\exp(t-x)\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{2t-x}{\sqrt{4t}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 1.3.
Beweisen Sie, dass die Funktionen $u_n(t,x) = \frac{1}{n}\sin(nx)e^{-n^2kt}$ Lösungen der Diffusionsgleichung sind, die bei $n\to\infty$ für $t=0$ gleichmäßig in x gegen die Nullfunktion konvergieren, für $t=-1$ jedoch punktweise fast überall gegen $\pm\infty$ streben.
(Diese Aufgabe zeigt daher, dass die Rückwärtslösung nicht stetig von den gegebenen Daten abhängt, und somit ist das Problem, $u_t = ku_{xx}$ bei gegebenem Anfangswert u_0 für negative Zeiten zu lösen, nicht korrekt gestellt.)

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.3.
Es gilt $u_n(0,x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \to 0$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$, aber z.B. für $t=-1$ gilt $u_n(-1,x) = \frac{1}{n}\sin(nx)e^{kn^2} \to \pm\infty$ außer für $x\in\pi\mathbb{Z}$.

Zusatzaufgabe 1.4.
Lösen Sie die Diffusionsgleichung mit konstanter Dissipation $v_t = v_{xx} - bv$ zum Anfangswert $v(0,x) = \exp(-x)$.
Hinweis: Betrachten Sie den Ansatz $v(t,x) = \exp(-bt)u(t,x)$ mit einer Lösung $u(t,x)$ der Diffusionsgleichung $u_t = u_{xx}$.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.4.
Da $v_t = -bv$ die Lösung $\exp(-bt)$ hat, betrachtet man den Ansatz $\exp(-bt)u(t,x)$. Wenn nun u die Diffusionsgleichung $u_t = u_{xx}$ lößt, dann löst $v(t,x) := \exp(-bt)u(t,x)$ die Diffusionsgleichung mit konstanter Dissipation wegen

$$\begin{aligned}
v_t = (\exp(-bt)u(t,x))_t &= \exp(-bt)u_t(t,x) - b\exp(-bt)u(t,x) \\
&= \exp(-bt)u_{xx}(t,x) - b\exp(-bt)u(t,x) \\
&= (\exp(-bt)u_t(t,x))_{xx} - b\exp(-bt)u(t,x) \\
&= v_{xx} - bv.
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösung zum Anfangswert $v(0,x) = \exp(-x)$ durch $v(t,x) = \exp(-bt)u(t,x)$ mit der Lösung

$u(t,x)$ der Diffusionsgleichung zum Anfangswert $u(0,x) = \exp(-x)$ gegeben. Diese ergibt sich durch

$$\begin{aligned}
u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-y)^2/4t)\exp(-y)\,dy &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2 - 2xy + y^2 + 4ty)/4t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-((y+2t-x)^2 + 4tx - 4t^2)/4t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(y+2t-x)^2/4t + t - x)\,dy \\
&= \exp(t-x)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2/4t)\,dy = \exp(t-x),
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Translationsinvarianz $y \mapsto y + x - 2t$ des Lebesgue-Integrals genutzt wurde. Also ist $v(t,x) = \exp((1-b)t - x)$ die gesuchte Lösung.

Probe: Es gilt $v_t = (1-b)v(t,x)$, $v_{xx} = v$, also $v_t = v_{xx} - bv$.

Zusatzaufgabe 1.5.
Lösen Sie mittels der Fouriermethode die folgende eindimensionale Diffusionsgleichung bei Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\pi) \\ u(0,x) = \sin(2x)/2 + \sin(4x)/4 & x \in (0,\pi) \\ u(t,0) = 0 = u(t,\pi) & t \in (0,\infty) \end{cases}$$

Bestätigen Sie das Ergebnis durch eine Probe.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.5.
Setzt man den Produktansatz $T(t)X(x)$ in die PDGL $u_t = u_{xx}$ ein, so ergibt sich

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Wir beobachten, dass die linke Seite dieser Gleichung nur von t und die rechte nur von x abhängt, weshalb beide gleich einer konstanten seien müssen, also $X'' = \lambda X$ und $T' = \lambda T$. Betrachten wir nun das Eigenwertproblem $X'' = \lambda X$ genauer, so ergeben sich je nach λ folgende Fälle

- $\underline{\lambda > 0}$: Die Lösung ist gegeben durch

  $$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

  Berücksichtigen wir nun noch die Randbedingungen, so folgt

  $$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0, \\ X(\pi) &= Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0. \end{aligned}$$

  Da jedoch

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \neq 0,$$

  folgt $A = B = 0$, also nur die Nulllösung.

- $\underline{\lambda = 0}$: Die Lösung ist gegeben durch

  $$X(x) = Ax + B.$$

  Berücksichtigen wir nun noch die Randbedingungen, so folgt

  $$\begin{aligned} X(0) &= B = 0, \\ X(\pi) &= A\pi + B = 0. \end{aligned}$$

  Da jedoch

  $$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 1 \end{vmatrix} = -\pi \neq 0,$$

  folgt $A = B = 0$, also nur die Nulllösung.

- $\underline{\lambda < 0:}$ Die Lösung ist gegeben durch

$$X(x) = A\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Berücksichtigen wir nun noch die Randbedingungen, so folgt

$$\begin{aligned} X(0) &= B = 0, \\ X(\pi) &= A\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) + \underbrace{B}_{=0}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $A \neq 0$ genau dann wenn $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, also $\lambda = -n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Nun resultiert für $T'(t) = \lambda T(t)$, dass $T(t) = A_n e^{-n^2 t}$.
Die allgemeine Form der Lösung ist also

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Aus dem Anfangswert

$$u(0,x) = \sin(2x)/2 + \sin(4x)/4$$

ergibt sich $A_2 = 1/2$, $A_4 = 1/4$ und $A_n = 0$ sonst. Somit ist

$$u(t,x) = \frac{1}{2}e^{-4t}\sin(2x) + \frac{1}{4}e^{-16t}\sin(4x)$$

die gesuchte Lösung. Die Probe

$$u_t = -2e^{-4t}\sin(2x) - 4e^{-16t}\sin(4x) = u_{xx}$$

bestätigt dieses Ergebnis.

Zusatzaufgabe 1.6.
Lösen Sie mittels der Fouriermethode die eindimensionale Diffusionsgleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & (t,x) \in (0,\infty)\times(a,b) \\ u(0,x) = \dfrac{(x-a)(b-x)}{b-a} & x \in (a,b) \\ u_x(t,a) = 0 = u_x(t,b) & t \in (0,\infty) \end{cases}$$

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.6.
Ein Produkt $T(t)X(x)$ ist genau dann Lösung der Diffusionsgleichung, wenn $T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$ und daher $X''(x) = -\lambda^2 X(x)$ sowie $T'(t) = -\lambda^2 T(t)$ für ein λ gilt. Die Gleichung für T wird durch $T(t) = A\exp(-\lambda^2 t)$ gelöst, während bei X die Randbedingungen nur $-\lambda_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$ zulassen mit Eigenfunktionen $X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$.

Bei Neumann-Randbedingungen ist also der Fourieransatz für die Diffusionsgleichung durch

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{(b-a)^2}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

gegeben. Aus den Anfangsdaten ergibt sich

$$\frac{(x-a)(b-x)}{b-a} = u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

und daher

$$\begin{aligned}
A_n = \frac{2}{(b-a)} \int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) dx &= 2\int_0^1 x(b-(b-a)x+a)\cos(n\pi x)dx \\
&= 2\int_0^1 \left(-(b-a)x^2+(a+b)x\right)\cos(n\pi x)dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (-2(b-a)x+(a+b))\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{2(a+b)}{(n\pi)^2}((-1)^n-1)+\frac{4(b-a)}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

für $n \neq 0$, d.h. $A_n = \frac{4(a+b)}{(n\pi)^2} + \frac{8(b-a)}{(n\pi)^2}$ für ungerade n und $A_n = 0$ für gerade $n \neq 0$, sowie $A_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{b-a}dx = \frac{b-a}{6}$.

Zusatzaufgabe 1.7.
Bestimmen Sie mittels des Fourieransatzes die Lösung zu der inhomogen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases}
u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x) & (t,x) \in (0,\infty)\times[0,1] \\
u(t,0) = 0 & t \in (0,\infty) \\
u(t,1) = 0 & t \in (0,\infty) \\
u(0,x) = 5\sin(2\pi x) + 2\sin(3\pi x) & x \in [0,1]
\end{cases}$$

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.7.
Mittels des Ansatzes $u(t,x) = T(t)X(x)$ finden wir wieder den Ansatz

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin(n\pi x)\,.$$

Diesen setzen wir in die inhomogene Wärmeleitungsgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin(n\pi x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin(n\pi x) + \sin(3\pi x) \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dA_n(t)}{dt}\sin(n\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 A_n(t)\sin(n\pi x) + \sin(3\pi x),
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{dA_n(t)}{dt} &= -n^2\pi^2 A_n(t) \qquad (n = 1,2,4,5,...) \\
\frac{dA_3(t)}{dt} &= -9\pi^2 A_3(t) + \sin(3\pi x)
\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= A_n(0)e^{-n^2\pi^2 t} \qquad (n = 1,2,4,5,...) \\
A_3(t) &= A_3(0)e^{-9\pi^2 t} + e^{-9n^2 t}\int_0^t e^{9\pi^2\tau}\,d\tau = 2e^{-9\pi^2 t} + \left(\frac{1-e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung erhalten wir, dass $A_n = 0$ fur $n \neq 2,3$ und $A_n(T) = 5e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$. Fassen wir alles zusammen, so folgt

$$u(t,x) = 5e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x) + \left[2e^{-9\pi^2 t} + \left(\frac{1-e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2}\right)\right]\sin(3\pi x).$$

Zusatzsaufgabe 1.8.

(a) Finden Sie die rotationsinvarianten Lösungen von $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Lösen Sie $\Delta u = 0$ im Kreis $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < a^2\}$ unter der Dirichlet-Randbedingung $u(a\cos(\phi), a\sin(\phi)) = 1 + 3\sin(\phi)$ auf $\partial\Omega$.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.8.

(a) Rotationsinvariante Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ haben in Polarkoordinaten die Form $u = u(r)$, und der Laplace-Operator wirkt auf diese durch $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$. Die Gleichung $\Delta u = 0$ läßt sich nach Multiplikation mit r^{n-1} daher auch als $(r^{n-1}u_r)_r = 0$ schreiben. Also gilt $r^{n-1}u_r = c_1$ und somit $u_r = \frac{c_1}{r^{n-1}}$.
Im Fall $n = 2$ liefert die Integration $u(r) = c_1 \ln(r) + c_2$, im Fall $n > 2$ gilt $u(r) = -\frac{c_1}{(n-2)r^{n-2}} + c_2$. All diese Funktionen sind auf dem $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert, lassen sich jedoch nur bei $c_1 = 0$, d.h. $u \equiv \text{const}$ stetig in 0 fortsetzen. Man bemerke auch, daß im Fall $n = 2$ die Funktion $\ln(r)$ kein Vorzeichen besitzt (dies ist charakteristisch für parabolische Räume wie den $\mathbb{R}^2$), während $\frac{1}{r^{n-2}}$ immer positiv ist (was charakteristisch für nicht-parabolische Räume wie $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, ist).

(b) Wir benutzen die Fouriermethode. Der Separationsansatz lautet $u(r,\phi) = R(r)\Theta(\phi)$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\frac{r^2 R''}{R} + rR'R = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda,$$

wobei λ eine Konstante ist. Wir betrachten als erstes die Eigenwertgleichung

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0.$$

Wir sind an 2π-periodischen Lösungen interessiert, die die Randbedingungen

$$\begin{aligned}\Theta(-\pi) &= \Theta(\pi) = 0\\ \Theta'(-\pi) &= \Theta'(\pi) = 0\end{aligned}$$

erfüllen. Diese können nur 2π-periodische Lösungen haben, wenn $\lambda = n^2$ und

$$\Theta(\phi) = A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi).$$

betrachten wir die Gleichung für R

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

so erhalten wir mittels des Ansatzes $R(r) = r^\alpha$, dass $\alpha = \pm n$ und daher

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

sowie $A_0 + B_0 \log(r)$ für $n = 0$. Anstatt einer Randbedingung bei $r = 0$, nutzen wir einfach die Bedingung, dass R dort endlich sein muss, weshalb der r^{-n}-Term und der $\log(r)$-Term wegfallen. Insgesamt lautet der Fourieransatz demnach

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)\right).$$

Nun benutzen wir die Randbedingung bei bei $r = a$ und erhalten die Gleichung

$$1 + 3\sin(\phi) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)\right).$$

Durch einen einfachen Koeffizienten-Vergleich erhalten wir als Lösung $A_0 = 2$, $B_1 = 3/a$ und ansonsten $A_n = 0 = B_n$. Daher ist

$$u(r,\phi) = 1 + \frac{3r}{a}\sin(\phi)$$

die gesuchte Lösung. Eine Probe $u_{rr}+u_r/r+u_{\phi\phi}/r^2 = \frac{3}{ar}\sin(\phi)-\frac{3}{ar}\sin(\phi) = 0$, $u(a,\phi) = 1+3\sin(\phi)$, bestätigt dies.

<u>Alternativ:</u> Mittels der Poisson-Formel besitzt die Lösung die Darstellung

$$\begin{aligned} u(r,\phi) &= \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+3\sin(\psi)}{a^2-2ar\cos(\phi-\psi)+r^2}d\psi \\ &= \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+3\sin(\psi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi)\cos(\psi)-2ar\sin(\phi)\sin(\psi)}d\psi \end{aligned}$$

Der Integrand ist eine rationale Funktion in $\cos(\psi)$, $\sin(\psi)$ und kann durch Substitution von $t = \tan(\psi/2)$ sowie Partialbruchzerlegung elementar integriert werden. Nach der Substitution ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{a^2-r^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2+6t+1}{(1+t^2)\left((a^2+r^2)(1+t^2)-2ar\cos(\phi)(1-t^2)-2ar\sin(\phi)2t\right)}dt \\ = &\frac{a^2-r^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2+6t+1}{(1+t^2)\left((a^2+r^2+2ar\cos(\phi))t^2-4ar\sin(\phi)t-2ar\cos(\phi)\right)}dt \quad . \end{aligned}$$

Nun kann man für den Integranden eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{(a^2+r^2+2ar\cos(\phi))t^2-4ar\sin(\phi)t-2ar\cos(\phi)}$$

finden, und die anschließende Integration liefert dann die Lösung. Dieser Weg ist allerdings merklich aufwendiger als der zuvor geschilderte.

Zusatzaufgabe 1.9.
Lösen Sie mittels der Fouriermethode die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im durch das Produkt $(0,a)\times(0,b)$ gegebenen Rechteck unter den Dirichlet-Randbedingungen

$$u = 0 \text{ bei } x = 0, \quad u = 0 \text{ bei } x = a, \quad u = 0 \text{ bei } y = 0, \quad u = x(a-x) \text{ bei } y = b \quad .$$

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.9.
Wir wollen den allgemeinen Fourier-Ansatz bestimmen. Um diesen zu erhalten, benutzen wir den Produktansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und erhalten

$$X''Y + Y''X = 0, \qquad \text{d.h.} \qquad X''/X = -Y''/Y.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von X und die rechte nur von Y abhängt, können wir schlussfolgern, dass $X'' = \lambda X$, $Y'' = -\lambda Y$. Das erste Eigenwertproblem lautet also $X'' = \lambda X$ unter den Randbedingungen $X(0) = 0$, $X(a) = 0$, und dieses hat natürlich die Lösung $\lambda_n = -(n\pi/a)^2$, $n \in \mathbb{N}$, mit Eigenfunktionen $\sin(n\pi x/a)$. Aus der zweiten Gleichung $Y'' = -\lambda_n Y$ ergibt sich die allgemeine Lösung

$$Y(y) = A_n\sinh(n\pi y/a) + B_n\cosh(n\pi y/a),$$

und wegen der Randbedingung $Y(0) = 0$ gilt $B_n = 0$. Der Fourier-Ansatz lautet daher

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sinh(n\pi y/a)\sin(n\pi x/a).$$

Mittels der verbleibenden Randbedingung

$$x(a-x) = u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sinh(n\pi b/a)\sin(n\pi x/a)$$

bestimmt man nun die Koeffizienten A_n durch

$$\begin{aligned}
A_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a x(a-x)\sin(n\pi x/a)dx &= \frac{2}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a (a-2x)\cos(n\pi x/a)dx \\
&= \frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a 2x\cos(n\pi x/a)dx \\
&= \frac{4}{(n\pi)^2\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a \sin(n\pi x/a)dx \\
&= \frac{-4}{(n\pi)^3\sinh(n\pi b/a)}(\cos(n\pi)-1) \\
&= \begin{cases} \frac{8}{(n\pi)^3\sinh(n\pi b/a)} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 1.10.
Lösen Sie mittels Polarkoordinaten (r,ϕ) und der Fouriermethode die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im Halbkreis $\Omega := \{r < 1, 0 < \phi < \pi\}$ unter den Randbedingungen, dass u auf dem Kreisdurchmesser verschwindet und $u = \pi\sin(\phi) - \sin(2\phi)$ auf dem Kreisbogen $r = 1$ gilt.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.10.
Die Laplace-Gleichung lautet in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Aus dem Produktansatz $u = R(r)\Phi(\phi)$ ergibt sich daher $R''(r)\Phi(\phi) + R'(r)\Phi(\phi)/r + R(r)\Phi''(\phi)/r^2 = 0$. Also gilt $\Phi'' = \lambda\Phi$ sowie $r^2R'' + rR' + \lambda R = 0$ für ein λ.
Nun hat das Eigenwertproblem $\Phi'' = \lambda\Phi$ unter den Randbedingungen $\Phi(0) = 0 = \Phi(\pi)$ die Lösungen $\lambda_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen Eigenfunktionen $\Phi_n(\phi) = \sin(n\phi)$, und durch den Ansatz $R(r) = r^\alpha$ ermittelt man die allgemeine Lösung von $r^2R'' + rR' + \lambda_n R = 0$ wegen $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm n$ als $R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$.
Also lautet der Fourier-Ansatz $u(r,\phi) = \sum_{n=1}^\infty (C_n r^n + D_n r^{-n})\sin(n\phi)$. Da u auch für $r = 0$ definiert sein muß, müssen alle $D_n = 0$ sein, und aus $u = \pi\sin(\phi) - \sin(2\phi)$ ergibt sich dann $C_1 = \pi$, $C_2 = -1$ und ansonsten $C_n = 0$. Somit lautet die Lösung $u(r,\phi) = \pi r\sin(\phi) - r^2\sin(2\phi)$.

Zusatzaufgabe 1.11.
Fassen Sie die Halbebene $\Omega := \{(x,y)|y > 0\}$ als einen Halbkreis mit unendlichem Radius auf und lösen Sie darin die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ unter der Randbedingung $u(x,0) = 1/x$ sowie der Forderung, dass u für $(x,y) \to \infty$ beschränkt bleibt.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.11.
Wieder machen wir wie in Aufgabe 7.2 den Produktansatz in Polarkoordinaten, hier haben wir aber keine homogenen Randbedingungen zur Verfügung. Jedoch sind die einzigen beschränkten Lösungen von $\Phi'' = -\lambda\Phi$ diejenigen zu $\lambda > 0$, d.h. $A_\lambda\cos(\sqrt{\lambda}\phi) + B_\lambda\sin(\sqrt{\lambda}\phi)$, bzw. die Konstanten zu $\lambda = 0$ (nichttriviale Konstanten kann man aber sofort ausschließen, da sonst $u(x,0)$ für $x \to \pm\infty$ nicht gegen 0 laufen würde). Nun ist aber bei $\phi = 0$ nur der Kosinus-Anteil relevant, und da sich bei $\phi = \pi$ dieselbe Konstante wie bei $\phi = 0$ ergeben muß, kommt nur $\sqrt{\lambda} = n$ für $n \in \mathbb{N}$ in Frage. Also erhält man als Ansatz

$$u(r,\phi) = \sum_{n=1}^\infty \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)(A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)) \quad ,$$

wobei man eine der Konstanten im Quadrupel (A_n, B_n, C_n, D_n) frei wählen kann. Die geforderte Beschränkheit liefert sofort $C_n = 0$. Die Lösungen $B_n r^{-n}\sin(n\phi)$ erfüllen alle die homogene Randbedingung $u(x,0) = 0$ und sind beschränkt für $r \to \infty$, also kann man sie zu jeder partikulären Lösung dazuaddieren.

Eine partikuläre Lösung erhält man aus $u(x,0) = 1/x$ durch Koeffizientenvergleich in $1/r = \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-n}$ sowie $-1/r = \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-n}(-1)^n$. Daraus ergibt sich $D_1 = 1$ und ansonsten $D_n = 0$, eine partikuläre Lösung lautet also $u(r,\phi) = \frac{\cos(\phi)}{r}$ (eine Probe bestätigt dies). Jede andere Lösung erhält man durch Addition von $\sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n}\sin(n\phi)$, wobei diese Funktionen nahe des Nullpunktes allerdings nicht beschränkt sind, es sei denn, man schaut sie sich gerade entlang der Winkel $\phi = 0, \pi$ an.

Zusatzaufgabe 1.12.
Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im Halbstreifen $\{(x,y)|0 < x < \pi, \quad y > 0\}$ unter den Randbedingungen $u(0,y) = 0 = u(\pi,y)$, $u(x,0) = 1$ und der Forderung, daß u beschränkt bleibt.

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.12.
Der Produkt-Ansatz $u = X(x)Y(y)$ in kartesischen Koordinaten liefert $X''Y + Y''X = 0$ und somit $X'' = \lambda X$, $Y'' = -\lambda Y$. Die Eigenwertgleichung $X'' = \lambda X$ hat unter den Randbedingungen $X(0) = 0 = X(\pi)$ die Lösung $\lambda = -n^2$ mit Eigenfunktionen $X_n(x) = \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $Y'' = -\lambda_n Y = n^2 Y$ hat nun die allgemeine Lösung $A_n \exp(ny) + B_n \exp(-ny)$, also ist der Fourier-Ansatz

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \exp(ny) + B_n \exp(-ny)) \sin(nx)$$

Aus der Beschränktheit von $u(x,y)$ für $y \to \infty$ folgt $A_n = 0$, und aus $1 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$ folgt $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$, also ist $B_n = \frac{4}{n\pi}$ für ungerade n und ansonsten Null. Daher lautet die Lösung

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \exp(-(2n+1)y)\sin((2n+1)x) \quad .$$

Man bemerke, daß die Reihe in den Eckpunkten $(0,0)$ und $(\pi,0)$ nicht gegen 1 konvergiert.

Zusatzaufgabe 1.13.
Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung innerhalb der ringförmigen Platte $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ unter den Annahmen, dass der äußere Rand der Platte perfekt isoliert ist und der innere Rand auf Temperatur $\sin^2(\phi)$ gehalten wird (wobei ϕ die Winkelvariable auf dem inneren Rand ist). Welche Temperatur muß die Isolation auf dem äußeren Rand aushalten?

Lösung zur Zusatzaufgabe 1.13.
Der Fourieransatz lautet

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2}(C_0 + D_0 \ln(r)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) \quad ,$$

wobei man in jedem Quadrupel (A_n, B_n, C_n, D_n) von Koeffizienten einen frei wählen kann.
In $r = 1$ soll $u(1,\phi) = \sin^2(\phi)$ gelten, während in $r = 2$ die Bedingung $u_r(2,\phi) = 0$ gelten soll. Daraus ergibt sich

$$\sin^2(\phi) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n)(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi))$$

sowie

$$\frac{D_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n 2^{n-1} - D_n 2^{-(n+1)}\right)(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) = 0.$$

Nutzt man nun

$$\sin^2(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\phi),$$

so liefert die erste Formel $C_0 = 1$, $A_2(C_2 + D_2) = -\frac{1}{2}$ und ansonsten $A_n(C_n + D_n) = 0 = B_n(C_n + D_n)$, während die zweite Formel $D_0 = 0$, sowie

$$A_n(C_n 2^{n-1} - D_n 2^{-(n+1)}) = 0 = B_n(C_n 2^{n-1} - D_n 2^{-(n+1)})$$

liefert.
Also gilt $C_0 = 1$ und $A_2(C_2 + D_2) = -\frac{1}{2}$, $A_2(2C_2 - \frac{1}{8}D_2) = 0$ und somit z.B. $D_2 = 16C_2$ und bei Wahl von $A_2 = 1$ (man hat ja eine Wahlfreiheit in jedem Quadrupel (A_n, B_n, C_n, D_n)) dann $C_2 = -\frac{1}{34}$, $D_2 = -\frac{8}{17}$, während alle anderen Koeffizienten verschwinden. Somit lautet die Lösung

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} - (\frac{r^2}{34} + \frac{8}{17r^2})\cos(2\phi).$$

Die Isolation auf dem äußeren Rand muß also die Temperatur $\frac{1}{2} + \frac{4}{17} = \frac{25}{34}$ aushalten, d.h. viel weniger als die auf dem inneren Rand maximal herrschende Temperatur 1.

Quellen:
Jochen Merker, "Übungsaufgaben WS 2009/10: Elementare Partielle DGL", Universität Rostock.
Peter Takáč, "Vorlesungsmitschriften WS 2009/10: Elementare Partielle DGL", Universität Rostock.
Lawrence C. Evans, "Partial Differential equations", AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
H. F. Weinberger, "A First Course in PDE", Dover Publications, New York, 1995.

Dieses Zusatzmaterial kann durchaus (Tipp-) Fehler enthalten, falls euch also etwas falsch vorkommt, so fragt lieber nocheinmal nach.