

Analytische Methoden und die Black-Scholes Modelle

Forschungskolloquium Partielle DGL

Carsten Erdmann

Universität Rostock
Institut für Mathematik

3.12.2010



Agenda

- 1 Grundlagen der Finanzmathematik
- 2 Das Ornstein-Uhlenbeck Volatilitätsmodell
- 3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in $L^2(\mathbb{R}^2)$
- 4 Analytizität der Lösung
- 5 Existenz und Eindeutigkeit in einem gewichteten $L^2(\mathbb{R}^2, \xi)$
- 6 Numerische Behandlung und Simulation



Brownsche Bewegung

eindimensionale Brownsche Bewegung

Eine **eindimensionale Brownsche Bewegung** ist ein reellwertiger Prozess mit stetigen Pfaden, $t \mapsto W_t(\omega)$ ($\omega \in \Omega$), für den gilt, dass

(B1) $W_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s.

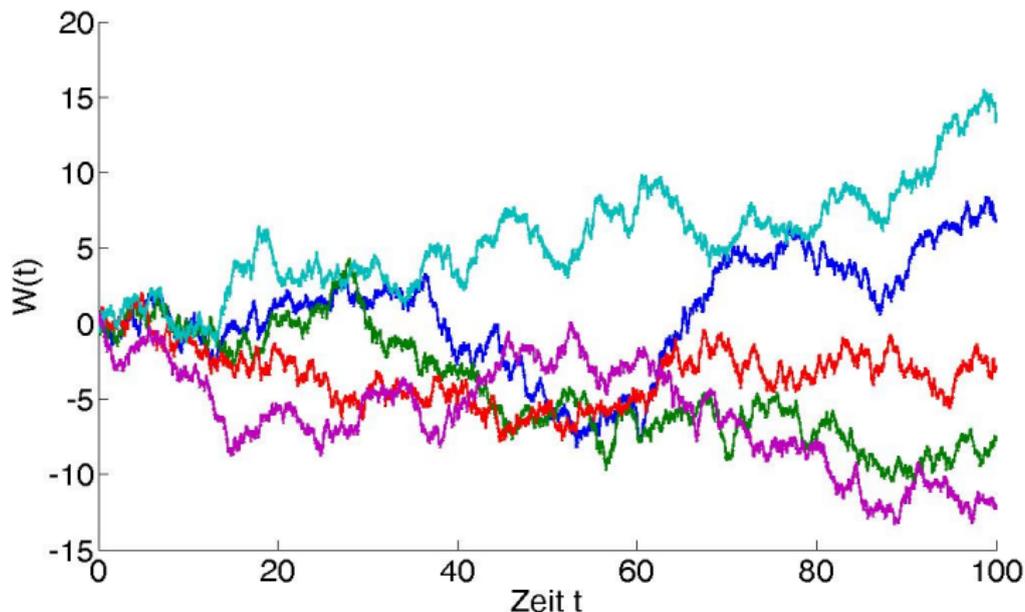
(B2) $\mathcal{L}(W_t - W_s | \mathbb{P}) = \mathcal{N}(0, t - s)$ für $0 \leq s < t$.

(B3) $W_t - W_s$ ist unabhängig von $W_u - W_r$ für
 $0 \leq r \leq u \leq s < t$.



Brownsche Bewegung

Beispiel: eindimensionale Brownsche Bewegung



Brownsche Bewegung

Definition: mehrdimensionale Brownsche Bewegung

Eine N -dimensionale Brownsche Bewegung ist ein \mathbb{R}^N -wertiger Prozess

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_N(t)),$$

dessen Komponenten W_i ($i = 1, \dots, N$) unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind.



Brownsche Bewegung

Beispiel: mehrdimensionale Brownsche Bewegung



Stochastisches Integral

Definition: einfacher stochastischer Prozess

Ein **stochastischer Prozess** $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ ist **einfach**, wenn eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m_\pi} = T$ ($m_\pi \in \mathbb{N}$) und beschränkte $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -messbare Zufallsvariablen $\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m_\pi$), sowie Φ_0 \mathcal{F}_0 -messbar, existieren, so dass $X_t(\omega)$ die folgende Darstellung besitzt

$$X_t(\omega) = X(t, \omega) = \Phi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{m_\pi} \Phi_i(\omega) \cdot 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$$

für alle $\omega \in \Omega$.



Stochastisches Integral

Definition: einfaches stochastisches Integral

Für einen einfachen Prozess $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ ist das **stochastische Integral** $I_t(X)$ für $t \in (t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, \dots, m_\pi$) definiert durch

$$I_t(X) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s dW_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$



Itô-Kalkül

Itô-Prozesse: Definition

$\{(X(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ wird als **reellwertiger Itô-Prozess** bezeichnet, wenn er für alle $t \geq 0$ die Darstellung

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \sum_{j=1}^M \int_0^t \sigma_j(s) dW_j(s)$$

\mathbb{P} -f.s. besitzt, wobei $X(0)$ \mathcal{F}_0 -messbar ist, sowie $\{\mu(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ und $\{\sigma(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ progressiv messbare Prozesse sind mit

$$\int_0^t |\mu(s)| ds < \infty, \quad \int_0^t \sigma_i^2(s) ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $t \geq 0$, $i = 1, \dots, M$.



Itô-Kalkül

Itô-Formel: Satz

Seien $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ ein N -dimensionaler Itô-Prozess und $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ eine $C^{1,2}$ -Funktion. Dann gilt \mathbb{P} -f.s.

$$\begin{aligned}
 f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) \\
 &+ \int_0^t f_s(s, X(s)) ds \\
 &+ \sum_{i=1}^N \int_0^t f_{x_i}(s, X(s)) dX_i(s) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t f_{x_i x_j}(s, X(s)) d\langle X_i, X_j \rangle_s
 \end{aligned}$$



Itô-Kalkül

Itô-Formel: Satz

alternative Schreibweise

Oft wird die Itô-Formel in der symbolischen Differentialschreibweise

$$\begin{aligned}df(t, X(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X) dt + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X) dX_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X) dX_i dX_j\end{aligned}$$

geschrieben.



Itô-Kalkül

Itô-Formel: Beweisskizze

Die Grundidee des Beweises basiert darauf, die Itô-Formel erst einmal für Stopp-Prozesse zu beweisen.



Itô-Kalkül

Itô-Formel: Beweisskizze

$$f(t, X^{(n)}(t)) - f(0, X^{(n)}(0)) = (*) + (**) + (***)$$

$$(*) = \sum_{k=1}^{m_\pi} f_t \left(\tau, X^{(n)}(t_{k-1}) \right) (t_k - t_{k-1})$$

$$(**) = \sum_{k=1}^{m_\pi} \sum_{j=1}^N f_{x_j} \left(t_{k-1}, X^{(n)}(t_{k-1}) \right) \left(X_j^{(n)}(t_k) - X_j^{(n)}(t_{k-1}) \right)$$

$$(***) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_\pi} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j} \left(t_{k-1}, \eta_k \right)$$

$$\cdot \left(X_i^{(n)}(t_k) - X_i^{(n)}(t_{k-1}) \right) \left(X_j^{(n)}(t_k) - X_j^{(n)}(t_{k-1}) \right)$$



Itô-Kalkül

Itô-Formel: Beweisskizze

Zum Schluß lässt man die Stoppzeiten gegen ∞ laufen und erhält aufgrund der Stetigkeit von Itô-Prozessen die Behauptung.



Finanzmathematische Begriffe

Definition: Preis-Prozess

Ein **Preis-Prozess** $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ ist ein N -dimensionaler stochastischer Prozess

$$S_t = S(t) = (S_0(t), \dots, S_{N-1}(t)),$$

der den Preis der einzelnen Assets im Marktmodell zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ angibt. Wir nehmen stets an, dass $S_0(t)$ den Preis des risikofreien Assets zur Zeit t repräsentiert. Die zu dem Preis-Prozess $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ gehörige Filtration bezeichnen wir im Folgenden stets mit $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}_t^S\}_{t \in [0, T]}$.



Finanzmathematische Begriffe

Definition: Handelsstrategie

Eine Handelsstrategie

$$h_t = h(t) = (h_0(t), h_1(t), \dots, h_{N-1}(t))$$

ist ein N -dimensionaler \mathcal{F}_t^S -adaptierter Prozess, der die Anzahl der Einheiten angibt, die zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ von den zugrundeliegenden Assets und des zugrundeliegenden risikolosen Finanztitels gehalten werden. Dabei wird stets angenommen, dass

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T (h_i(t))^2 dt \right) < \infty \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad \int_0^T |h_0(t)| dt < \infty.$$



Finanzmathematische Begriffe

Definition: Werte-Prozess

Der **Werte-Prozess** $V^S(t, h)$ bezüglich der Handelstrategie $\{h_t\}_{t \in [0, T]}$ und des Preisprozesses $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ ist gegeben durch

$$V^S(t, h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{N-1} h_i(t) S_i(t).$$



Finanzmathematische Begriffe

Definition: Arbitrage

Eine **Arbitrage**-Möglichkeit auf einem Finanzmarkt ist eine selbstfinanzierende Handelstrategie h , so dass

$$V^S(0, h) = 0,$$

$$\mathbb{P}(V^S(T, h) \geq 0) = 1,$$

$$\mathbb{P}(V^S(T, h) > 0) > 0.$$



Black-Scholes Modell

Annahmen

- (F1) Leerverkäufe sind generell in unbegrenzter Höhe zugelassen.
- (F2) Es existieren keine Transaktionskosten oder Handelsbeschränkungen.
- (F3) Der Markt ist unendlich liquide.
- (F4) Der Assetpreis ist strikt positiv.
- (F5) Ein Asset ist beliebig teilbar.
- (F6) Der Markt ist arbitragefrei.
- (F7) Es werden keine Dividenden gezahlt.



Black-Scholes Modell

Definition

Das **Black-Scholes Modell** besteht aus zwei Assets, deren jeweilige Entwicklung wie folgt beschrieben werden kann

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

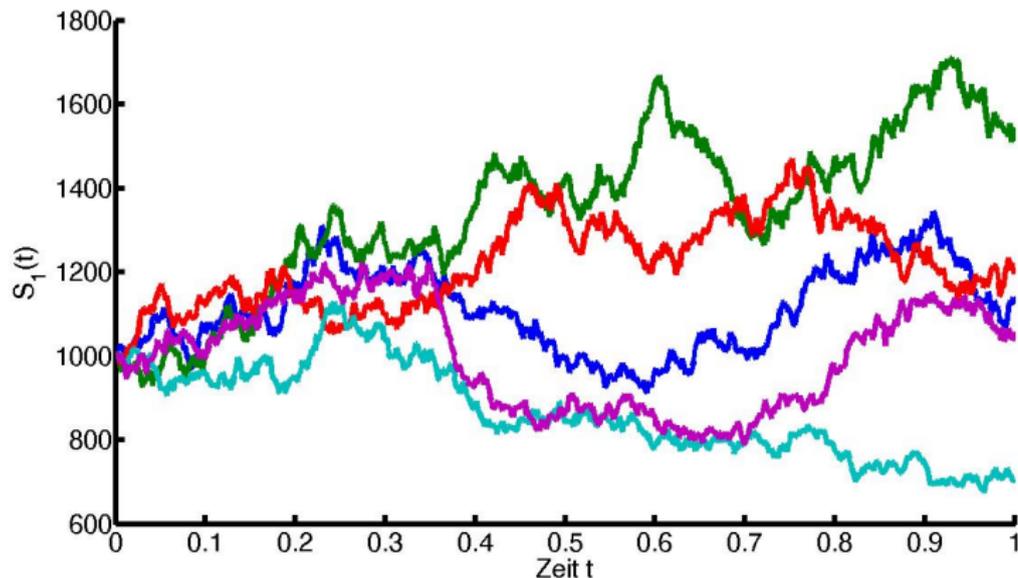
$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW(t),$$

wobei $r > 0$, μ und $\sigma > 0$ als konstant angenommen werden und $W(t)$ eine (Standard-)Brownsche Bewegung ist ($t \in [0, T]$).



Black-Scholes Modell

Beispiel: $S_1(0) = 1000$, $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.3$ und Zeitbereich $[0, 1]$



Black-Scholes Modell

lognormaler Assetpreis

Für den Aktienkurs im einfachen Black-Scholes Modell, gilt

$$S_1(t) = S_1(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right), \quad t \in [0, T].$$



Europäische Optionen

Definition

Eine **europäische Call-Option** ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht gibt, jedoch nicht die Pflicht, eine Einheit eines zugrundeliegenden Assets zu einem vorher vereinbarten Ausführungspreis K zum Ausführungszeitpunkt T zu kaufen.

Bezeichnet S_T den Preis des zugrundeliegenden Assets zum Ausführungszeitpunkt T , dann ist der Wert einer europäischen Call-Option zum Ausführungszeitpunkt T , seine sogenannte Auszahlung g , gegeben durch

$$g(S_T) = (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K & \text{für } S_T > K, \\ 0 & \text{für } S_T \leq K. \end{cases}$$



Black-Scholes Modell

Satz: Lösung

Der Preis $p_{BS}(x, t)$ einer Europäischen Call-Option zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$ beträgt im Black-Scholes Modell

$$p_{BS}(x, t) = xN(d_1(x, t)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(x, t)),$$

mit

$$d_1(x, t) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

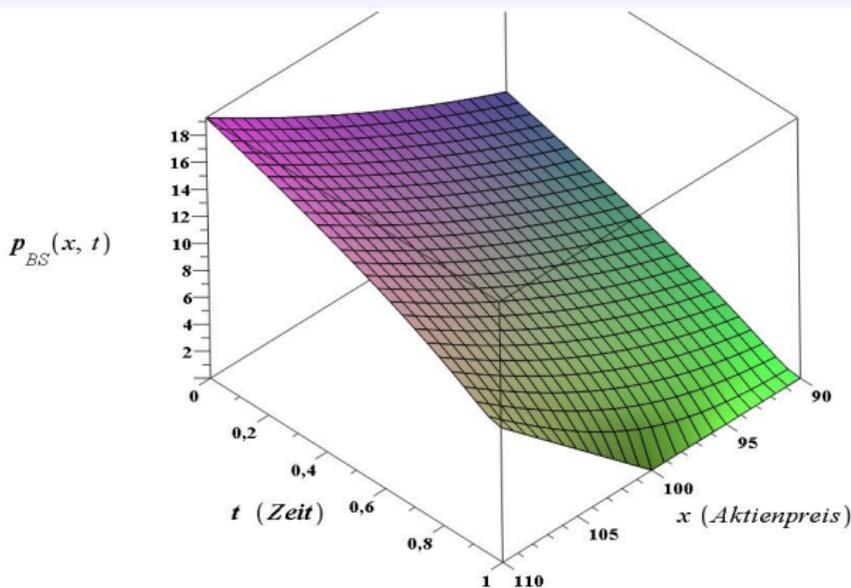
$$d_2(x, t) = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$



Black-Scholes Modell

Beispiel: Lösung für $K = 100$, $r = 0.02$, $\sigma = 0.3$ und Zeitbereich $[0, 1]$



Black-Scholes Modell

Put-Call Parität

Put-Call Parität

Seien ein europäischer Call und ein europäischer Put, beide mit Ausführungspreis K und Ausführungszeitpunkt T , gegeben.

Bezeichnen weiterhin $p_c(\cdot, \cdot) : (0, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und

$p_p(\cdot, \cdot) : (0, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörigen Preisfunktionen, dann gilt die folgende Beziehung

$$p_p(x, t) - p_c(x, t) = Ke^{-r(T-t)} - x, \quad (x, t) \in (0, \infty) \times [0, T].$$



Itô-Diffusion

Eine (zeit-abhängige) **Itô-Diffusion** ist ein stochastischer Prozess $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, der einer stochastischen Differentialgleichung der Form

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t \in [0, \infty), \quad X_0 = x,$$

genügt, wobei $\{W_t\}_{t \in [0, \infty)}$ eine M -dimensionale Brownsche Bewegung ist und $\mu(\cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}$ die folgende Bedingung erfüllen

$$|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

d.h. μ und σ sind Lipschitzstetig.



Infinitesimaler Generator einer Itô-Diffusion

Definition

Sei $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ eine zeitabhängige Itô-Diffusion in \mathbb{R}^N . Der **(infinitesimale) Generator** A von X_t ist durch

$$Af(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_t)) - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

definiert. Die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ für die dieser Limes in x existiert, wird mit $\mathcal{D}_A(x)$ bezeichnet. \mathcal{D}_A bezeichnet die Menge der Funktionen für welche der Limes für alle $x \in \mathbb{R}^N$ existiert.



Zusammenhang Itô-Diffusion - Generator

Sei $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ eine Itô-Diffusion mit

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

Ist $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, dann ist $f \in \mathcal{D}_A$ und

$$Af(x) = \sum_{i=1}^N \mu_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$



Satz von Feynman-Kac

Teil 1

Seien $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, $r \in C(\mathbb{R}^N)$ und r nach unten beschränkt. Weiterhin seien $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ eine Itô-Diffusion und A der von $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ erzeugte Generator. Sei

$$v(x, t) = \mathbb{E}^x \left[\exp \left(- \int_0^t r(X_s) ds \right) f(X_t) \right].$$

Dann erfüllt v das folgende Cauchy-Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = Av(x, t) - r v(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$



Satz von Feynman-Kac

Teil 2

Ist weiterhin $w(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ beschränkt auf $\mathbb{R}^N \times K$ für alle kompakten Intervalle $K \subset \mathbb{R}$ und ist w eine Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = Av(x, t) - r v(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

dann ist $w(x, t) = v(x, t)$ durch

$$v(x, t) = \mathbb{E}^x \left[\exp \left(- \int_0^t r(X_s) ds \right) f(X_t) \right]$$

gegeben.



risikolose Preisfindung

Idee

Bei der Preisfindung mittels äquivalenter Martingalmaße folgt man der Idee, den Preis der Option einfach als abdiskontierten Wert der Auszahlungsfunktion g zu betrachten. Das heißt, folgt der Assetpreis dem Prozess

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW_t,$$

dann ist

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= \mathbb{E} \left(e^{-rT} g(S_1(T)) \right) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-rT} g \left(S_1(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T} \right) \right]. \end{aligned}$$



risikolose Preisfindung

Problem

Nun besteht jedoch das **Problem**, dass bei $\mu \neq r$ daraus eine Arbitrage-Möglichkeit (im Gegensatz zu Annahme (F6)) resultiert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der abdiskontierte Preis $\tilde{S}_1(t) = e^{-rt} S_1(t)$ kein Martingal mehr ist, da aus der Itô-Formel folgt, dass

$$d\tilde{S}_1(t) = (\mu - r)\tilde{S}_1(t)dt + \sigma\tilde{S}_1(t)dW_t.$$

Ist nun $\mu \neq r$ so verschwindet der Drift-Term, $\tilde{S}_1(t)dt$, in obiger Gleichung nicht.



äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* auf \mathcal{F}_T^S wird als **äquivalentes Martingalmaß** bezüglich eines Marktmodells mit Zeitbereich $[0, T]$ bezeichnet, wenn es die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt

- 1 \mathbb{P}^* ist auf \mathcal{F}^S äquivalent zu \mathbb{P} . (Für alle $A \in \mathcal{F}^S$ gilt $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$.)
- 2 Alle abdiskontierten Preisprozesse (des jeweiligen Marktmodells) sind im Zeitintervall $[0, T]$ Martingale unter \mathbb{P}^* .



Satz von Girsanov

Teil 1

Sei $Y(t) \in \mathbb{R}^N$ ein Itô-Prozess von der Form

$$dY(t) = \mu(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)dW(t), \quad (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega,$$

mit $W(t) \in \mathbb{R}^M$, $\mu(t, \omega) \in \mathbb{R}^N$ und $\sigma(t, \omega) \in \mathbb{R}^{N \times M}$. Weiterhin sei angenommen, dass Prozesse $\Theta(t, \omega) \in (L^0[0, T])^M$ und $\alpha(t, \omega) \in (L^0[0, T])^N$ existieren, so dass

$$\sigma(t, \omega)\Theta(t, \omega) = \mu(t, \omega) - \alpha(t, \omega), \quad (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

Für $t \in [0, T]$ setzen wir

$$\xi_t^\Theta = \exp\left(-\int_0^t \Theta(s, \omega) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(s, \omega) ds\right)$$



Satz von Girsanov

Teil 2

und

$$d\mathbb{P}^*(\omega) = \xi_T^\Theta(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{auf } \mathcal{F}_T^W.$$

Angenommen, ξ_t^Θ ist ein Martingal (bezüglich \mathcal{F}^Y und \mathbb{P}). Dann ist \mathbb{P}^* ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F}_T^W und der Prozess

$$W^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \Theta(s, \omega) ds + W(t), \quad (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$$

ist eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathbb{P}^* . Weiterhin hat $Y(t)$ bezüglich $W^*(t)$ die folgende Darstellung

$$dY(t) = \alpha(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW^*(t), \quad (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$



äquivalentes Martingalmaß

für das Black-Schole Modell

Satz: äquivalentes Martingalmaß

Das äquivalente Martingalmaß für das Black-Scholes Modell ist durch

$$d\mathbb{P}^* = \xi_T^\Theta d\mathbb{P}$$

mit

$$\xi_T^\Theta = \exp \left(- \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) W_T - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \right)$$

gegeben.



Allgemeines stochastisches Volatilitätsmodell

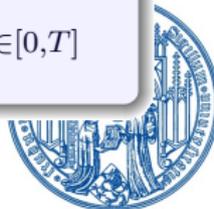
Definition

Ein **stochastisches Volatilitätsmodell** besteht aus zwei Assets, deren Entwicklungen wie folgt beschrieben werden können

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma_t S_1(t)dW_t$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$, $r \in [0, \infty)$, $\sigma_t \geq c > 0$ für alle $t \in [0, T]$ und $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ eine Brownsche Bewegung ist. Dabei wird $\{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$ als der **Volatilitäts-Prozess** bezeichnet.



Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Definition

Der **Ornstein-Uhlenbeck Prozess** (OU-Prozess) ist als Lösung von

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\hat{Z}_t, \quad t \in [0, T],$$

mit Konstanten $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ und $m \in \mathbb{R}$ definiert.



Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Lösung

Die Lösung eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses kann durch

$$Y_t = m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\hat{Z}_s.$$

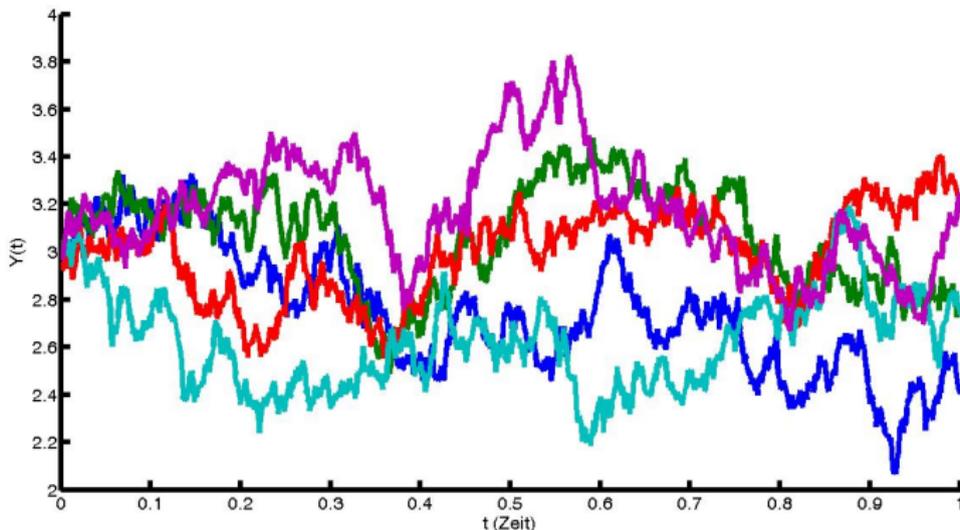
angegeben werden. Das heißt Y_t ist

$\mathcal{N}\left(m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t}, \frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})\right)$ verteilt.



Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Beispiel: $\alpha = 5$, $\beta = 1$ und $m = 3$



OU-Volatilitätsmodell

Definition

Das **Ornstein-Uhlenbeck Volatilitätsmodell** besteht aus zwei Assets, deren Entwicklungen wie folgt beschrieben werden können

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + S_1(t)f(Y_t)dW(t)$$

$$dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta \left(\rho(t) dW(t) + \sqrt{1 - \rho(t)^2} dZ(t) \right)$$

mit Konstanten $m \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ und $\alpha \geq 0$, sowie

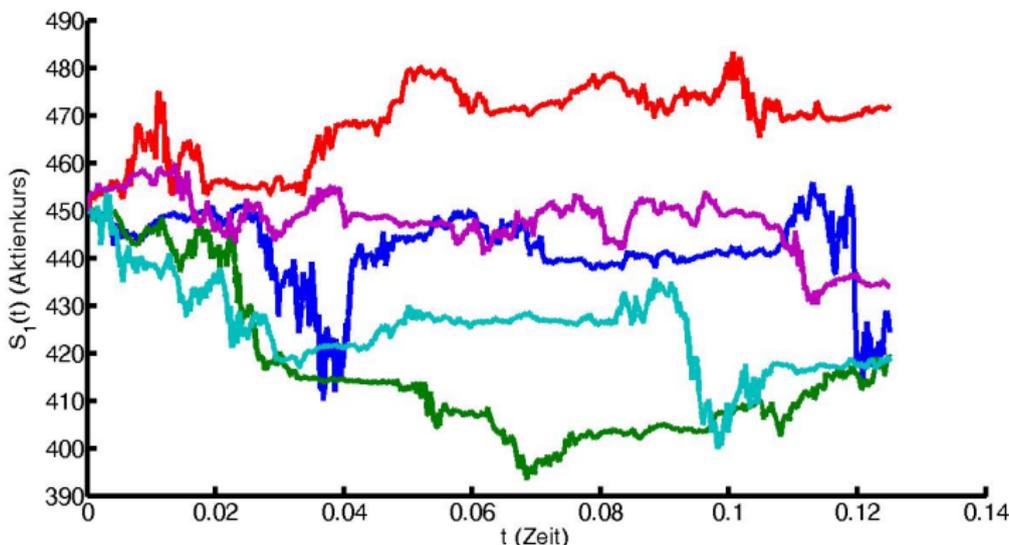
$$f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow (f_-, f_+), \quad 0 < f_- < f_+ < \infty$$

$$\rho(\cdot) : [0, T] \rightarrow (-\rho_0, \rho_0), \quad 0 < \rho_0 < 1.$$



OU-Volatilitätsmodell

Beispiel: $f(\cdot) = \exp(\cdot)$, $\alpha = 155$, $\beta = 15.58$, $\gamma = 2.36$, $\rho = -0.2$, $\mu = 0.4170$ und $m = -2.3086$ für den Zeitbereich $[0, \frac{1}{8}]$ ($\frac{3}{2}$ Monate)



äquivalentes Martingalmaß

Ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{P}^* auf der Filtration \mathcal{F}_T im Modell (4) ist gegeben durch

$$d\mathbb{P}^* = \xi_T^\Theta d\mathbb{P}$$

mit

$$\xi_T^\Theta = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T \left((\Theta_s^{(1)})^2 + (\Theta_s^{(2)})^2 \right) ds - \sum_{i=1}^2 \int_0^T \Theta_s^{(i)} dW_s\right),$$

$$\Theta_t^{(1)} = \frac{(\mu - r)}{f(Y_t)},$$

$$\Theta_t^{(2)} = \gamma t, \quad t \in [0, T],$$

wobei $\{\gamma t\}_{t \in [0, T]}$ ein beliebiger beschränkter, \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess ist.



Cauchy-Problem

Ausgangsendwertproblem

Die Preisfunktion für eine europäische Option im OU-Volatilitätsmodell mit Auszahlungsfunktion $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ erfüllt das folgende Cauchy-Endwertproblem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \mathcal{L}_{SVM_{OU}} p(x, t) = 0 & (x, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times [0, T) \\ p(x, T) = g(x) & x \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit



Cauchy-Problem

Ausgangs-Differentialoperator

$$\mathcal{L}_{SVMOU} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x,t) & a_{12}(x,t) \\ a_{21}(x,t) & a_{22}(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 f(x_2)^2 & \rho(t) \beta x_1 f(x_2) \\ \rho(t) \beta x_1 f(x_2) & \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1(x,t) \\ b_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r x_1 \\ \alpha(m - x_2) - \beta \left(\rho(t) \frac{(\mu-r)}{f(x_2)} + \gamma(t,x) \sqrt{1 - \rho(t)^2} \right) \end{pmatrix}$$

$$c(x,t) = -r.$$



Cauchy-Problem

Transformation

$$\tilde{S}_t = e^{r(T-t)} S_t$$

$$\tilde{X}_t = \ln(\tilde{S}_t) = \ln(S_t) + r(T-t),$$

$$\tilde{Y}_t = m + e^{-\alpha(T-t)}(Y_t - m).$$



Cauchy-Problem

engültiges Endwertproblem

Sei \tilde{p} durch

$$\tilde{p}(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t, t) = e^{r(T-t)} p(S_t, Y_t, t) = e^{r(T-t)} \mathbb{E}^*(e^{r(T-t)} g(S_T) | \mathcal{F}_t),$$

definiert, also

$$\tilde{p}(x_1, x_2, t) = e^{r(T-t)} p\left(e^{x_1 - r(T-t)}, m + e^{\alpha(T-t)}(x_2 - m), t\right).$$

Dann erfüllt \tilde{p} das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(x, t) + \mathcal{L}_{SVM} \tilde{p}(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T)$$

$$\tilde{p}(x, T) = \tilde{g}(x) \quad (x) \in \mathbb{R}^2,$$



Cauchy-Problem

endgültiger Differentialoperator

$$\mathcal{L}_{SVM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t)$$

$$a(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{f}(x_2, t)^2 & \tilde{\beta}(t) \tilde{f}(x_2, t) \rho(t) \\ \tilde{\beta}(t) \tilde{f}(x_2, t) \rho(t) & \tilde{\beta}^2(t) \end{pmatrix}$$

$$b(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \tilde{f}(x_2, t)^2 \\ -\tilde{\beta}(t) \left(\rho(t) \frac{(\mu-r)}{\tilde{f}(x_2, t)} + \tilde{\gamma}(x_1, x_2, t) \sqrt{1 - \rho(t)^2} \right) \end{pmatrix}$$

$$c(x_1, x_2, t) = 0$$



äquivalentes Cauchy-Problem

Sei die Preisfunktion p durch

$$p(S_t, Y_t, t) = \mathbb{E}^*(e^{r(T-t)} g(S_T) | \mathcal{F}_t),$$

gegeben. Weiter sei u durch

$$u(x_1, x_2, t) = e^{rt} p(e^{x_1 - rt}, m + e^{\alpha t}(x_2 - m), T - t)$$

definiert. Dann erfüllt u das Cauchy-(Anfangswert-)Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \mathcal{L}_{SVM}(x, T - t, D_x)u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \\ u(x, 0) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$



Cauchy-Problem

endgültiger Differentialoperator

$$\mathcal{L}_{SVM}(x, t, D_x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t)$$

$$a(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{f}(x_2, t)^2 & \tilde{\beta}(t) \tilde{f}(x_2, t) \rho(t) \\ \tilde{\beta}(t) \tilde{f}(x_2, t) \rho(t) & \tilde{\beta}^2(t) \end{pmatrix}$$

$$b(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \tilde{f}(x_2, t)^2 \\ -\tilde{\beta}(t) \left(\rho(t) \frac{(\mu-r)}{\tilde{f}(x_2, t)} + \tilde{\gamma}(x_1, x_2, t) \sqrt{1 - \rho(t)^2} \right) \end{pmatrix}$$

$$c(x_1, x_2, t) = 0$$



Galerkin-Methode

Idee

Es wird versucht die Lösung des Cauchy-Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (\text{AWP})$$

ausgehend von einer Projektion auf einen endlichdimensionalen Vektorraum zu konstruieren.



Galerkin-Methode

Konstruktion

Seien $w_k = w_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) hinreichend glatte Funktionen, so dass die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

(E1) $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine Orthogonalbasis von $H^1(\mathbb{R}^2)$.

(E2) $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^2)$.



Konstruktion

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest, dann suchen wir nach Funktionen $\mathbf{u}_m : [0, T] \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ von der Form

$$\mathbf{u}_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k.$$

Dabei wollen wir Koeffizienten $d_m^k(t)$ finden, so dass

$$d_m^k(0) = \langle \mathbf{u}_0, w_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

und

$$\left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{u}_m, w_k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = 0 \quad (t \in [0, T]; k = 1, \dots, m).$$



Konstruktion

Da $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist, gilt

$$\left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{u}_m(t), w_k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{d}{dt} d_m^k(t)$$

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e_{kl}(t) d_m^l(t),$$

mit $e_{kl}(t) = B[w_l, w_k; t]$ ($k, l = 1, \dots, m$). Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} d_m^k(t) + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = 0, \quad (k = 1, \dots, m)$$

$$d_m^k(0) = \langle \mathbf{u}_0, w_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$



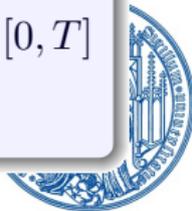
Galerkin-Methode

Existenz und Eindeutigkeit

Seien der Differentialoperator $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ gleichmäßig elliptisch, die Koeffizientenfunktionen von $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ Lebesgue-messbar und beschränkt und sind die Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$ des Cauchy-Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x) u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$



Beweisskizze

Eine a-priori Abschätzung

Es existiert eine Konstante C die nur von T und den Koeffizienten von $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ abhängt, so dass

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))} \\ + \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{u}_m \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^2))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

für $m \in \mathbb{N}$.



Abstrakte Halbgruppentheorie

Idee

Wir betrachten auf dem Banachraum X das abstrakte Problem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) + A(t) \mathbf{u}(t) &= 0 & t \in (0, T] \\ \mathbf{u}(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (\text{AP})$$

mit einem zeitabhängigen Operator $A(t)$.



Abstrakte Halbgruppentheorie

Idee

Ist der Operator $A(t) = A$ unabhängig von t , so kann man erwarten, dass für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein linearer Operator $U(t)$ in $(t \in [0, T])$ existiert, so dass

$$\mathbf{u}(t) = U(t)\mathbf{u}(0)$$

und $U(t)U(s) = U(t+s)$, genauer $U(t) = \exp(-tA)$.



Abstrakte Halbgruppentheorie

Idee

Betrachten wir nun einen Operator $A(t)$ der von t abhängig ist, dann versuchen wir eine Verallgemeinerung dieser Idee vorzunehmen. Dazu benötigen wir den zweiparametrischen Lösungsoperator $U(t, s)$ ($0 \leq s \leq t \leq T$). Wir wollen erreichen, dass wir die Lösung ebenfalls in der Form

$$\mathbf{u}(t) = U(t, 0)u_0$$

angeben können.



Fundamentallösung

Definition

Eine **Fundamentallösung** zu dem Problem (AP) erfüllt für $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$ die folgenden Eigenschaften:

$(t, s) \mapsto U(t, s)$ ist eine stark stetige Funktion

$$U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$$

$$U(s, s) = Id$$

$$\|U(t, s)\|_{B(X)} \leq \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|_{B(X)} d\tau\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) + A(t)U(t, s) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = U(t, s)A(s)$$



Annahmen

- (P1) Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}(A)$ von $A(t)$ ist unabhängig von t .
- (P2) Für $t \in [0, T]$ existiert $(\lambda - A(t))^{-1}$ für alle λ mit $\Re(\lambda) \leq 0$ und es existiert eine Konstante $M < \infty$, so dass

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{M}{|\lambda| + 1}, \quad \Re(\lambda) \leq 0, t \in [0, T].$$

- (P3) Es existieren Konstanten $\alpha \in (0, 1]$ und $L > 0$, so dass

$$\|A(t)A(r)^{-1} - A(s)A(r)^{-1}\|_{B(X)} \leq L|t - s|^\alpha$$

für alle $s, t, r \in [0, T]$.



Analytische Halbgruppe

Satz: Äquivalenz

Sei $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe, A der infinitesimale Generator dieser Halbgruppe und $0 \in \rho(A)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Es existiert ein $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, so dass $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ zu einer analytischen Halbgruppe in den Sektor

$$\Delta_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \delta\}$$

fortgesetzt werden kann und $\|T(z)\|_{B(X)}$ in jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{\Delta}_{\delta'}$ ($\delta' < \delta$) von Δ_δ gleichmäßig beschränkt ist.



Analytische Halbgruppe

Satz: Äquivalenz

(b) Es existiert eine Konstante $C < \infty$, so dass für alle $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|((\sigma + i\tau) - A)^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) Es existieren $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $M > 0$, so dass

$$\rho(A) \supset \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}$$

und

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0.$$



Analytische Halbgruppe

Satz: Äquivalenz

(d) $T(t)$ ist für $t > 0$ differenzierbar und es existiert eine Konstante $C < \infty$, so dass

$$\|AT(t)\|_{B(X)} \leq \frac{C}{t}, \quad t > 0.$$



Existenz

Satz

Unter den Annahmen (P1)-(P3) existiert für $0 \leq s < t \leq T$ eine Fundamentallösung $U(t, s)$ von (AP). Für $0 \leq s < t \leq T$ gelten:

1. Es existiert eine Konstante $C < \infty$, so dass

$$\|U(t, s)\| \leq C.$$

2. 1. $\mathcal{R}(U(t, s)) \subset \mathcal{D}(A)$.

2. Der Operator $\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)$ existiert als ein Element von $B(X)$.

3. $\frac{\partial}{\partial t}U(t, s) + A(t)U(t, s) = 0$.

4. Es existiert eine Konstante $C < \infty$, so dass

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}U(t, s) \right\|_{B(X)} = \|A(t)U(t, s)\|_{B(X)} \leq C(t-s)^{-1}.$$



Existenz

Satz

3. Es existiert eine Konstante $C < \infty$, so dass

$$\|A(t)U(t, s)A(s)^{-1}\|_{B(X)} \leq C.$$

4. $U(t, s)u$ ist für alle $t \in (0, T]$ und alle $u \in \mathcal{D}(A)$ differenzierbar bezüglich $s \in [0, T]$ und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s)u = U(t, s)A(s)u \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$



Konstruktion der Fundamentallösung

Wir setzen

$$U(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(t-s)A(s)} + W(t, s), \quad (0 \leq s \leq t \leq T).$$

Dann suchen wir ein R , so dass

$$W(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t e^{-(t-\tau)A(\tau)} R(\tau, s) d\tau.$$



Konstruktion der Fundamentallösung

$$R(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t, s),$$
$$R_m(t, s) = \int_s^t R_1(t, \tau) R_{m-1}(\tau, s) d\tau,$$
$$R_1(t, s) = -(A(t) - A(s)) \exp(-(t - s)A(s)).$$



Abstrakte Halbgruppentheorie

Existenz und Eindeutigkeit

Existenz und Eindeutigkeit

Seien der Operator A dicht in X definiert, abgeschlossen, $-A(t)$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe und $A(t)A(0)^{-1}$ hölderstetig.

Dann existiert eine Fundamentallösung $U(t, s)$ ($0 \leq s \leq t \leq T$) von (AP), so dass die Lösung \mathbf{u} wie folgt angegeben werden kann:

$$\mathbf{u}(t) = U(t, 0)\mathbf{u}_0 \left(+ \int_0^t U(t, s)f(s) ds \right)$$



Zshg. Differentialoperator - abstrakter Operator

Definition

Im Folgenden wollen wir mit $A(t)$ denjenigen Operator bezeichnen, der durch $B[u, v; t]$ bzw. $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ definiert wird. Genauer setzen wir

$$\langle \mathcal{A}(t)u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = B[u, u; t], \quad t \in [0, T]$$

und

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{u \in L^2 : \mathcal{A}(t)u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, \quad A(t)u = \mathcal{A}(t)u$$

für $u \in \mathcal{D}(A)$.



Anwendung auf Cauchy-Problem

Annahmen

Sei $B[u, v; t]$ die durch $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ definierte Sesquilinearform.

(H1) Es existiert eine Konstante $M < \infty$, so dass

$$|B[u, v; t]| \leq M \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$$

für alle $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ und $t \in [0, T]$.

(H2) Es existiert eine positive Zahl $\delta > 0$ und eine reelle Zahl $k_0 \geq 0$, so dass

$$\Re(B[u, u; t]) \geq \delta \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 - k_0 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

für alle $t \in [0, T]$ und $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.



Anwendung auf Cauchy-Problem

Annahmen

(H3) Es existiert ein $\alpha \in (0, 1]$ so dass

$$|B[u, v; t] - B[u, v; s]| \leq K|t - s|^\alpha \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$.



Existenz und Eindeutigkeit

Sind die Voraussetzungen (H1)-(H3) erfüllt, so existiert eine Konstante $k \geq 0$, so dass die Familie der Operatoren $\{A(t) + k\}_{t \in [0, T]}$ die Annahmen (P1) bis (P3) erfüllt.

Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Erfülle die Familie $\mathcal{L}(x, t, D_x)$ ($t \in [0, T]$) die Bedingungen (H1)-(H3). Dann besitzt das Cauchy-Problem (AWP) für $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ eine eindeutige Lösung.



Beweisskizze:

Sei $\mathcal{L}(x, t, D_x)$ ein gleichmäßig (stark) elliptischer Operator zweiter Ordnung auf $U \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Konstante $C < \infty$, die nur von U und N abhängt, so dass

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\|\mathcal{L}(x, t, D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right)$$

für alle $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ und fast alle $t \in [0, T]$.



Beweisskizze:

Sei $\mathcal{L}(x, t, D_x)$ ein gleichmäßig (stark) elliptischer Operator zweiter Ordnung auf $U \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann existieren Konstanten $C > 0$, $R \geq 0$ und $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, so dass

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|(\lambda + \mathcal{L}(x, t, D_x))u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad (\lambda \neq 0)$$

für alle $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \geq R$ und $\vartheta - \pi < \arg(\lambda) < \pi - \vartheta$.



Anwendung auf Cauchy-Problem

Annahmen

(H4) die Koeffizienten von $B[u, v; t]$ sind Lebesgue-messbar.

Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Sind die Annahmen (H1), (H2) und (H4) erfüllt, so besitzt das Cauchy-Problem (AWP) eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$.



Beweisskizze

Man setzt

$$B_n[u, v; t] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} j_n(t-s) B[u, v; t] ds, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Bildet dann die Fundamentallösung $U_n(t, s)$ und zeigt mit Hilfe einer a-priori-Abschätzung, dass eine schwach konvergente Teilfolge existiert, die für $n \rightarrow \infty$ gegen die Lösung konvergiert



Gebietsdefinition

Damit wir die Analytizität beweisen können, benötigen wir das komplexe Gebiet $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ mit

$$Q(r) \stackrel{\text{def}}{=} (-r, r)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^2 : |y|_\infty < r\}$$

$$\mathfrak{X}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \{z = x + iy \in \mathbb{C}^2 : |y|_\infty < r\} = \mathbb{R}^2 + iQ(r)$$

$$\Delta_{\vartheta}^{T_0, T} \stackrel{\text{def}}{=} \{t = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, \theta \in (-\vartheta_0, \vartheta_0),$$

$$|\Im(t)| < T_0 \tan(\vartheta_0), 0 < \Re(t) < T\}$$

$$\mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X}^{(r_0)} \times \Delta_{\vartheta_0}^{T_0, T} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$$

$$\chi(s) \stackrel{\text{def}}{=} s^{\frac{1}{2} + \epsilon}$$

$$\Pi^{(s)}(\kappa_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z = x + iy \in \mathbb{C}^2 : |y|_\infty < \kappa_0 \chi(s)\}$$



Gebietsdefinition

$$\Sigma^{(s)}(\nu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{t = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \nu_0|\tau| < \sigma = s\}$$

$$\Lambda^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \left\{ \Pi^{(r)}(\kappa_0) \times \Sigma^{(r)}(\nu_0) : r \in (0, s) \right\}$$

$$\Lambda_r^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (z, t) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} : (z, t - r) \in \Lambda^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) \right\}$$

$$\Gamma_T^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bigcup \left\{ \Lambda_r^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) : r \in [0, T - s] \right\} & \text{für } s < T \\ \Lambda^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) & \text{für } s = T \end{cases}$$

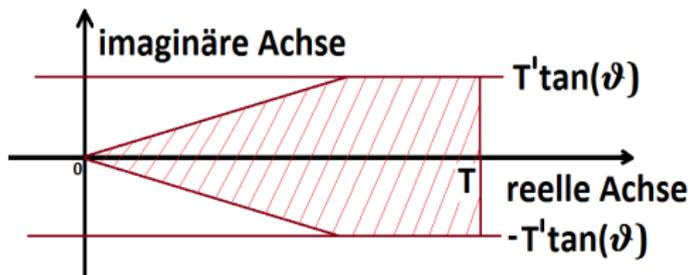
wichtig

κ_0 und ν_0 werden gerade so gewählt, dass $\Gamma_T^{(s)}(\kappa_0, \nu_0) \subset \mathfrak{D}$.

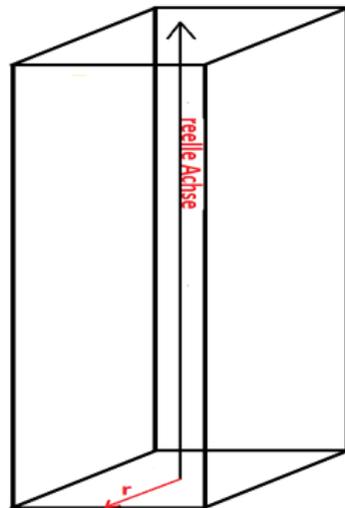


Gebietsdefinition

Veranschaulichung des Gebietes \mathfrak{D}



(a) $\Delta_{\vartheta_0}^{T', T}$



(b) $\mathfrak{X}^{(r)}$ (eindimensional)

Annahmen

$$\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x) = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t)$$

- (AN1)** (i) $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\bar{\mathcal{D}}) \cap L^\infty(\mathcal{D}) \cap A(\mathcal{D})$ ($i, j = 1, 2$).
(ii) $a_{ij} \in C^3(\bar{\mathcal{D}}) \cap C_{\text{unif}}^0(\bar{\mathcal{D}})$ ($i, j = 1, 2$).
(iii) $b_i, c \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ ($i = 1, 2$).

(AN2) Der Differentialoperator $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ ist gleichmäßig elliptisch.

(AN3) Die Anfangsbedingung u_0 liegt in $L^2(\mathbb{R}^2)$.



Analytizität bezüglich der Zeit

Die Analytizität bezüglich der Zeit lässt sich mit Hilfe der Halbgruppentheorie und der zuvor konstruierten Fundamentallösung beweisen.

Erst wird die Analytizität unter abstrakten Voraussetzungen gezeigt und diese Voraussetzungen dann auf den Differentialoperator $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ übertragen



Voraussetzungen

Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ eine kompakte konvexe komplexe Umgebung des abgeschlossenen Intervalls $[0, T]$.

(AT1) Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}(A)$ von $A(t)$ ist unabhängig von t .

(AT2) $A(t)$ ist für alle $t \in [0, T]$ ein abgeschlossener, dicht in X definierter Operator. Für $t \in \Delta$ existiert $(\lambda - A(t))^{-1}$ für alle λ mit $\Re(\lambda) \leq 0$ und es existiert eine Konstante $M < \infty$, so dass

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{M}{|\lambda| + 1}, \quad \Re(\lambda) \leq 0, t \in \Delta.$$

(AT3) $A(t)A(0)^{-1}$ ist eine analytische Funktion in Δ mit Werten in $B(X)$.



Analytizität

Satz: Analytizität der Lösung

Unter den Annahmen (AT1)-(AT3) ist die Fundamentallösung $U(t, s)$ von (AWP) analytisch in (t, s) für $t >_{\phi} s$. Genauer ist die Fundamentallösung für $t, s \in \Delta$, $t >_{\phi} s$ und für $t = s$ definiert und analytisch in (t, s) für $t >_{\phi} s$.

Schreibweise

Wir setzen $\phi = \frac{\pi}{2} - \delta$. Für zwei komplexe Zahlen t und s schreiben wir dann $t >_{\phi} s$, falls $t \neq s$ und $|\arg(t - s)| < \phi$. Weiter schreiben wir $t \geq_{\phi} s$, falls $t = s$ oder $t >_{\phi} s$.



Beweisskizze

Für den Beweis benötigt man das folgende Lemma:

Lemma

Seien $P(t, s)$ und $Q(t, s)$ gleichmäßig beschränkte analytische Funktionen mit Werten in $B(X)$ welche in $\Xi = \{(t, s) : t, s \in \Delta, t >_{\phi} s\}$ definiert sind. Dann kann das Integral

$$\int_s^t P(t, \tau)Q(\tau, s) d\tau$$

als eine gleichmäßig beschränkte analytische Funktion in Ξ definiert werden.



Beweisskizze

Die Behauptung wird dann mit Hilfe der Darstellung

$$U(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(t-s)A(s)} + W(t, s), \quad (0 \leq s \leq t \leq T).$$

$$W(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t e^{-(t-\tau)A(\tau)} R(\tau, s) d\tau.$$

der Fundamentallösung gezeigt.



Analytizität des Cauchy-Problems bezüglich der Zeit

Satz: Analytizität in der Zeit

Erfülle $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$ die Voraussetzungen (AN1), (AN2) und (AN3). Dann ist die eindeutige schwache Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x) u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

aufgefasst als $L^2(\mathbb{R}^2)$ -wertige Funktion, analytisch.



Analytizität im Raum

Vorgehensweise

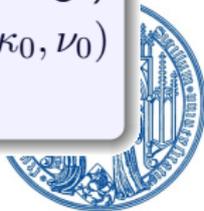
1. Zuerst beweist man eine a-priori-Abschätzung in L^2 für die holomorphe Fortsetzung der Lösung von (AWP) auf das komplexe parabolische Gebiet $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0) \subset \mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$. Dabei nehmen wir an, dass die Anfangsdaten u_0 im Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$ liegen.
2. Als nächstes zeigt man, dass Anfangsdaten aus $L^2(\mathbb{R}^2)$ durch (holomorphe) Funktionen aus $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$ approximiert werden können.



Analytizität im Raum

Vorgehensweise

3. Das Cauchy-Problem (AWP) besitzt für Anfangsdaten aus $\mathcal{H}^2(\mathcal{X}^{(r)})$ eine eindeutige Lösung. Diese erfüllt die Voraussetzungen für die a-priori-Abschätzung.
4. Dies kombiniert man abschließend mit der Eindeutigkeit der schwachen Lösung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ von (AWP) um daraus zu schließen, dass diese schwache Lösung der (lokal gleichmäßige) Limes einer Folge von holomorphen Funktionen in $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ ist und daher selbst holomorph in $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ ist.



Eine a priori Abschätzung

Sei $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{C}$ eine schwache Lösung des Cauchy-Problems (AWP) mit Anfangsbedingung $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, so dass $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ und \mathbf{u} eine holomorphe Fortsetzung in das komplexe Gebiet $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ besitzt. Diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit \mathbf{u} . Zudem erfülle die Fortsetzung \mathbf{u} die folgenden Eigenschaften:

- (1) Für jedes Paar $(y_0, t_0) \in \hat{\Gamma}_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ existiert eine offene Umgebung G (von (y_0, t_0)) in $\hat{\Gamma}_T^{(T_0)}$, so dass

$$\sup_{(y,t) \in G} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}(x + iy, t)|^2 dx < \infty.$$



Eine a priori Abschätzung

(2) Für festes $\tau_1 \in \mathbb{R}$ mit $\nu_0 |\tau_1| < 1$ gilt

$$\sup_{|y|_\infty < \kappa_0 \chi(\sigma)} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}(x + iy, (1 + i\tau_1)\sigma) - u_0(x)|^2 dx \xrightarrow{\sigma \searrow 0} 0.$$

Dann erfüllt die Fortsetzung \mathbf{u} die PDGL (AWP) in $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ im klassischen Sinne in jedem Punkt $(x, y, t) \simeq (x + iy, t) \in \Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$, mit den partiellen Ableitungen bezüglich x und t .



Eine a priori Abschätzung

Weiterhin existiert eine Konstante $C_0 \in [0, \infty)$, unabhängig von u_0, \mathbf{u}, T ($T \geq T_0$), so dass die holomorphe Fortsetzung von \mathbf{u} die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}(x + iy, t)|^2 dx \leq e^{C_0 J\left(\frac{\Re(t)}{T_0}\right)} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)$$

für alle $(y, t) \in \hat{\Gamma}_t^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ erfüllt.



Eine a priori Abschätzung

Außerdem gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \left| \mathbf{u} \left(x + i\chi_1 \left(\frac{\sigma}{T_0} \right) y, \sigma + i\varsigma_1 \left(\frac{\sigma}{T_0} \right) \tau \right) \right|^2 dx \\ + & c_0 \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_0^\sigma \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left| D_x^\alpha \mathbf{u} \left(x + i\chi_1 \left(\frac{s}{T_0} \right) y, s + i\varsigma_1 \left(\frac{s}{T_0} \right) \tau \right) \right|^2 dx \right] ds \\ \leq & e^{C_0 J \left(\frac{\sigma}{T_0} \right)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

für alle $\sigma \in (0, T)$, $(y, \tau) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ mit $|y|_\infty < \kappa_0 \chi(T_0)$ und $\nu_0 |\tau| < T_0$.

Zudem sind die schwache Lösung des Cauchy-Problems (AWP) und seine holomorphe Fortsetzung in $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ eindeutig.



Beweisskizze

Nach unserer Annahme (AN1), sind alle Komponenten des Differentialoperators holomorph in dem komplexen Gebiet $\mathfrak{D} = \mathfrak{X}^{(r_0)} \times \Delta_{\vartheta_0}^{T_0, T} \supset \Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$.

Da \mathbf{u} in $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ holomorph ist und \mathbf{u} das Problem (AWP) in $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$ im klassischen Sinne erfüllt, muss die Fortsetzung von \mathbf{u} die Gleichung (AWP) auch in $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ erfüllen.



Beweisskizze

Weiterhin benötigt man die

Cauchy'sche Integralformel für Polyscheiben

Für $x \in D^{(r)} = \{x \in \mathbb{C}^N : |x_k - y_k| < r \text{ für } k = 1, \dots, N\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\gamma_1} \frac{dz_1}{z_1 - x_1} \cdots \int_{\gamma_N} \frac{dz_N}{z_N - x_N} f(z_1, \dots, z_N),$$

wobei γ_k die positiv orientierten Kreise $|z_k - y_k| = r$ sind
($k = 1, \dots, N$).



Hardy-Raum

Der **Hardy-Raum** $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$ über den Streifen $\mathfrak{X}^{(r)}$ besteht aus allen holomorphen Funktionen $u : \mathfrak{X}^{(r)} \rightarrow \mathbb{C}$, die eine endliche Norm $\|u\|_{\mathcal{H}^2}$ mit

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{H}^2} &= \|u\|_{\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in Q^{(r)}} \|u(\cdot + iy)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \sup_{y \in Q^{(r)}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(x + iy)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\end{aligned}$$

besitzen.



Fourier-Transformation

Definition

Fourier-Transformierte

Sei $F \in L^2(\mathbb{R}^N)$, dann ist die **Fourier-Transformierte** f von F durch

$$f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} F(t) e^{-2\pi i \langle \xi, t \rangle_{\mathbb{R}^N}} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

definiert. Wir schreiben auch $\mathfrak{F}(F) = f$. Die **inverse Fouriertransformierte** F von f ist durch

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle_{\mathbb{R}^N}} f(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

definiert.



Satz von Plancherel

- 1 Sei $F \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und sei f die Fouriertransformierte von F , dann ist

$$\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

- 2 Die Fouriertransformation \mathfrak{F} ist ein linearer Operator und eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R}^2)$ nach $L^2(\mathbb{R}^2)$.
- 3 Die inverse Fouriertransformation \mathfrak{F}^{-1} erhält man durch $(\mathfrak{F}^{-1}h)(x) = (\mathfrak{F}h)(-x)$ für alle $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$



Charakterisierung von Funktionen aus \mathcal{H}^2

Eine Funktion F gehört genau dann zu $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$, wenn sich F als

$$F(x + iy) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i \langle x + iy, t \rangle_{\mathbb{R}^2}} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in Q^{(r)},$$

mit einer Funktion f , für die

$$\|f\|_{L_r^2(\mathbb{R}^2)}^{(sup)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in Q^{(r)}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(t)|^2 e^{-4\pi \langle y, t \rangle_{\mathbb{R}^2}} dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

gilt, darstellen lässt.



Approximationsresultat

Satz

- 1 Die Menge der (Restriktionen auf $\mathfrak{X}^{(r)}$ von) $F \in \bigcup_{0 < R < \infty} E_R$ bildet einen dichten Untervektorraum vom Hardyraum $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$.
- 2 Die Einschränkung von $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$ auf \mathbb{R}^2 ist ein dichter Unterraum des Lebesgue-Raums $L^2(\mathbb{R}^2)$.



Beweisskizze

1/2

Paley-Wiener-Schwartz

Sei $R \in (0, \infty)$ und $K = [-R, R]^2$.

Ist $f \in C_0^\infty(K)$, dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante C_m , so dass für die inverse Fouriertransformierte F von f gilt

$$|F(z)| \leq C_m (1 + |z|)^{-m} e^{R(\Im(z))}; \quad z \in \mathbb{C}^2.$$

Andererseits ist jede ganze holomorphe Funktion in \mathbb{C}^2 , die die obige Abschätzung für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ erfüllt, die inverse Fouriertransformierte einer Funktion aus $C_0^\infty(K)$.



Beweisskizze

2/2

Isomorphismus

Sei f die Fouriertransformierte von $F \in \mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})|_{\mathbb{R}^2}$, also $\mathfrak{F}(F|_{\mathbb{R}^2}) = f$. Dann ist die Abbildung $F \mapsto f$ ein Isomorphismus vom Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})|_{\mathbb{R}^2}$ in den gewichteten Lebesgue-Raum $L_r^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}^2, e^{4\pi r|\xi|_1} d\xi)$ mit der Norm definiert durch

$$\|f\|_{L_r^2(\mathbb{R}^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi)|^2 e^{4\pi r|\xi|_1} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$



Existenz und Eindeutigkeit

für Anfangsdaten aus dem Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r_0)})$

Satz: Anfangsdaten aus $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r_0)})$

Seien die Annahmen (AN1)-(AN2) erfüllt und $u_0 \in \mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r_0)})$.

Dann hat das Cauchy-Problem (AWP) eine eindeutige klassische Lösung $\mathbf{u} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{C}$.

Diese ist holomorph in \mathfrak{D} und besitzt eine stetige Fortsetzung auf $\mathfrak{X}^{(r_0)} \times [0, T]$ mit $\mathbf{u}(\cdot, 0) = u_0$ in $\mathfrak{X}^{(r_0)}$.

Weiterhin erfüllt \mathbf{u} die a-priori-Abschätzung.



Beweisskizze

Das Problem wird mittels $\mathbf{u}^{(\zeta)}(x, t) = \mathbf{u}(x + \zeta, t)$ für $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T)$ und festes $\zeta = \xi + i\eta \in \mathfrak{X}^{(r_0)}$ transformiert.

Die Existenz und Eindeutigkeit von aus der 'Standardtheorie'.

Die Analytizität folgt aus der unendlichen Differenzierbarkeit der Lösung (bzgl. der reellen Variablen) in jedem Punkt ζ einer Polyscheibenumgebung, durch Anwendung der Cauchy-Riemannschen DGL (und der a-priori-Abschätzung) sowie aus der Analytizität bzgl der Zeit.



Analytizität

Satz

Satz: Analytizität

Seien die Annahmen (AN1)-(AN3) erfüllt.

Dann besitzt das Cauchyproblem (AWP) eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2))$.

Diese Lösung kann eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf dem Gebiet $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$ fortgesetzt werden. (Wobei die Zahlen $\kappa_0, \nu_0 \in (0, \infty)$ gerade so gewählt sind, dass $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0) \subset \mathcal{D}$.)



Analytizität

Beweisidee

Es wird eine Folge $\{u_{n,0}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(\mathfrak{X}^{(r)})$ gebildet, die gegen die Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ konvergieren.

Dann wird gezeigt, dass für jedes dieser Folgeglieder eine eindeutige Lösung u_n von (AWP) existiert und außerdem die a-priori-Abschätzung erfüllt.

Danach wird gezeigt, dass die Folge der zugehörigen Lösungen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sogar eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist, woraus dann durch Grenzwertbetrachtung die Behauptung folgt.



Anforderungen an Ausgangsproblem

Es existieren Konstanten $r_0 \in (0, \infty)$, $0 < T_0 \leq T < \infty$ und $0 < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ mit

$$|\alpha T_0 \tan(\vartheta_0)| < \frac{\pi}{2},$$

so dass die Koeffizientenfunktionen von $\mathcal{L}_{SVM}(x, t, D_x)$ zu einer beschränkten analytischen Funktion in das komplexe Gebiet

$$(\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}) \times \left(m + \nabla_{\vartheta_0}^{y_{max}^{(\vartheta_0)}} \right) \times \left(T - \Delta_{\vartheta_0}^{T_0, T} \right)$$

fortsetzbar sind.



Beispiel

Wir setzen

$$f(y) = f_+ \frac{(\arctan(y) + \frac{\pi}{2})}{\pi} + f_-.$$

Wir können f durch

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{i}{2} f_+ (\log(1 - iz) - \log(1 + iz)) + \frac{1}{2} f_+ + f_- \\ &= \frac{i}{2} f_+ \log \left(\frac{1 - iz}{1 + iz} \right) + \frac{1}{2} f_+ + f_- \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm iy : y \in [1, \infty)\}$ fortsetzen.



Problem bei Anfangsdaten

Bisher haben wir immer angenommen, dass die Anfangsdaten in $L^2(\mathbb{R}^2)$ liegen. Betrachten wir aber z.B. die Auszahlungsfunktion

$$\tilde{g}(x_1, x_2) = (\exp(x_1) - K)^+ = \begin{cases} \exp(x_1) - K & \text{für } x_1 > \ln(K), \\ 0 & \text{für } x_1 \leq \ln(K). \end{cases}$$

so stellen wir fest, dass diese **nicht in $L^2(\mathbb{R}^2)$ liegt**.



Lösungsidee

Daher betrachten wir das Problem in dem mit der Wichtungsfunktion ξ gewichteten Hilbertraum. Wir nehmen an, dass $u_0 \cdot \xi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ liegt. Dementsprechend betrachten wir statt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \mathcal{L}_{SVM}(x, t, D_x)u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \\ u_0 = u(x, 0) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

nun

$$\begin{cases} \xi(x) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \mathcal{L}_{SVM}(\xi(x)u(x, t)) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \\ u(x, 0) = \tilde{g}(x) \cdot \xi(x) & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

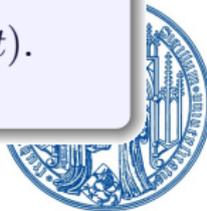


äquivalentes Problem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \tilde{\mathcal{L}}_{SVM}(x, t, D_x)u(x, t) &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \\ u(x, 0) &= \tilde{g} \cdot \xi(x) & x \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\mathcal{L}}_{SVM} = \sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 \tilde{b}_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{c}(x, t).$$



äquivalentes Problem

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x, T-t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}(x, t) & a_{12}(x, t) \\ a_{21}(x, t) & a_{22}(x, t) \end{pmatrix} \\ \tilde{b}(x, T-t) &= \begin{pmatrix} \left(2 \frac{\xi_{x_1}(x)}{\xi(x)} a_{11}(x, t) + 2 \frac{\xi_{x_2}(x)}{\xi(x)} a_{12}(x, t) + b_1(x, t) \right) \\ \left(2 \frac{\xi_{x_2}(x)}{\xi(x)} a_{22}(x, t) + 2 \frac{\xi_{x_1}(x)}{\xi(x)} a_{12}(x, t) + b_2(x, t) \right) \end{pmatrix} \\ \tilde{c}(x, T-t) &= \frac{1}{\xi(x)} \left(2a_{12}(x, t)\xi_{x_1x_2}(x) + a_{22}(x, t)\xi_{x_2x_2}(x) \right. \\ &\quad \left. + a_{11}(x, t)\xi_{x_1x_1}(x) + b_1(x, t)\xi_{x_1}(x) \right. \\ &\quad \left. + b_2(x, t)\xi_{x_2}(x) \right)\end{aligned}$$



Existenz und Eindeutigkeit im gewichteten $L^2(\mathbb{R}^2)$

Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Ist der Differentialoperator $\tilde{\mathcal{L}}_{SVM}(x, t, D_x)$ gleichmäßig elliptisch, die Koeffizientenfunktionen messbar und beschränkt und ist $\tilde{g} \cdot \xi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, dann besitzt das Cauchyproblem (AWP) in dem gewichteten Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^2, \xi)$ eine eindeutige schwache Lösung.

Beispiel

Wählen wir z.B. als Gewichtsfunktion

$$\xi(x_1, x_2) = \left(e^{ax_1} + e^{bx_2} + e^{-bx_2} \right)^{-1}$$

mit Konstanten $a, b \in (1, \infty)$, dann ist obiger Satz erfüllt.



Geschätze Parameter

Zeitraum	α	β	ρ	γ	$\exp(m)$	μ
6 Monate	~ 155	16.8447	-0.11	-4.97	0.1015	-0.1428
3 Monate	~ 155	18.2925	-0.0695	-4.07	0.1030	-0.0695
$\frac{3}{2}$ Monate	~ 155	15.5848	-0.2	2.36	0.0994	0.4170

$$f(x_2) = \exp(x_2)$$



Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, K. Ronnie Sircar
"Financial modeling in a fast mean-reverting stochastic
volatility environment", Asia-Pacific Financial Markets 6(1)
37-48.



Geschätze Parameter

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \frac{2}{\pi} \arctan(x_2 + m) + 1.1 & g(x_1) &= (x_1 - 450)^+ \\ \alpha &= 155 & \beta &= 16.8 \\ m &= -2.3 & \mu &= 0.1 \\ \rho(t) &= -0.1 & \gamma(x, t) &= -4 \\ r &= 0.0225 \end{aligned}$$



Numerische Behandlung und Simulation

Generelle Gliederung

Generell kann zwischen 2 Arten der numerischen Simulation unterschieden werden:

- 1 Lösung des Cauchy-Anfangswertproblems
- 2 stochastische Simulation



Finite-Differenzen

Vorgehensweise

Das Gebiet auf dem die Differentialgleichung gelöst werden soll wird mit einem Gitter zu überzogen und nur an den Knotenpunkten betrachtet.

Dabei werden die in der Differentialgleichung auftretenden Differentialoperatoren durch Differentialquotienten ersetzt.



verwendete Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{i,j,k} \approx D_x^{(disk)} U = \frac{U_{i+1,j,k} - U_{i-1,j,k}}{2h_x}$$

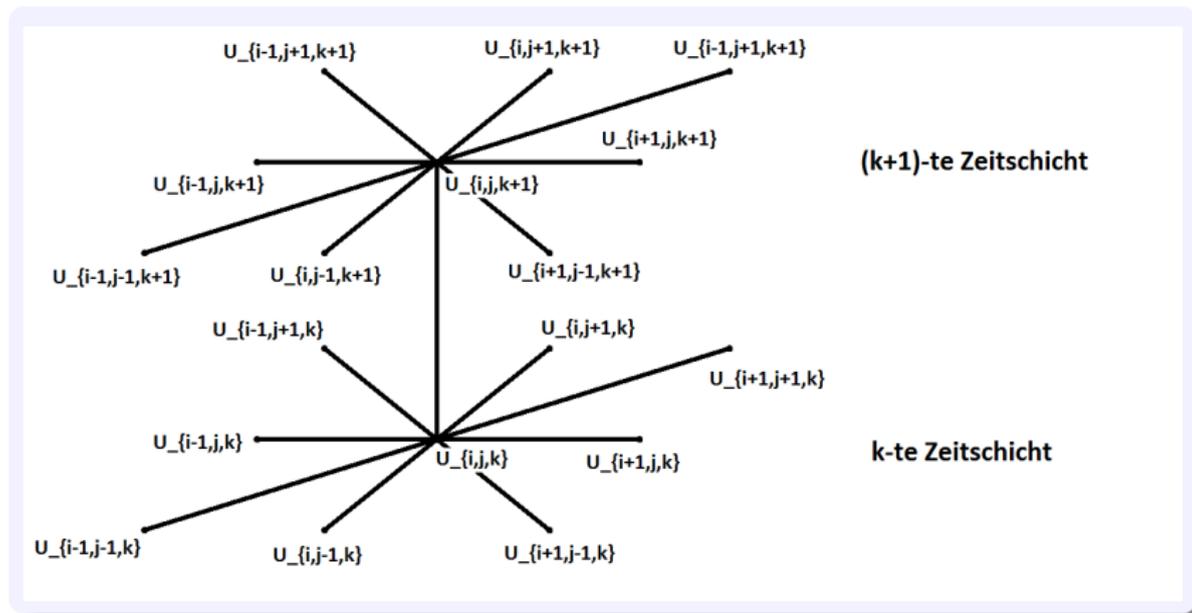
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{i,j,k} \approx D_{xx}^{(disk)} U = \frac{U_{i+1,j,k} - 2U_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_{i,j,k} \approx D_{xy}^{(disk)} U = \frac{U_{i+1,j+1,k} - U_{i-1,j+1,k} - U_{i+1,j-1,k} + U_{i-1,j-1,k}}{4h_x h_y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} u_{i,j,k} \approx D_t^{(disk)} U = \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k}}{\tau}$$



Veranschaulichung der Vorgehensweise



Lösungsansätze

Pyramidenstumpf - explizites Verfahren

Idee

Wir beginnen im ersten Schritt nicht mit einer Diskretisierung des Gebietes welches wir später auswerten wollen, sondern mit einem vergrößerten Gebiet, das genau so groß ist, dass nach n_t Zeitschritten und den damit verbundenen Verlust der jeweiligen Randpunkte in jedem Zeitschritt, am Ende nur noch das zu betrachtende Gebiet übrig bleibt.

Problem

Explizite Finite-Differenzen Verfahren sind sehr instabil, daher keine Konvergenz für vertretbare Schrittweiten.



Lösungsansätze

Betrachtung des gewichteten AWP's

Idee

Wir betrachten ein gewichtetes AWP, so dass Anfangsbedingungen in $L^2(\mathbb{R}^2)$ liegen. Dann erweitern wir das Gebiet und nehmen Dirichlet Nullrandbedingungen an.

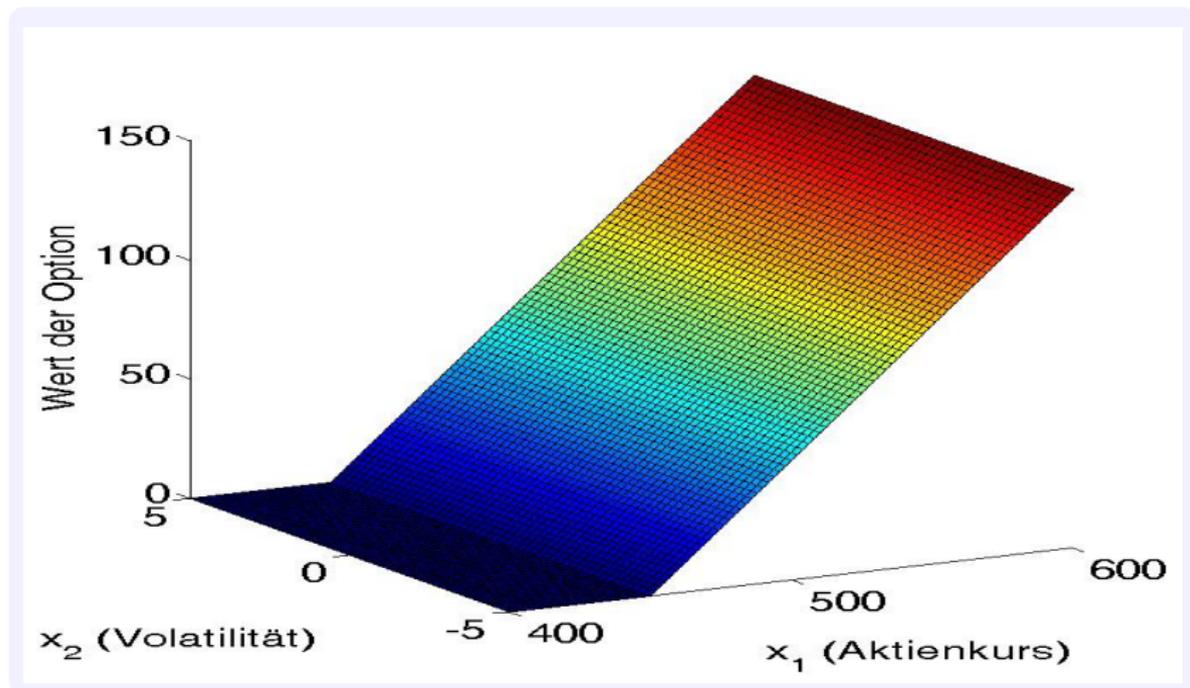
Probleme

- 1 Fehler am Rand werden bei der Rücktransformation in Abhängigkeit von der Wichtungsfunktion verstärkt (in unserem Fall exponentiell).
- 2 Sehr starker Transport in der DGL.



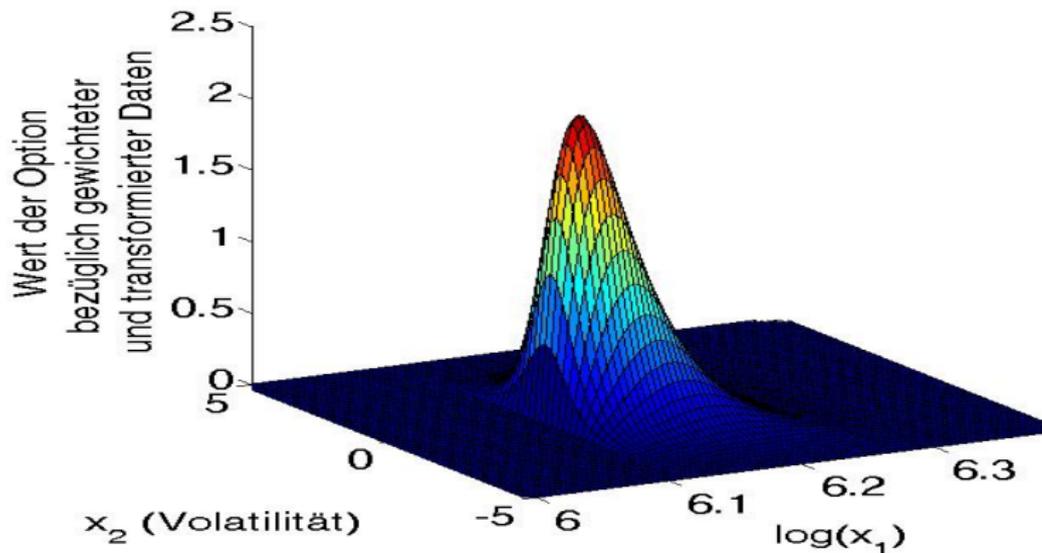
Lösungsansätze

ungewichtete und untransformierte Anfangsdaten



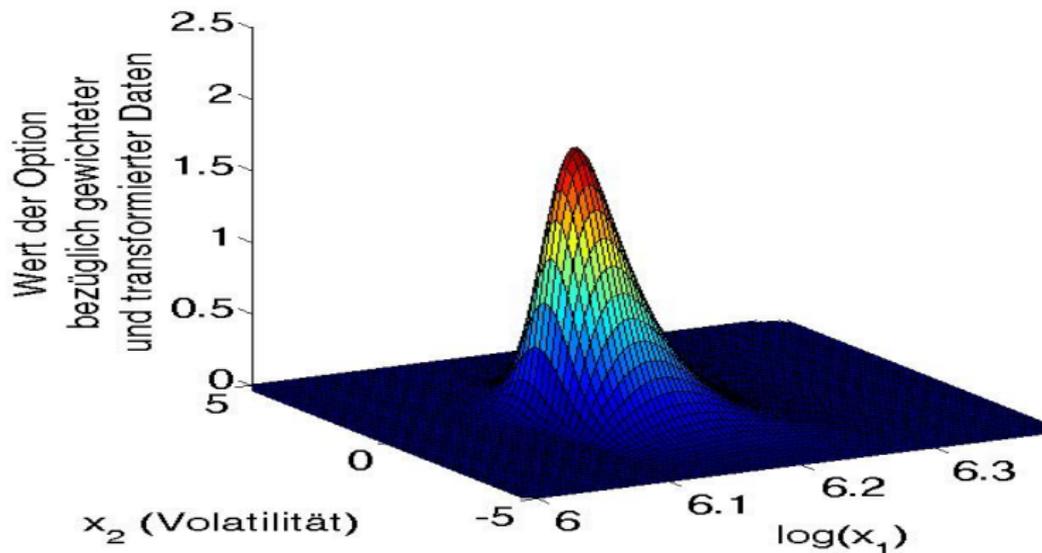
Lösungsansätze

gewichtete und transformierte Anfangsdaten



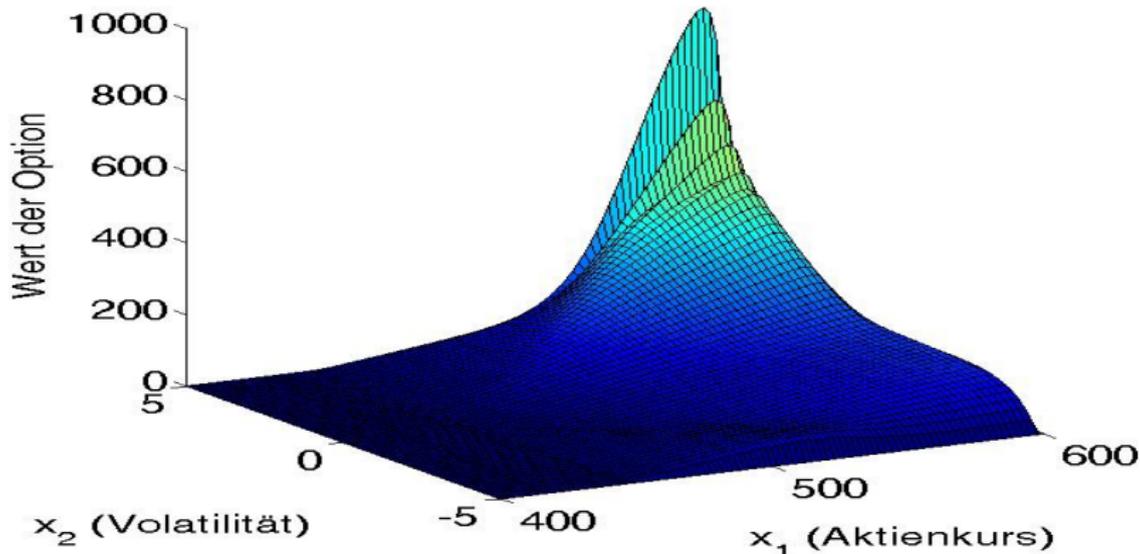
Lösungsansätze

Lösung nach einem Schritt der Länge $5 \cdot 10^{-5}$



Lösungsansätze

Zurücktransformierte Lösung nach einem Schritt der Länge $5 \cdot 10^{-5}$



Lösungsansätze

wir tricksen bei den Randbedingungen

Idee

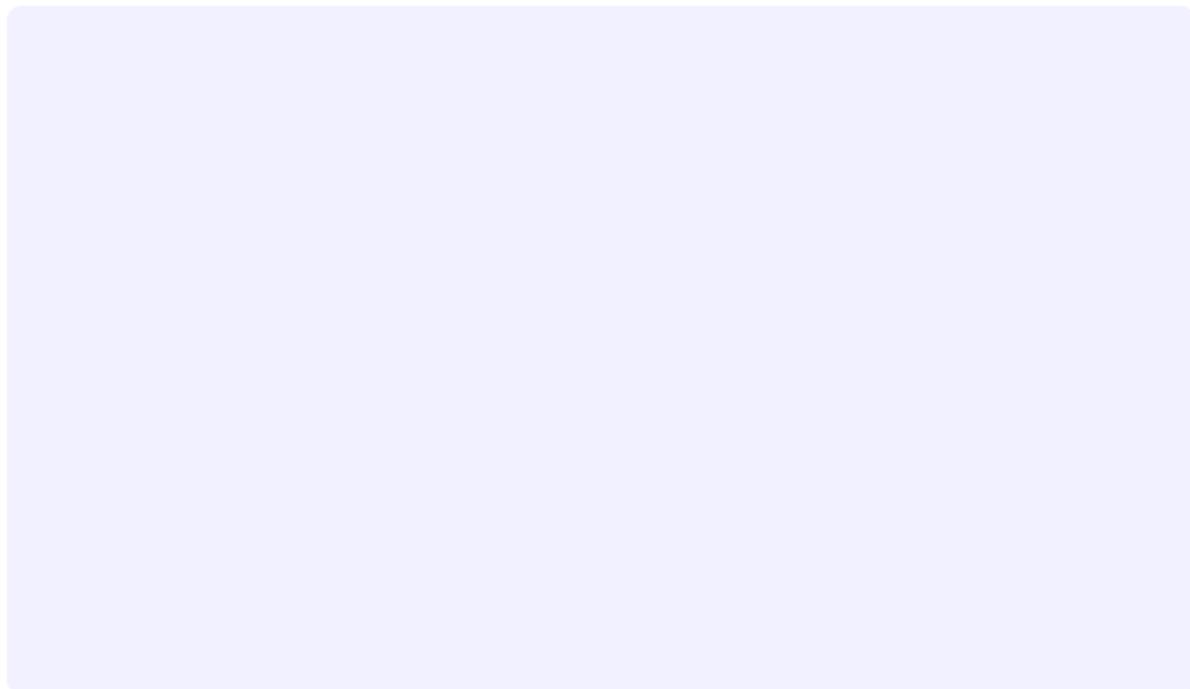
Annahme von Neumann-Randbedingung.

Berücksichtigung der Tatsache, dass sich das asymptotische Verhalten der Lösung für große Werte dem der Anfangsbedingung (Auszahlungsfunktion) anpasst.



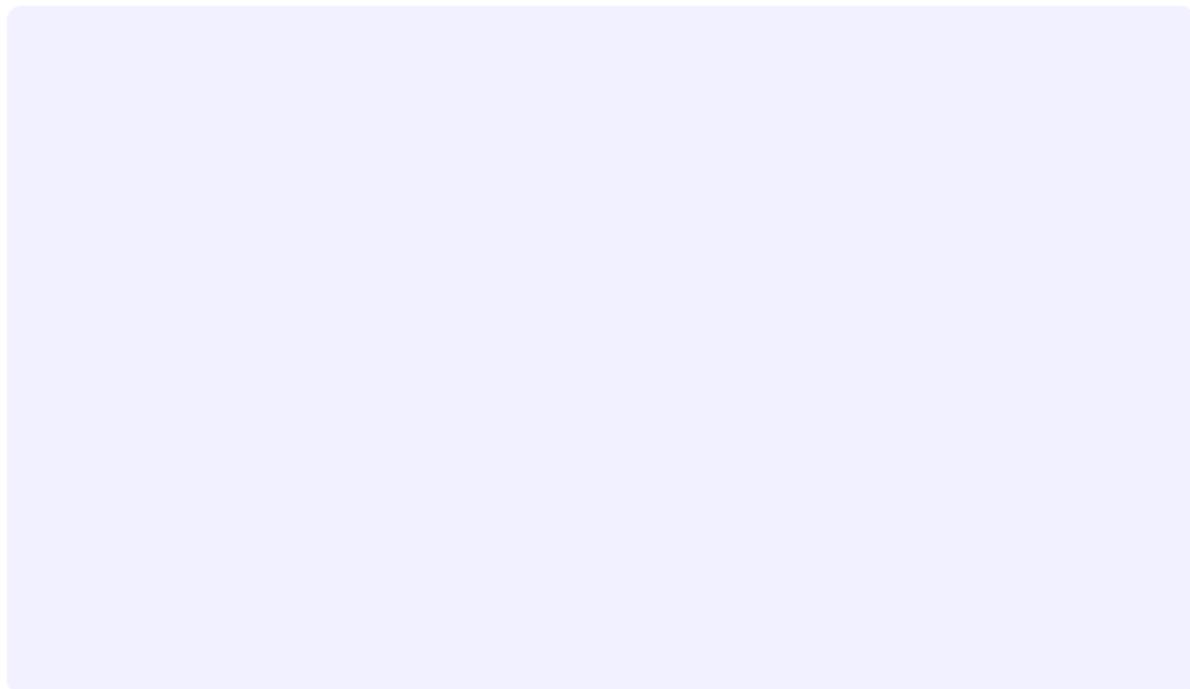
Finite-Differenzen mit Neumann-RB

europäische Call-Option mit Auszahlungsfkt. $g = (x_1 - 450)^+$



Finite-Differenzen mit Neumann-RB

europäische Option mit Auszahlungsfkt. $g = (x_1 - 445)^+ - (x_1 - 455)^+$



Galerkin Methode

Vorgehensweise

Approximation der Lösung auf einem endlichdimensionalen Unterraum, welcher durch eine Orthonormalfolge

$$\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^2)$$

aufgespannt wird.



Lösungsansätze

Wahl der Ansatzfunktionen

Hermiteische Polynome

Die zweidimensionalen Hermiteischen Polynome sind durch

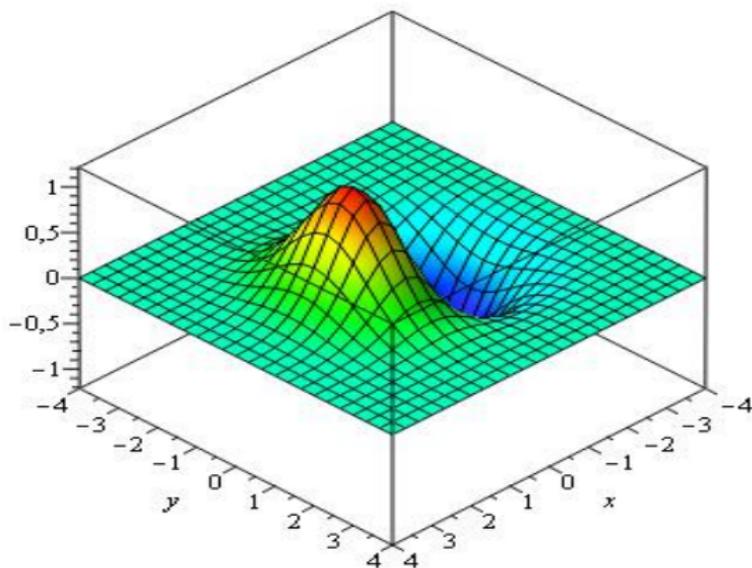
$$\begin{aligned}H_{m,n}(x, y) &= H_m(x)H_n(y) \\ &= (-1)^{m+n} e^{x^2+y^2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

gegeben.



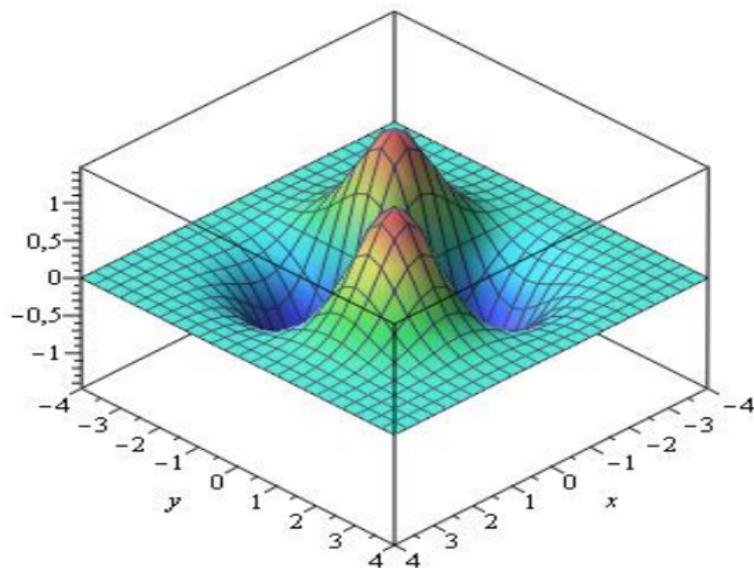
Hermiteische Polynome

Beispiel: $e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} H_{1,0}(x, y)$



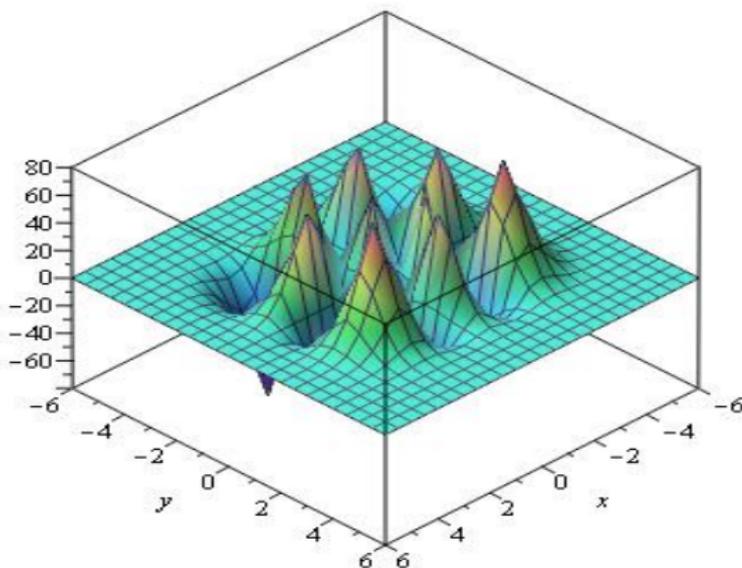
Hermiteische Polynome

Beispiel: $e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} H_{1,1}(x, y)$



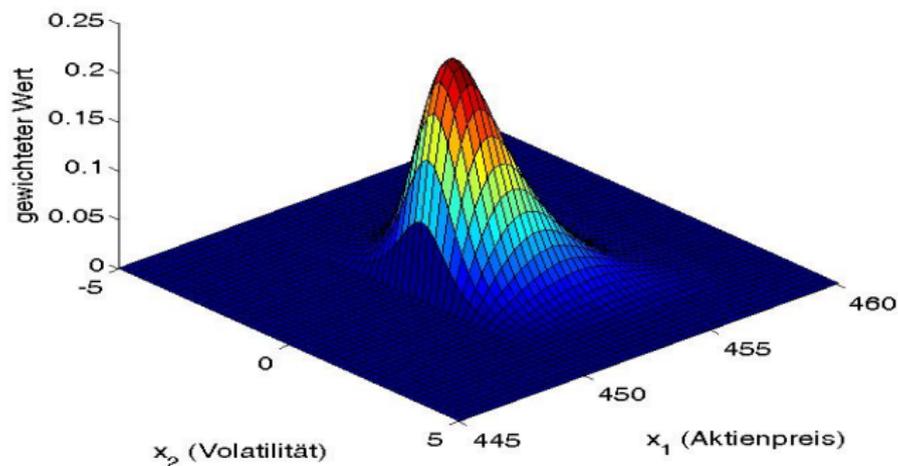
Hermiteische Polynome

Beispiel: $e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} H_{4,3}(x, y)$



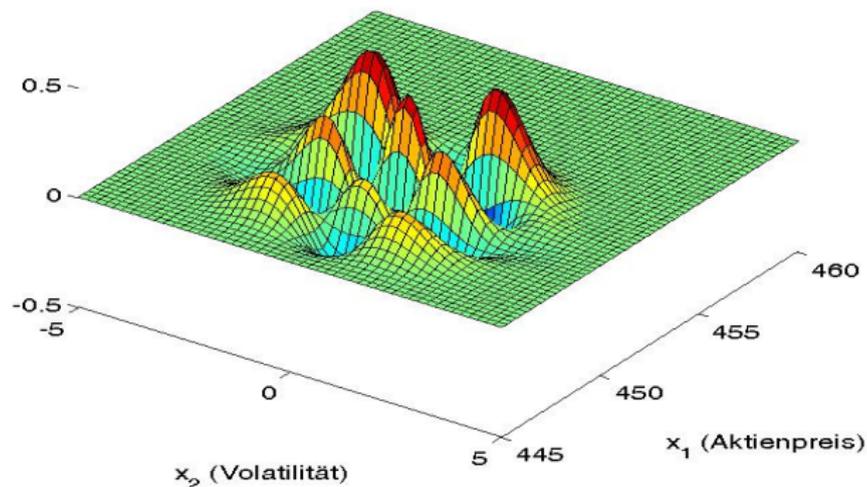
Hermiteische Polynome

Beispiel: gewichtete Anfangsbedingung



Hermiteische Polynome

Beispiel: durch Hermiteische Polynome angenäherte gewichtete AB



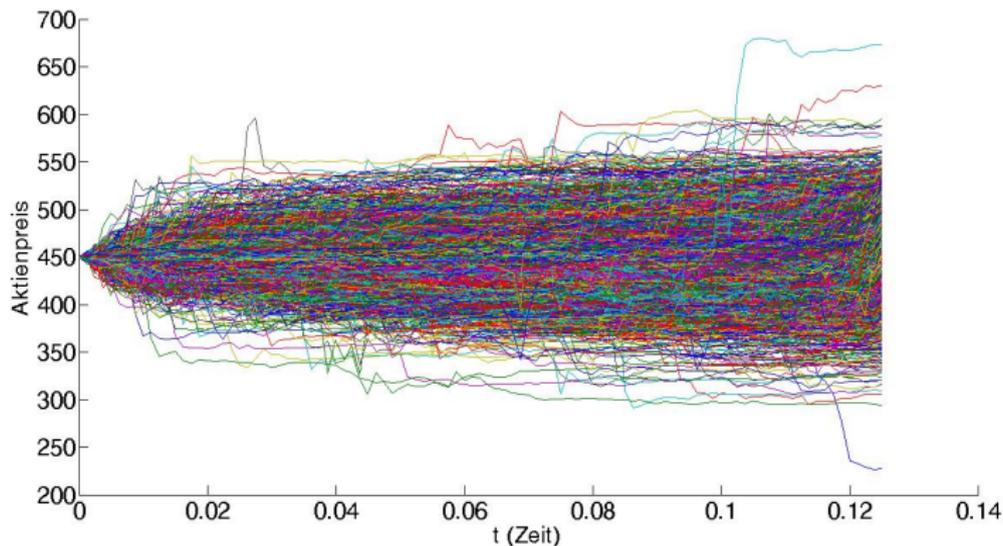
Monte-Carlo Simulation

- 1 Simulation der Pfade des Aktienkurses (bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes) mittels Pseudozufallszahlen.
- 2 Berechnung des simulierten Optionspreises.
- 3 m -fache Wiederholung und anschließende Mittelwertbildung.



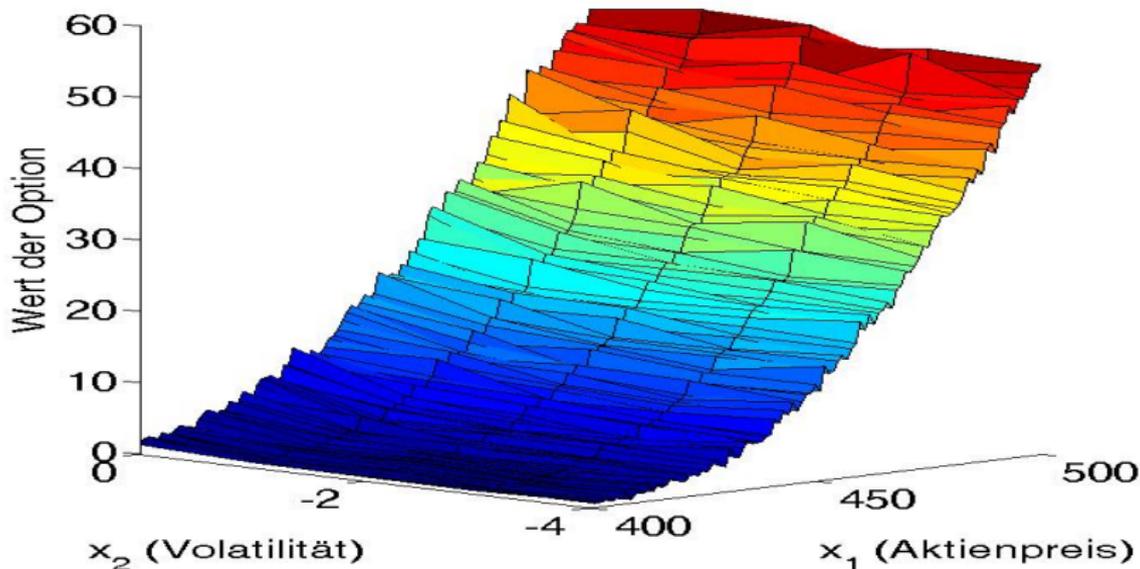
Monte-Carlo Simulation

10 000 Realisierungen des OU-Modells



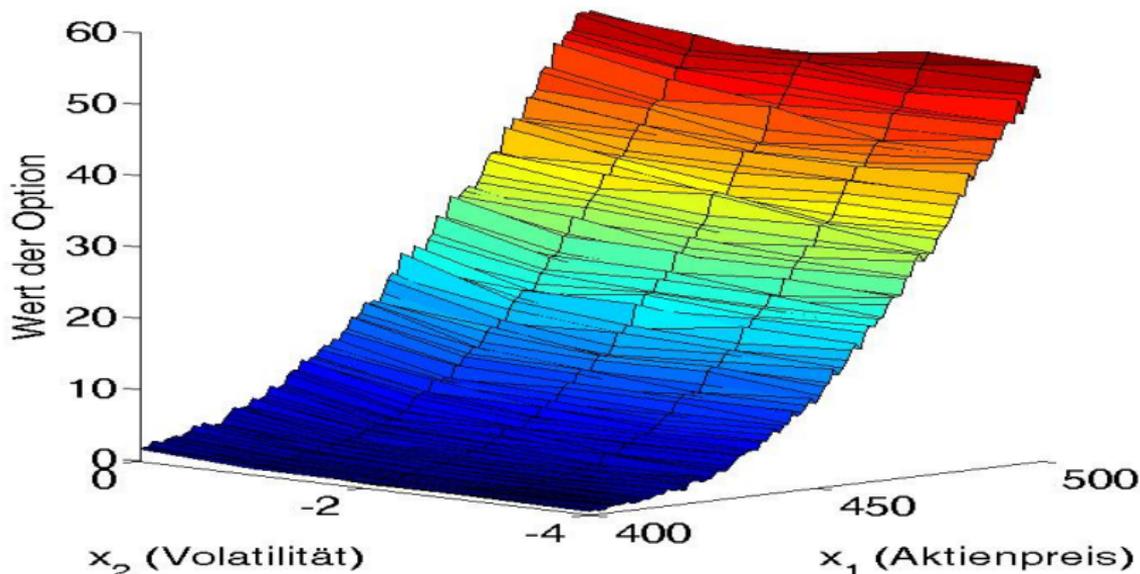
Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 500 Realisierungen



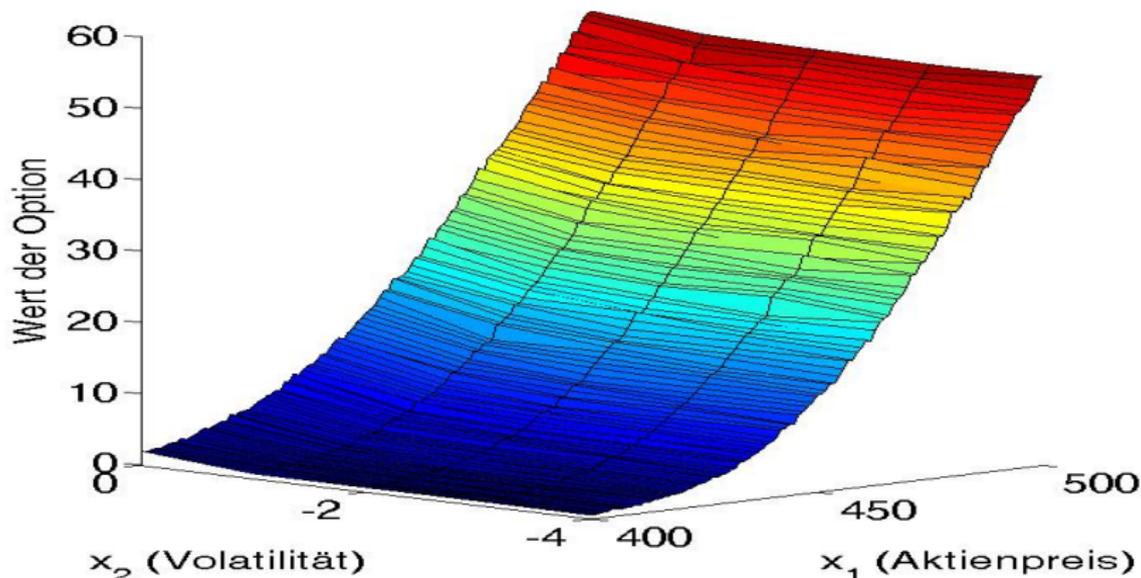
Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 1 000 Realisierungen



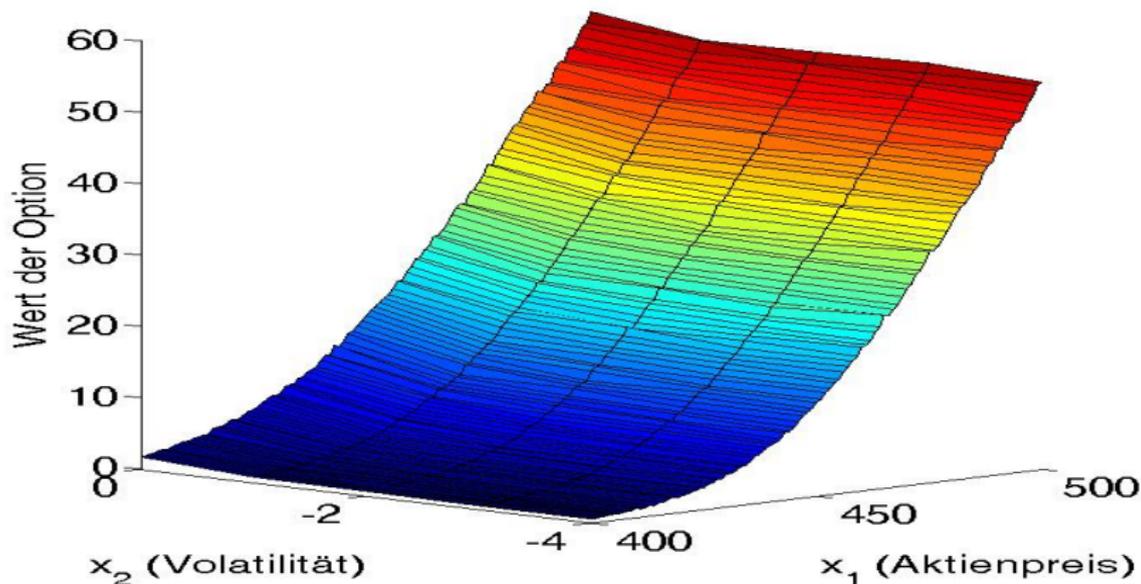
Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 5 000 Realisierungen



Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 10 000 Realisierungen



Eigenschaften

Vorteile

- 1 sehr schnell
- 2 sehr robust
- 3 sehr einfache Implementierung
- 4 keine Randbedingungen notwendig

Nachteil

keine Funktion als Lösung, sondern nur ein Wert



Hauptliteratur

Stochastik und Finanzmathematik

-  Tomas Björk, *“Arbitrage Theory in Continuous Time”*, Oxford University Press, New York, 2009.
-  Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, K. Ronnie Sircar, *“Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility”*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
-  Ralf und Elke Korn, *“Option Pricing and Portfolio Optimization”*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.
-  Y.K. Kwok, *“Mathematical Models of Financial Derivatives”*, Springer Finance, Singapore, 1998.



Hauptliteratur

Partielle Differentialgleichungen

-  S. Agmon, *“Lectures on Elliptic Boundary Value Problems”*, American Mathematical Society, Providence, 2005.
-  L. C. Evans, *“Partial Differential Equations”*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.
-  A. Friedman, *“Partial Differential Equations of Parabolic Type”*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
-  N. V. Krylov, *“Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces”*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.



Hauptliteratur

Funktionalanalysis und Halbgruppen

-  Komatsu, H., “*Abstract analyticity in time and unique continuation property of solutions of a parabolic equation*”, Journal of the Faculty of Science University of Tokyo (9): 1-11, 1961.
-  A. Pazy, “*Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*”, Springer, New York, 1983.
-  H. Tanabe, “*Equations of Evolution*”, Pitman Publ., Boston, Mass.-London, 1979.



Hauptliteratur

Numerik



Christian Großmann und Hans-Görg Roos, *“Numerik partieller Differentialgleichungen”*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.



Alfred Wünsche, *“General Hermite and Laguerre two-dimensional polynomials”*, J. Phys. A: Math. Gen. 33: 1603-1629, 2000. Vieweg, Braunschweig, 2003.



Hauptliteratur

Komplexe Analysis

-  L. Hörmander, *“An Introduction to Complex Analysis in Several Variables”*, North-Holland, Amsterdam and New York, 1966.
-  Steven George Krantz and Harold R. Parks, *“A Primer of Real Analytic Functions”*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.
-  E. M. Stein and G. Weiss, *“Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces”*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
-  P. Takáč, *“Analyticity of solutions to parabolic systems”*, in Bearbeitung.



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

