**Proseminar elementare Finanzmathematik** **01.07.2008**
**Carsten Erdmann**

# Bewertung von Zahlungsströmen

**0.1. Wiederholung.** Für jeden ungerichteten Zahlungsstrom $Z$ gilt

$$Z = Z_1 - Z_2, \quad Z_i \in \mathscr{Z}_g, \quad (Z_1(0) = 0 \;\vee\; Z_2(0) = 0) \Rightarrow Z_+ \leq Z_1, \quad Z_- \leq Z_2. \tag{0.1.1}$$

Eine (diskrete) Zeitrente bestehend aus Zahlungen $z_0, z_1, ... \geq 0$ zu Zeitpunkten $t_0, t_1, ... \geq 0$

$$Z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j 1_{[t_j,\infty)}(t), \qquad t \geq 0, \tag{0.1.2}$$

ist ein (deterministischer gerichteter) Zahlungsstrom.

**1.1. Definition.** Eine Bewertung von Zahlungsströmen ist eine Abbildung

$$W : [0,\infty) \times \mathscr{Z} \to [-\infty, +\infty].$$

An dieser Stelle wird $W(t, Z)$ als Wert des gesamten Zahlungsstromes $Z \in \mathscr{Z}$ zu einer Zeit $t \geq 0$ interpretiert.
Eine Bewertung $W$ heißt *regulär*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

*Endlichkeit:*

$$W(t, Z) \in \mathbb{R}^1, \qquad t \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \text{ mit } Z(\infty) < \infty. \tag{1.1.1}$$

*Sensitivität:*

$$W(t, \epsilon_u) \neq 0, \qquad t, u \geq 0 \quad (\epsilon_u := 1_{[u,\infty)}). \tag{1.1.2}$$

*Additivität:*

$$W(t, Z_1 + Z_2) = W(t, Z_1) + W(t, Z_2), \;\; t \geq 0, \quad Z_i \in \mathscr{Z} \quad \text{mit} \quad Z_1 + Z_2 \in \mathscr{Z}. \tag{1.1.3}$$

*Monotone Stetigkeit:*

$$W(\cdot, Z) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), \;\; (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{Z}_g. \tag{1.1.4}$$

*Unmittelbarkeit*

$$u \mapsto W(t, \epsilon_u) \quad \text{ist rechtsseitig stetig}, \quad t \geq 0. \tag{1.1.5}$$

*Konsistenz*

$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, W(u, Z)\epsilon_u), \quad u \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \text{ mit } Z(\infty) < \infty. \tag{1.1.6}$$

## 1.2. Satz. *(Norberg)*

(a) Sei $K : [0,\infty) \mapsto [1,\infty)$ eine Kapitalfunktion. Dann definiert

$$W : [0,\infty) \times \mathscr{Z} \ni (t,Z) \mapsto K(t) \cdot a(Z) \in [-\infty,+\infty] \tag{1.2.1}$$

eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen.

(b) Ist $W : [0,\infty) \times \mathscr{Z} \to [-\infty,+\infty]$ eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen, so existiert genau eine Kapitalfunktion $K : [0,\infty) \to [1,\infty)$ mit der Eigenschaft (1.2.1). Diese ist gegeben durch

$$K(t) := W(t,\epsilon_0), \qquad t \geq 0. \tag{1.2.2}$$

Im Folgenden werden wir verschiedene Hilfssätze formulieren, um den Satz von *Norberg* zu beweisen.

**1.3. Hilfssatz.** Seien $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ rechtsseitig stetig, monoton nichtwachsend und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g$ monoton nichtfallend mit $Z := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{Z}_g$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int G dZ_n = \int G dZ. \tag{1.3.1}$$

***Beweis.***
Aus $G \geq 0$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtfallend folgt

$$\int_{[0,m)} G dZ_n \leq \int_{[0,m)} G dZ_{n+1}, \qquad m,n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.2}$$

Für $G = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{[0,a_i)}, \alpha_i \geq 0\,,\ a_i > 0,$ folgt

$$\int_{[0,m)} G dZ_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i Z_n(a_i \wedge m - 0).$$

Folglich ist auch $(\int G dZ_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton nichtfallend und $\lim_{n\to\infty} \int G dZ_n$ existiert. Andererseits ist $(\int_{[0,m)} G dZ_n)_{m\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton nichtfallend in $m$. Dies führt auf

$$\lim_{n\to\infty} \int G dZ_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{[0,m)} G dZ_n \geq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,m)} G dZ_n,$$

es folgt mit (1.3.2)

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{[0,m)} G dZ_n \leq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,m)} G dZ_n.$$

Insgesamt also

$$\lim_{n\to\infty}\int GdZ_n = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,m)} GdZ_n.$$

Weiterhin erhält man aus der Tatsache, dass $(Z_n(t))$ in $n$ und $t$ monoton nichtfallend ist, $Z_n(\cdot - 0) \nearrow Z(\cdot - 0)$. Mittels des Satzes von Levi und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{[0,m)} GdZ_n \overset{part.Int.}{=} \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(G(m-0)Z_n(m-0) - \int_{[0,m)} Z_n(\cdot-0)dG\right) \\
&\overset{Levi}{=} \lim_{m\to\infty}\left(G(m-0)Z(m-0) - \int_{[0,m)} Z(\cdot-0)dG\right) \overset{part.Int.}{=} \lim_{m\to\infty}\int_{[0,m)} GdZ = \int GdZ.
\end{aligned}$$

□

***Beweis von 1.2. (a)***

Wir zeigen, dass die Eigenschaften (1.1.1) bis (1.1.6) erfüllt sind.

1. Sei $Z \in \mathscr{Z}_g$ mit $Z(\infty) < \infty$. Dann definiert $Z$ ein endliches Maß und $a(Z)$ ist endlich.
2. $W(t,\epsilon_u) \overset{(1.2.1)}{=} K(t)\cdot a(\epsilon_u) = K(t)/K(u) > 0, \qquad t,u \geq 0.$
3. Seien $Z_i \in \mathscr{Z}$ mit $Z_1 + Z_2 \in \mathscr{Z}$ und so, dass nicht einer der beiden Barwerte gleich $+\infty$ und der andere gleich $-\infty$ ist. Dann gilt für alle $t \geq 0$

   $$W(t,Z_1) + W(t,Z_2) \overset{(1.2.1)}{=} K(t)(a(Z_1)+a(Z_2)) = K(t)a(Z_1+Z_2) \overset{(1.2.1)}{=} W(t,Z_1+Z_2).$$

4. Einsetzen von $G := 1/K$ in (1.3.1) ergibt

   $$a(Z) = \int \frac{1}{K}dZ \overset{(1.3.1)}{=} \lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{K}dZ_n = \lim_{n\to\infty} a(Z_n), \qquad 0 \leq Z_n \nearrow Z.$$

5. folgt aus (1.2.1) und der Rechtsstetigkeit von K.
6. Seien $t,u \geq 0$ und $Z \in \mathscr{Z}_g$ mit $Z(\infty) < \infty$. Dann gilt

   $$W(t, W(u,Z)\cdot\epsilon_u) \overset{(1.2.1)}{=} K(t)\cdot a(W(u,Z)\cdot\epsilon_u) = \frac{K(t)}{K(u)}\cdot W(u,Z) = W(t,Z).$$

□

**1.4. Hilfssatz.** Für jede reguläre Bewertung $W$ von Zahlungsströmen gelten

(i)
$$W(\cdot, 0) \equiv 0, \tag{1.4.1}$$

(ii)
$$W(\cdot, Z) \geq 0, \qquad Z \in \mathscr{Z}, \ Z \geq 0, \tag{1.4.2}$$

(iii)
$$W(\cdot, -Z) = -W(\cdot, Z), \qquad Z \in \mathscr{Z}_g, \tag{1.4.3}$$

(iv)
$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, Z_+) - W(\cdot, Z_-), \qquad Z \in \mathscr{Z}. \tag{1.4.4}$$

***Beweis.***
zu (i):

$$W(t,0) = W(t, 0+0) \overset{Additivität}{=} W(t,0) + W(t,0) \overset{Endlichkeit}{=} 2 \cdot W(t,0) \in \mathbb{R}^1, \qquad t \geq 0.$$

zu (ii): Für alle $Z \geq 0$ ist $Z = Z \vee 0$, sodass mit (i) und (1.1.4) folgt

$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, Z) \vee W(\cdot, 0) \geq 0.$$

zu (iii): Seien $Z \in \mathscr{Z}_g$ und $t \geq 0$. Sei zunächst $W(t, Z) < \infty$. Dann folgt

$$0 \overset{(i)}{=} W(t, 0) = W(t, Z - Z) \overset{Additivität}{=} W(t, Z) + W(t, -Z),$$

also $W(t, -Z) = -W(t, Z)$.
Sei nun $W(t, Z) = \infty$. Unter der Annahme $W(t, -Z) > -\infty$ entsteht ein Widerspruch:

$$0 \overset{(i)}{=} W(t, Z - Z) \overset{Additivität}{=} W(t, Z) + W(t, -Z) = \infty.$$

zu (iv): $Z \in \mathscr{Z} \Rightarrow Z_+(\infty) < \infty$ oder $Z_-(\infty) < \infty$ nach (0.1.1), es folgt

$$W(\cdot, Z) \overset{(0.1.1)}{=} W(\cdot, Z_+ - Z_-) \overset{Additivität}{=} W(\cdot, Z_+) + W(\cdot, -Z_-) \overset{(iii)}{=} W(\cdot, Z_+) - W(\cdot, Z_-).$$

$\square$

## 1.5. Hilfssatz.

(a) Für jedes beschränkte $Z \in \mathscr{Z}_g$ existiert eine monoton nichtfallende Folge von Zeitrenten $(Z_n)_n$ wie in (0.1.2), die gleichmäßig gegen $Z$ konvergiert.

(b) Für jede reguläre Bewertung W und jede Zeitrente (0.1.2) gilt

$$W(\cdot, Z) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j W(\cdot, \epsilon_{t_j}). \tag{1.5.1}$$

***Beweis.***
zu (a): O.B.d.A. können wir annehmen, dass $Z(\infty) = 1$. Weiterhin setzen wir

$$Z_n(t) := \sum_{i=0}^{2^n} \frac{i}{2^n} \cdot 1_{\left\{\frac{i}{2^n} \le Z < \frac{i+1}{2^n}\right\}}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} 1_{[Z^{-1}(\frac{i}{2^n}),\infty)}(t).$$

zu (b): Es gilt

$$W(t, \frac{m}{n}\epsilon_u) \overset{Add.Endl.}{=} mW(t, \frac{1}{n}\epsilon_u) \overset{Add.Endl.}{=} \frac{m}{n} W(t, \epsilon_u) \qquad t, u \ge 0 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

und

$$W(t, z\epsilon_u) \overset{Endl.(1.4.3)}{=} z \cdot W(t, \epsilon_u), \qquad t, u \ge 0, z \in \mathbb{R}^1. \tag{1.5.2}$$

Also gilt für jede Zeitrente (0.1.2)

$$W(t, Z) \overset{Mono.Add.}{=} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n} W(t, z_j \epsilon_{t_j}) \overset{(1.5.2)(1.4.2)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} z_j W(t, \epsilon_{t_j}), \qquad t \ge 0.$$

□

**1.6. Hilfssatz.** Für jede reguläre Bewertung $W$ ist $K$ gemäß (1.2.2) eine Kapitalfunktion und es gilt

$$W(t, \epsilon_u) = \frac{K(t)}{K(u)}, \qquad t, u \geq 0. \tag{1.6.1}$$

Insbesondere gilt (1.2.1) für jede Zeitrente (0.1.2).

***Beweis.***
Ist $Z \in \mathscr{Z}_g$ eine Zeitrente (0.1.2), so folgt (1.2.1) unmittelbar aus Hilfssatz 1.5. und 1.6. Zum Nachweis von (1.6.1) setzt man $w(t,u) := W(t, \epsilon_u)$. Setzt man $Z = \epsilon_s$ in (1.1.6) ein, so folgt aus (1.5.2)

$$W(t, \epsilon_s) \stackrel{Konsistenz}{=} W(t, W(u, \epsilon_s)\epsilon_u) \stackrel{(1.5.2)}{=} W(u, \epsilon_s) \cdot W(t, \epsilon_u),$$

also

$$w(t,s) = w(u,s) \cdot w(t,u), \qquad s, t, u \geq 0. \tag{1.6.2}$$

Durch Einsetzen von $u = t$ folgt

$$w(t,t) \stackrel{Sensitivität}{=} 1, \qquad t \geq 0, \tag{1.6.3}$$

sodass sich mit $s = t$

$$w(t,u) = \frac{1}{w(u,t)}, \qquad t, u \geq 0, \tag{1.6.4}$$

ergibt.

Zusammengefasst gelten nun die folgenden Aussagen

1. $K(0) = w(0,0) \stackrel{(1.6.3)}{=} 1.$
2. $K : t \mapsto w(t,0) = w(0,t)^{-1}$ ist rechtsseitig stetig. (Unmittelbarkeit)
3. $\frac{K(t)}{K(u)} \stackrel{Def.vonw}{=} \frac{w(t,0)}{w(u,0)} \stackrel{(1.6.2)s=0}{=} w(t,u) \stackrel{Def.vonw}{=} W(t, \epsilon_u) \quad t, u \geq 0.$
4. K ist monoton nichtfallend $(0 \leq s \leq t \Rightarrow 0 \leq Z := 1_{[s,\infty)} - 1_{[t,\infty)}) \Rightarrow$

$$0 \stackrel{(1.4.2)}{\leq} W(0, Z) \stackrel{Add.(1.4.1)}{=} W(0, \epsilon_s) - W(0, \epsilon_t) \stackrel{(1.6.1)}{=} \frac{1}{K(s)} - \frac{1}{K(t)}.$$

□

***Beweis von 1.2 (b)***

Eindeutigkeit: Aus (1.2.1) folgt mit $a(\epsilon_0) = \frac{1}{K(0)} = 1$

$$K(t) = \frac{K(t)}{1} = \frac{K(t)}{K(0)} \overset{(1.6.1)}{=} W(t, \epsilon_0), \qquad t \geq 0.$$

Existenz: Es genügt die Beziehung (1.2.1) nur für $Z \in \mathscr{X}_g$ mit kompaktem Träger nachzuweisen. Dies ist deshalb ausreichend, weil $Z = \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ und für reguläre Bewertungen die Monotonie, (1.2.1) und (1.4.4) gilt. Aus Hilfssatz 1.5 (a) wählen wir eine monoton nichtfallende Folge von Zeitrenten $(Z_n)$, die gleichmäßig gegen $Z$ konvergiert. Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$W(t, Z) \overset{Monotonie}{=} \lim_{n \to \infty} W(t, Z_n) \overset{HS(1.6)}{=} K(t) \cdot \lim_{n \to \infty} a(Z_n) \overset{Monotonie}{=} K(t) \cdot a(Z)$$

□

## 1.7. Bemerkung.

Die Voraussetzungen der monotonen Stetigkeit impliziert nicht diejenige der Unmittelbarkeit. Wir halten hier fest, dass punktweise

$$1_{(u,\infty)}(t) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)}(t), \qquad t, u \geq 0,$$

gilt, aber gleichmäßig folgendes gilt

$$1_{[u,\infty)} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)}.$$

Man bemerke, dass bei der gleichmäßigen Konvergenz $u$ in der Indikatorfunktion enthalten ist, bei der punktweisen aber nicht. Daher kann man, wenn das Supremum als kleinste obere Schranke im Funktionenverband $\mathscr{X}_g$ interpretiert wird, die Bedingungen der Additivität und Unmittelbarkeit zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} W(\cdot, Z) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), \quad (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{X}_g \nearrow, \text{beschränkt,} \\ Z := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} Z_n \qquad (Z_n \in \mathscr{X}_g \ \forall n \in \mathbb{N}.) \end{aligned} \tag{1.1.4'}$$

Diese Eigenschaft wird auch als *starke Beppo-Levi-Eigenschaft* bezeichnet. Offenbar impliziert die starke Beppo-Levi-Eigenschaft die Unmittelbarkeit und die monotone Konvergenz. Aus Hilfssatz (1.3) ist aber auch bekannt, dass jede Bewertung $W$ die starke Beppo-Levi-Eigenschaft erfüllt. Da nach dem Satz von Norberg jedoch eine jede Bewertung $W$ von der Form (1.2.1) ist, folgt die starke Beppo-Levi-Eigenschaft also auch aus der Unmittelbarkeit und der monotonen Konvergenz, weshalb eine Zusammenfassung möglich ist.

# Literatur

[1] Hartmut Milbrodt und Manfred Helbig *"Mathematische Methoden der Personenversicherung"*, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 1999