

# Analytische Methoden und die Black-Scholes Modelle

## Diplomverteidigung

**Carsten Erdmann**

Universität Rostock  
Institut für Mathematik

20.01.2011



# Agenda

- 1 Das Ornstein-Uhlenbeck Volatilitätsmodell
- 2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in  $L^2(\mathbb{R}^2)$
- 3 Analytizität der Lösung
- 4 Numerische Behandlung und Simulation



## Problem

Wir wollen den Preis eines **europäischen Derivats** bestimmen.

Dabei sind Derivate Finanztitel, die ihren Wert aus anderen Finanztiteln (Underlyings) ableiten.

Ein spezielles Derivat ist das folgende:



# Europäische Call-Option

## Definition

Eine **europäische Call-Option** ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht gibt, jedoch nicht die Pflicht, eine Einheit eines zugrundeliegenden Assets zu einem vorher vereinbarten Ausführungspreis  $K$  zum Ausführungszeitpunkt  $T$  zu kaufen.

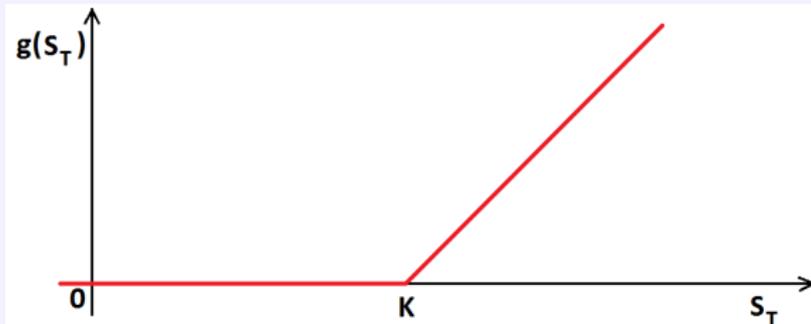


# Europäische Call-Option

## Auszahlungsfunktion

Bezeichnet  $S_T$  den Preis des zugrundeliegenden Assets zum Ausführungszeitpunkt  $T$ , dann ist der Wert einer europäischen Call-Option zum Ausführungszeitpunkt  $T$ , seine sogenannte **Auszahlung**  $g$ , gegeben durch

$$g(S_T) = (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K & \text{für } S_T > K, \\ 0 & \text{für } S_T \leq K. \end{cases}$$



# Allgemeines stochastisches Volatilitätsmodell

## Definition

Ein **stochastisches Volatilitätsmodell** besteht aus zwei Assets, deren Entwicklungen wie folgt beschrieben werden können

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma_t S_1(t)dW(t)$$

mit  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $r \in [0, \infty)$ ,  $\sigma_t \geq c > 0$  für alle  $t \in [0, T]$  und  $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$  eine (Standard-)Brownsche Bewegung. Dabei wird  $\{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$  als der **Volatilitäts-Prozess** bezeichnet.



# OU-Volatilitätsmodell

## Definition

Das **Ornstein-Uhlenbeck Volatilitätsmodell** besteht aus zwei Assets, deren Entwicklungen wie folgt beschrieben werden können

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + S_1(t)f(Y_t)dW(t)$$

$$dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta \left( \rho(t) dW(t) + \sqrt{1 - \rho(t)^2} dZ(t) \right)$$

mit Konstanten  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  und  $\alpha \geq 0$ , sowie

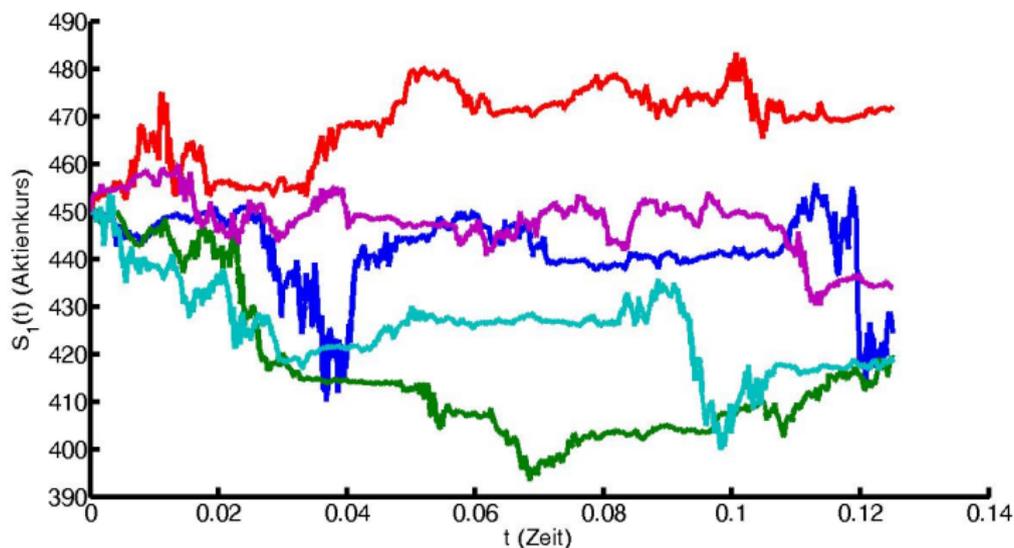
$$f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow (f_-, f_+), \quad 0 < f_- < f_+ < \infty$$

$$\rho(\cdot) : [0, T] \rightarrow (-\rho_0, \rho_0), \quad 0 < \rho_0 < 1.$$



## OU-Volatilitätsmodell

Beispiel:  $f(\cdot) = \exp(\cdot)$ ,  $\alpha = 155$ ,  $\beta = 15.58$ ,  $\gamma = 2.36$ ,  $\rho = -0.2$ ,  $\mu = 0.4170$  und  $m = -2.3086$  für den Zeitbereich  $[0, \frac{1}{8}]$  ( $\frac{3}{2}$  Monate)



## äquivalentes Cauchy-Anfangswertproblem

Sei die Preisfunktion  $p$  durch

$$p(S_t, Y_t, t) = \mathbb{E}^* \left( e^{r(T-t)} g(S_T) | \mathcal{F}_t \right)$$

gegeben. Weiter sei  $u$  durch

$$u(x_1, x_2, t) = e^{rt} p \left( e^{x_1 - rt}, m + e^{\alpha t} (x_2 - m), T - t \right)$$

definiert. Dann erfüllt  $u$  das Cauchy-(Anfangswert-)Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \mathcal{L}_{SVM}(x, t, D_x)u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \\ u(x, 0) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$



# äquivalentes Cauchy-Anfangswertproblem

Differentialoperator  $\mathcal{L}_{SVM}(x, t, D_x)$

$$\mathcal{L}_{SVM}(x, t, D_x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t)$$

$$a(x_1, x_2, T-t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{f}^2(x_2, t) & \tilde{\beta}(t) \tilde{f}(x_2, t) \rho(t) \\ \tilde{\beta}(t) \tilde{f}(x_2, t) \rho(t) & \tilde{\beta}^2(t) \end{pmatrix}$$

$$b(x_1, x_2, T-t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \tilde{f}^2(x_2, t) \\ -\tilde{\beta}(t) \left( \rho(t) \frac{(\mu-r)}{\tilde{f}(x_2, t)} + \tilde{\gamma}(x_1, x_2, t) \sqrt{1-\rho^2(t)} \right) \end{pmatrix}$$

$$c(x_1, x_2, T-t) = 0$$



# Existenz und Eindeutigkeit

## des Cauchy-Anfangswertproblems

Seien der Differentialoperator  $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$  gleichmäßig elliptisch, die Koeffizientenfunktionen von  $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$  Lebesgue-messbar und beschränkt und die Anfangsdaten  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$  des Cauchy-Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x) u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (\text{AWP})$$



# Analytizität

## Gebietsdefinition

Damit wir die Analytizität beweisen können, benötigen wir das komplexe Gebiet  $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$  mit

$$\mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X}^{(r_0)} \times \Delta_{\vartheta_0}^{T_0, T} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$$

$$\mathfrak{X}^{(r_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, |y|_\infty < r_0\}$$

$$\Delta_{\vartheta_0}^{T_0, T} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ t = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, \theta \in (-\vartheta_0, \vartheta_0), \right.$$

$$\left. |\text{Im}(t)| < T_0 \tan(\vartheta_0), 0 < \Re(t) < T \right\}$$



# Analytizität

## Annahmen

$$\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x) = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t)$$

- (AN1)** (i)  $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\bar{\mathcal{D}}) \cap L^\infty(\mathcal{D}) \cap A(\mathcal{D})$  ( $i, j = 1, 2$ ).  
(ii)  $a_{ij} \in C^3(\bar{\mathcal{D}}) \cap C_{\text{unif}}^0(\bar{\mathcal{D}})$  ( $i, j = 1, 2$ ).  
(iii)  $b_i, c \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$  ( $i = 1, 2$ ).

**(AN2)** Der Differentialoperator  $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$  ist gleichmäßig elliptisch.

**(AN3)** Die Anfangsbedingung  $u_0$  liegt in  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .



# Analytizität

## Vorgehensweise 1/5

### Analytizität bezüglich der Zeit

Die Analytizität bezüglich der Zeit lässt sich mit Hilfe der Halbgruppentheorie und der konstruierten Fundamentallösung beweisen:

Erst wird die Analytizität unter abstrakten Voraussetzungen gezeigt und diese Voraussetzungen werden dann auf den Differentialoperator  $\mathcal{L}_{Cauchy}(x, t, D_x)$  übertragen



# Analytizität

## Vorgehensweise 2/5

### Eine a-priori-Abschätzung

Zuerst beweist man eine a-priori-Abschätzung in  $L^2(\mathbb{R}^2)$  für die holomorphe Fortsetzung der Lösung von (AWP) auf das komplexe parabolische Gebiet  $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0) \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ .

Das heißt, man schätzt die Lösung  $\mathbf{u}$  in dem Gebiet  $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$  durch die  $L^2(\mathbb{R}^2)$ -Norm der Anfangsdaten ab.



# Analytizität

## Vorgehensweise 3/5

Satz: Anfangsdaten aus  $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r_0)})$

Seien die Annahmen (AN1)-(AN2) erfüllt und  $u_0 \in \mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r_0)})$ .

Dann hat das Cauchy-Problem (AWP) eine eindeutige klassische Lösung  $\mathbf{u} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Diese ist holomorph in  $\mathfrak{D}$  und besitzt eine stetige Fortsetzung auf  $\mathfrak{X}^{(r_0)} \times [0, T]$  mit  $\mathbf{u}(\cdot, 0) = u_0$  in  $\mathfrak{X}^{(r_0)}$ .

Weiterhin erfüllt  $\mathbf{u}$  die a-priori-Abschätzung.



# Analytizität

Vorgehensweise 4/5

## Satz: Approximationsresultat

Die Einschränkung von  $\mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r_0)})$  auf  $\mathbb{R}^2$  ist ein dichter Unterraum des Lebesgue-Raumes  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .



# Analytizität

Vorgehensweise 5/5

## Satz: Analytizität

Seien die Annahmen (AN1)-(AN3) erfüllt.

Dann besitzt das Cauchyproblem (AWP) eine eindeutige schwache Lösung  $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ .

Diese Lösung kann eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf dem Gebiet  $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0)$  fortgesetzt werden. (Wobei die Zahlen  $\kappa_0, \nu_0 \in (0, \infty)$  gerade so gewählt sind, dass  $\Gamma_T^{(T_0)}(\kappa_0, \nu_0) \subset \mathcal{D}$ .)



# Analytizität

## Beweisidee

Es wird eine Folge  $\{u_{n,0}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^2(\mathfrak{X}^{(r)})$  gebildet, die gegen die Anfangsdaten  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$  konvergiert.

Dann wird gezeigt, dass für jedes dieser Folgeglieder eine eindeutige Lösung  $\mathbf{u}_n$  von (AWP) existiert und zudem die a-priori-Abschätzung gilt.

Man kann zeigen, dass die Folge der zugehörigen Lösungen  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sogar eine Cauchy-Folge in  $L^2(\mathbb{R}^2)$  ist, woraus dann durch Grenzwertbetrachtung die Behauptung folgt.



# Numerische Behandlung und Simulation

## Generelle Gliederung

Generell kann zwischen 2 Arten der numerischen Simulation unterschieden werden:

- 1 Lösung des Cauchy-Anfangswertproblems
- 2 stochastische Simulation



# Finite-Differenzen

## Vorgehensweise

Das Gebiet, auf dem die Differentialgleichung gelöst werden soll, wird mit einem Gitter überzogen und nur an den Knotenpunkten betrachtet.

Dabei werden die in der Differentialgleichung auftretenden Differentialoperatoren durch Differentialquotienten ersetzt.



# Lösungsansätze

## Annahme von Neumann-Randbedingungen

### Idee

#### Annahme von Neumann-Randbedingung

Berücksichtigung der Tatsache, dass sich das asymptotische Verhalten der Lösung für große Werte dem der Anfangsbedingung (Auszahlungsfunktion) anpasst



# Finite-Differenzen mit Neumann-RB

europäische Call-Option mit Auszahlungsfkt.  $g(x_1) = (x_1 - 450)^+$



# Finite-Differenzen mit Neumann-RB

europäische Option mit Auszahlungsfkt.  $g(x_1) = (x_1 - 445)^+ - (x_1 - 455)^+$



# Monte-Carlo Simulation

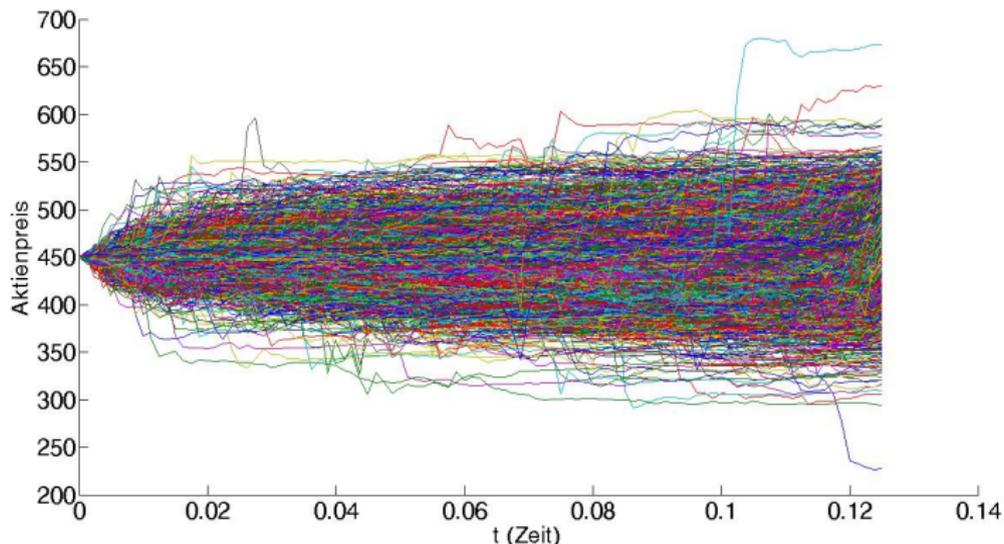
## Vorgehensweise

- 1 Simulation der Pfade des Aktienkurses (bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes) mittels Pseudozufallszahlen
- 2 Berechnung des simulierten Optionspreises
- 3  $m$ -fache Wiederholung und anschließende Mittelwertbildung



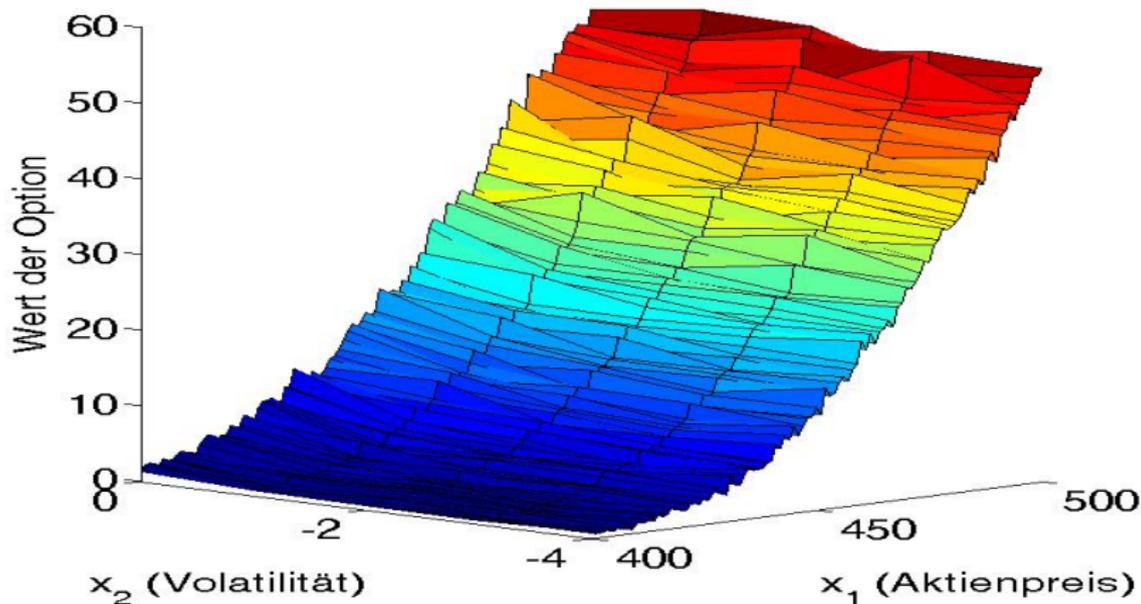
# Monte-Carlo Simulation

10 000 Realisierungen des OU-Modells



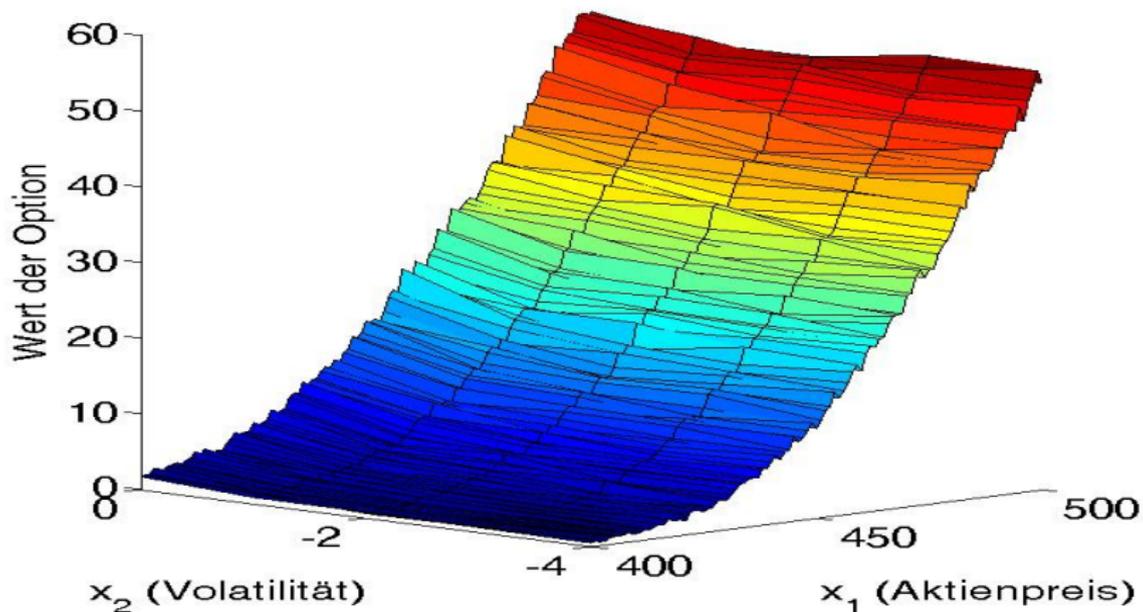
# Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 500 Realisierungen



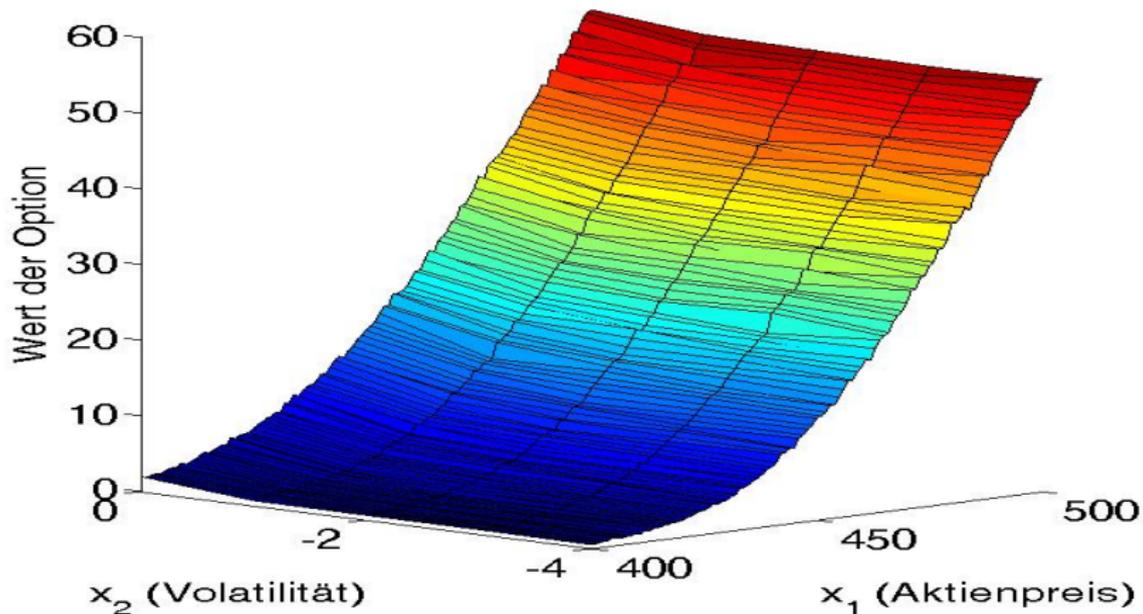
# Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 1 000 Realisierungen



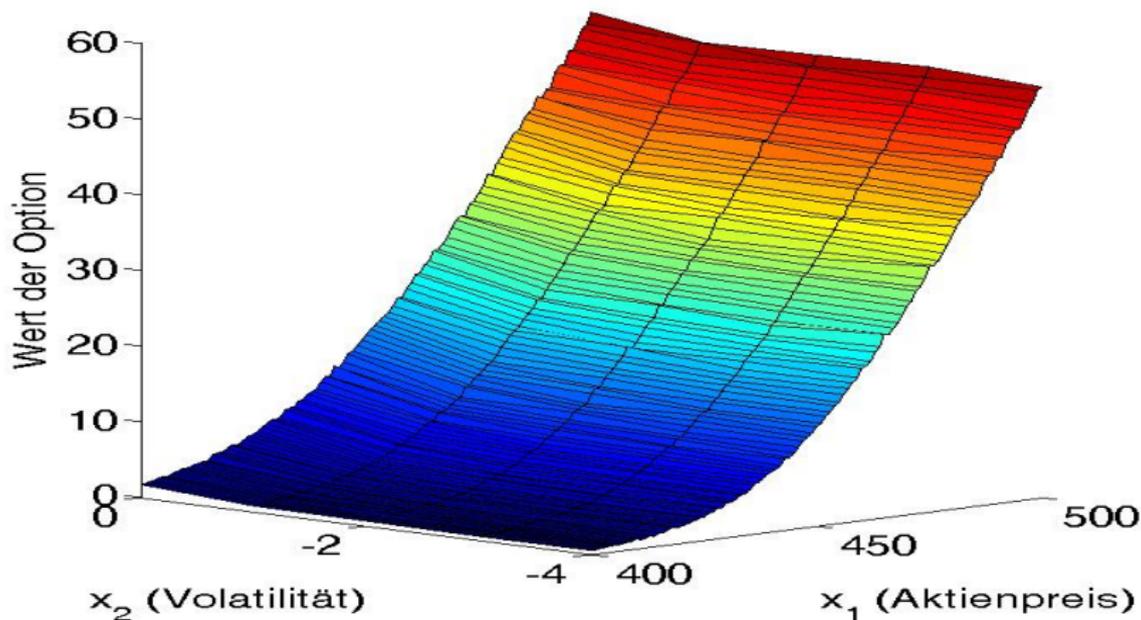
# Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 5 000 Realisierungen



# Monte-Carlo Simulation

berechneter Optionspreis über 10 000 Realisierungen



# Monte-Carlo Simulation

## Eigenschaften

### Vorteile

- 1 sehr schnell
- 2 sehr robust
- 3 sehr einfache Implementierung
- 4 keine Randbedingungen notwendig

### Nachteil

keine Funktion als Lösung, sondern nur ein Wert



# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

