Bewertung von Zahlungsströmen

Carsten Erdmann

Universität Rostock

01.07.2008

Definition: Bewertung von Zahlungsströmen

Eine Bewertung von Zahlungsströmen ist eine Abbildung

$$W : [0, \infty) \times \mathscr{Z} \to [-\infty, +\infty].$$

An dieser Stelle wird $W(t, Z)$ als Wert des gesamten Zahlungsstromes $Z \in \mathscr{Z}$ zu einer Zeit $t \geq 0$ interpretiert.

Definition: Bewertung von Zahlungsströmen

Eine Bewertung von Zahlungsströmen ist eine Abbildung

$$W : [0, \infty) \times \mathscr{Z} \to [-\infty, +\infty].$$

An dieser Stelle wird $W(t, Z)$ als Wert des gesamten Zahlungsstromes $Z \in \mathscr{Z}$ zu einer Zeit $t \geq 0$ interpretiert.

reguläre Zahlungsströme

Endlichkeit

$$W(t, Z) \in \mathbb{R}^1, \qquad t \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \text{ mit } Z(\infty) < \infty$$

reguläre Zahlungsströme

Endlichkeit

$$W(t,Z) \in \mathbb{R}^1, \qquad t \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z(\infty) < \infty$$

Sensitivität

$$W(t,\epsilon_u) \neq 0 \qquad t,u \geq 0 \quad (\epsilon_u := 1_{u,\infty})$$

reguläre Zahlungsströme

Endlichkeit

$$W(t,Z) \in \mathbb{R}^1, \qquad t \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z(\infty) < \infty$$

Sensitivität

$$W(t,\epsilon_u) \neq 0 \qquad t,u \geq 0 \quad (\epsilon_u := 1_{u,\infty})$$

Additivität

$$W(t, Z_1 + Z_2) = W(t, Z_1) + W(t, Z_2), \quad t \geq 0,$$

$$Z_i \in \mathscr{Z} \quad \text{mit} \quad Z_1 + Z_2 \in Z$$

reguläre Zahlungsströme

Endlichkeit

$$W(t, Z) \in \mathbb{R}^1, \qquad t \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z(\infty) < \infty$$

Sensitivität

$$W(t, \epsilon_u) \neq 0 \qquad t, u \geq 0 \quad (\epsilon_u := 1_{u,\infty})$$

Additivität

$$W(t, Z_1 + Z_2) = W(t, Z_1) + W(t, Z_2), \quad t \geq 0,$$

$$Z_i \in \mathscr{Z} \quad \text{mit} \quad Z_1 + Z_2 \in Z$$

reguläre Zahlungsströme

Monotone Stetigkeit

$$W(\cdot, Z) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{Z}_g$$

Unmittelbarkeit

$$u \mapsto W(t, \epsilon_u) \quad \text{ist rechtsseitig stetig,} \quad t \geq 0$$

reguläre Zahlungsströme

Monotone Stetigkeit

$$W(\cdot, Z) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{Z}_g$$

Unmittelbarkeit

$$u \mapsto W(t, \epsilon_u) \quad \text{ist rechtsseitig stetig,} \quad t \geq 0$$

Konsistenz

$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, W(u, Z)\epsilon_u), \quad u \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z(\infty) < \infty$$

reguläre Zahlungsströme

Monotone Stetigkeit

$$W(\cdot, Z) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{Z}_g$$

Unmittelbarkeit

$$u \mapsto W(t, \epsilon_u) \quad \text{ist rechtsseitig stetig,} \quad t \geq 0$$

Konsistenz

$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, W(u, Z)\epsilon_u), \quad u \geq 0, \quad Z \in \mathscr{Z}_g \quad \text{mit} \quad Z(\infty) < \infty$$

Satz von Norberg

Sei $K : [0, \infty) \mapsto [1, \infty)$ eine Kapitalfunktion. Dann definiert

$$W : [0, \infty) \times \mathscr{Z} \ni (t, Z) \mapsto K(t) \cdot a(Z) \in [-\infty, +\infty] \qquad (1.2.1)$$

eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen.

Ist $W : [0, \infty) \times \mathscr{Z} \to [-\infty, +\infty]$ eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen, so existiert genau eine Kapitalfunktion $K : [0, \infty) \to [1, \infty)$ mit der Eigenschaft (3.2.1). Diese ist gegeben durch

$$K(t) := W(t, \epsilon_0), \qquad t \geq 0. \qquad (1.2.2)$$

Satz von Norberg

Sei $K : [0,\infty) \mapsto [1,\infty)$ eine Kapitalfunktion. Dann definiert

$$W : [0,\infty) \times \mathscr{Z} \ni (t,Z) \mapsto K(t) \cdot a(Z) \in [-\infty,+\infty] \qquad (1.2.1)$$

eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen.

Ist $W : [0,\infty) \times \mathscr{Z} \to [-\infty,+\infty]$ eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen, so existiert genau eine Kapitalfunktion $K : [0,\infty) \to [1,\infty)$ mit der Eigenschaft (3.2.1). Diese ist gegeben durch

$$K(t) := W(t,\epsilon_0), \qquad t \geq 0. \qquad (1.2.2)$$

Hilfssatz 1

Seien $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ rechtsseitig stetig, monoton nichtwachsend und $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g$ monoton nichtfallend mit $Z := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{Z}_g$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int G dZ_n = \int G dZ. \tag{1.3.1}$$

Hilfssatz 2

Für jede reguläre Bewertung W von Zahlungsströmen gelten

$$W(\cdot, 0) \equiv 0, \tag{1.4.1}$$

$$W(\cdot, Z) \geq 0, \qquad Z \in \mathscr{Z}, Z \geq 0, \tag{1.4.2}$$

Hilfssatz 2

Für jede reguläre Bewertung W von Zahlungsströmen gelten

$$W(\cdot, 0) \equiv 0, \tag{1.4.1}$$

$$W(\cdot, Z) \geq 0, \qquad Z \in \mathscr{Z}, Z \geq 0, \tag{1.4.2}$$

$$W(\cdot, -Z) = -W(\cdot, Z), \qquad Z \in \mathscr{Z}_g \tag{1.4.3}$$

Hilfssatz 2

Für jede reguläre Bewertung W von Zahlungsströmen gelten

$$W(\cdot, 0) \equiv 0, \tag{1.4.1}$$

$$W(\cdot, Z) \geq 0, \qquad Z \in \mathscr{Z}, Z \geq 0, \tag{1.4.2}$$

$$W(\cdot, -Z) = -W(\cdot, Z), \qquad Z \in \mathscr{Z}_g \tag{1.4.3}$$

$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, Z_+) - W(\cdot, Z_-), \qquad Z \in \mathscr{Z}. \tag{1.4.4}$$

Hilfssatz 2

Für jede reguläre Bewertung W von Zahlungsströmen gelten

$$W(\cdot, 0) \equiv 0, \tag{1.4.1}$$

$$W(\cdot, Z) \geq 0, \qquad Z \in \mathscr{Z}, Z \geq 0, \tag{1.4.2}$$

$$W(\cdot, -Z) = -W(\cdot, Z), \qquad Z \in \mathscr{Z}_g \tag{1.4.3}$$

$$W(\cdot, Z) = W(\cdot, Z_+) - W(\cdot, Z_-), \qquad Z \in \mathscr{Z}. \tag{1.4.4}$$

Hilfssatz 3

- Für jedes beschränkte $Z \in \mathscr{Z}_g$ existiert eine monoton nichtfallende Folge von Zeitrenten $(Z_n)_n$, die gleichmäßig gegen Z konvergiert.
- Für jede reguläre Bewertung W und jede Zeitrente gilt

$$W(\cdot, Z) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j W(\cdot, \epsilon_{t_j}). \tag{1.5.1}$$

Hilfssatz 3

- Für jedes beschränkte $Z \in \mathscr{Z}_g$ existiert eine monoton nichtfallende Folge von Zeitrenten $(Z_n)_n$, die gleichmäßig gegen Z konvergiert.
- Für jede reguläre Bewertung W und jede Zeitrente gilt

$$W(\cdot, Z) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j W(\cdot, \epsilon_{t_j}). \tag{1.5.1}$$

Hilfssatz 4

Für jede reguläre Bewertung W ist K gemäß (1.2.1) eine Kapitalfunktion und es gilt

$$W(t, \epsilon_u) = \frac{K(t)}{K(u)}, \qquad t, u \geq 0. \tag{1.6.1}$$

Insbesondere gilt (1.2.1) für jede Zeitrente.

starke Beppo-Levi Eigenschaft

Die Voraussetzungen der monotonen Stetigkeit impliziert nicht diejenige der Unmittelbarkeit. Ausgehend von der Beobachtung, dass punktweise

$$1_{(u,\infty)}(t) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)}(t), \qquad t, u \geq 0,$$

aber

$$1_{[u,\infty)} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)},$$

wenn das Supremum als kleinste obere Schranke im Funktionenverband $\mathscr{L}_g$ interpretiert wird, lassen sich die Bedingungen der Additivität und Unmittelbarkeit zusammenfassen zu

starke Beppo-Levi Eigenschaft

Die Voraussetzungen der monotonen Stetigkeit impliziert nicht diejenige der Unmittelbarkeit. Ausgehend von der Beobachtung, dass punktweise

$$1_{(u,\infty)}(t) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)}(t), \qquad t, u \geq 0,$$

aber

$$1_{[u,\infty)} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)},$$

wenn das Supremum als kleinste obere Schranke im Funktionenverband $\mathscr{Z}_g$ interpretiert wird, lassen sich die Bedingungen der Additivität und Unmittelbarkeit zusammenfassen zu

$$W(\cdot, Z) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), \quad (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g \nearrow, \text{beschränkt}, \tag{1.1.4'}$$

starke Beppo-Levi Eigenschaft

Die Voraussetzungen der monotonen Stetigkeit impliziert nicht diejenige der Unmittelbarkeit. Ausgehend von der Beobachtung, dass punktweise

$$1_{(u,\infty)}(t) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)}(t), \qquad t, u \geq 0,$$

aber

$$1_{[u,\infty)} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} 1_{[u+\frac{1}{n},\infty)},$$

wenn das Supremum als kleinste obere Schranke im Funktionenverband $\mathscr{Z}_g$ interpretiert wird, lassen sich die Bedingungen der Additivität und Unmittelbarkeit zusammenfassen zu

$$W(\cdot, Z) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} W(\cdot, Z_n), \quad (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_g \nearrow, \text{beschränkt}, \tag{1.1.4'}$$

Kritik

noch Fragen oder Anmerkungen?