Seminar Graphentheorie **06.04.2009**
Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

1 Historischer Hintergrund

Der Satz wurde erstmals 1852 von Francis Guthrie als Vermutung aufgestellt, als er die Grafschaften von England färben wollte. Es war offensichtlich, dass drei Farben nicht ausreichten und man fünf in keinem konstruierten Beispiel brauchte. In einem Brief des Londoner Mathematikprofessors Augustus De Morgan vom 23. Oktober 1852 an den irischen Kollegen William Rowan Hamilton wurde die Vermutung erstmals diskutiert und veröffentlicht: „Genügen vier oder weniger Farben, um die Länder einer Karte so zu färben, dass benachbarte Lnder verschiedene Farben tragen?“.

Der englische Mathematiker Arthur Cayley stellte das Problem 1878 der mathematischen Gesellschaft Londons vor. Innerhalb nur eines Jahres fand Alfred Kempe einen scheinbaren Beweis für den Satz. Elf Jahre später, 1890, zeigte Percy Heawood, dass Kempes Beweisversuch fehlerhaft war. Ein zweiter fehlerhafter Beweisversuch, 1880 von Peter Guthrie Tait veröffentlicht, konnte ebenfalls elf Jahre lang nicht widerlegt werden. Erst 1891 zeigte Julius Petersen, dass auch Taits Ansatz nicht korrekt war. Heawood gab im Jahre 1890 mit der Widerlegung von Kempes „Vier-Farben-Beweis“ zusätzlich einen Beweis für den Fünf-Farben-Satz an, womit eine obere Grenze für die Färbung von planaren Graphen zum ersten Mal fehlerfrei bewiesen wurde. In Kempes fehlerhaftem Versuch steckten bereits grundlegende Ideen, die zum späteren Beweis durch Appel und Haken führten.

Heinrich Heesch entwickelte in den 1960er und 1970er Jahren Verfahren, um einen Beweis mit Hilfe des Computers zu suchen.

Darauf aufbauend konnten Kenneth Appel und Wolfgang Haken 1977 einen solchen finden. Der Beweis reduzierte die Anzahl der problematischen Fälle von Unendlich auf 1.936 (eine spätere Version sogar 1.476), die durch einen Computer einzeln geprüft wurden.

1980 hinterlegte der britische Mathematiker George Spencer-Brown in der Royal Society ein Manuskript seines Beweises zum Vier-Farben-Satz. Der Beweis ist als Anhang in die deutsche Ausgabe seines Buches Laws of Form aufgenommen worden.

1996 konnten Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas einen modifizierten Beweis finden, der die Fälle auf 633 reduzierte. Auch diese mussten per Computer geprüft werden.

2004 haben Benjamin Werner und Georges Gonthier einen formalen Beweis des Satzes in dem Beweisassistenten Coq konstruiert. Dadurch ist es nicht mehr nötig, den Computerprogrammen zur Überprüfung der Einzelfälle zu vertrauen, sondern „nur“ dem Coq-System.

Der Vier-Farben-Satz war das erste große mathematische Problem, das mit Hilfe von Computern gelöst wurde. Deshalb wurde der Beweis von einigen Mathematikern nicht anerkannt, da er nicht direkt durch einen Menschen nachvollzogen werden kann. Schließlich muss man sich auf die Korrektheit des Compilers und der Hardware verlassen. Auch die mathematische

Eleganz des Beweises wurde kritisiert („Ein guter Beweis liest sich wie ein Gedicht, dieser sieht aus wie ein Telefonbuch!“)[5]

2 Kleinste Verbrecher

Wir nehmen an, dass ein Land jeweils nur aus einer Fläche besteht, nicht so wie beispielsweise die USA. Es sei bemerkt, dass die äußere Fläche ebenfalls als Land zählt.

Die generelle Strategie zur Lösung des Vierfarbensatzes erfolgt mit Hilfe der klassischen Induktion. Dabei liegt dem der Gedanke zugrunde, dass wenn es Landkarten gibt, welche sich nicht mit 4 Farben färben lassen, so muss es darunter auch eine mit kleinster Länderzahl f geben. Dann prüfen wir alle Eigenschaften dieses Gegenbeispiels, mit der Hoffnung einen Widerspruch zu erhalten. Das kleinste Gegenbeispiel wird auch als **kleinster Verbrecher** bezeichnet. Daher werden wir im Folgenden versuchen die Anzahl möglicher Landkarten einzuschränken und denjenigen, die übrigbleiben bestimmte Eigenschaften zuzuordnen.

Satz 2.1. *Eine Kante einer Landkarte gehört zu mindestens einer und höchstens zwei Landesgrenzen.*

Satz 2.2. *Bei Landkarten mit mindestens zwei Ländern enthält jede Landesgrenze mindestens einen Kreis.*

Satz 2.3. *Eine nicht zusammenhängende Landkarte besitzt ein Land mit nicht zusammenhängender Grenze.*

Definition 2.4. *Es sei L eine Landkarte und $n \in \mathbb{N}$. Eine **n-Färbung** von L ist eine Abbildung $\phi : M_L \to \{1, ..., n\}$. Eine n-Färbung ist **zulässig**, wenn benachbarte Länder immer verschiedene Werte (Farben) haben.*

Lemma 2.5. *Ist $\phi : M_L \to \{1, ..., n\}$ eine zulässige n-Färbung einer Landkerte L und $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ eine Permutation, so ist auch die Zusammensetzung $\pi \circ \phi$ eine zulässige n-Färbung.*

Lemma 2.6. *In einem kleinsten Verbrecher gibt es kein Land, das weniger als vier Nachbarn hat.*

Lemma 2.7. *Wenn es einen kleinsten Verbrecher mit f Ländern gibt, so gibt es einen kleinsten Verbrecher mit f Ländern ohne Brücken und Endkanten.*

Lemma 2.8. *Ein kleinster Verbrecher ohne Brücken und Endkanten ist eine zusammenhängende Landkarte.*

Satz 2.9. *Wenn es einen kleinsten Verbrecher L mit f Ländern gibt, so gibt es einen kleinsten Verbrecher mit f Ländern derart, dass jede Ecke mindestens den Grad 3 hat.*

Lemma 2.10. *Bei einem kleinsten Verbrecher ohne Brücken, derart dass der Grad jeder Ecke größer gleich 3 ist, haben zwei verschiedene Länder höchstens eine gemeinsame Grenzlinie.*

Definition 2.11. *Eine Landkarte ist **regulär**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *sie ist nicht leer,*

2. *sie ist zusammenhängend,*

3. *sie enthält keine Brücken und Endkanten,*

4. *je zwei verschiedene Länder haben höchstens eine gemeinsame Grenzlinie.*

Satz 2.12. *Wenn es überhaupt kleinste Verbrecher gibt, so gibt es unter ihnen reguläre Landkarten.*

Lemma 2.13. *Jede Ecke einer regulären Landkarte hat mindestens den Grad 3.*

Satz 2.14. *Bei einem regulären kleinsten Verbrecher ist jede Landesgrenze ein Kreis.*

Lemma 2.15. *Bei einem kleinsten Verbrecher ist der Grad einer Ecke gleich der Zahl der Länder, die diese Ecke zum Grenzpunkt haben.*

3 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 3.1. *Ein Graph heißt* ***gesättigt****, wenn Kanten ohne Vergrößerung der Eckenmenge nicht mehr hinzugenommen werden können.*

3.1 Eulersche Polyederformel

Lemma 3.2. *Sei v_L die Anzahl der Ecken, k_L die Zahl der Kanten, f_L die Zahl der Länder und z_L die Zahl der Komponenten. Entsteht die Landkarte L' aus der Landkarte L durch Erweiterung um eine Kante B, so berechnen sich die Anzahlen der Ecken, Kanten, Länder und Komponenten von L' aus den entsprechenen Anzahlen aus L wie folgt:*

Typ von B	$v_{L'}$	$k_{L'}$	$f_{L'}$	$z_{L'}$
Endkante mit zwei Endecken	v_L+2	k_L+1	f_L	z_L+1
Enkante mit einer Endecke	v_L+1	k_L+1	f_L	z_L
Brücke	v_L	k_L+1	f_L	z_L-1
Kreiskante	v_L	k_L+1	f_L+1	z_L

Lemma 3.3. *Entsteht die Landkarte L' aus der Landkarte L durch Erweiterung um eine Kante, so gilt*

$$v_{L'} - k_{L'} + f_{L'} - z_{L'} = v_L - k_L + f_L - z_L.$$

Satz 3.4. *Für jede Landkarte L gilt*

$$e_L - k_L + f_L - z_L = 1.$$

Lemma 3.5 (Eulersche Polyederformel)**.** *Ist L eine nichtleere zusammenhängende Landkarte, so gilt*

$$e_L - k_L + f_L = 2.$$

3.2 Dualität

Sei L eine Landkarte, die Ecken von L^* werden in das Innere einer jeden Fläche von M gezeichnet (inklusive der äußeren). Diese werden dann so verbunden, dass jede Kante von L^* eine Kante von L schneidet. Die so neu entstandene Karte L^* heißt die Duale Karte von L.

Definition 3.6. *Die Landkarte L^* heißt **dual** zu der Landkarte L, wenn gilt:*

1. *keine Ecke von L^* ist ein neutraler Punkt von L,*
2. *jedes Land von L enthält genau eine Ecke von L^*,*
3. *zwei Ecken von L^* sind genau dann durch eine Kante in L^* verbunden, wenn sie in benachbarten Ländern liegen,*
4. *eine Kante von L^* enthält nur Punkte der beiden Länder von L, denen ihre Ecken angehören und genau einen inneren Punkt einer gemeinsamen Grenzlinie dieser Länder.*

Lemma 3.7. *Ist die Landkarte L^* dual zu der Landkarte L, dann gilt*

- *L^* ist eine zusammenhängende Karte.*
- *Ist L nichtleer, so enthält jedes Land von L^* mindestens eine Ecke von L.*
- *Hat L mindestens 2 Länder, dann gilt*

$$\begin{aligned} v_{L^*} &= f_L \\ k_{L^*} &\leq k_L \\ f_{L^*} &\leq v_L. \end{aligned}$$

  Ist L regulär, so gelten in den letzten beiden Ausdrücken '='.
- *Sei L regulär, dann gilt*
  1. *Die Landkarte L ist eine zu L^* duale Landkarte.*
  2. *Die Landkarte L^* ist regulär.*

3.3 Kubische Landkarten

Satz 3.8 (Weiske)**.** *Es gibt keine Landkarte mit fünf paarweise benachbarten Ländern.*

Beweis. Angenommen es gibt eine Landkarte L die fünf paarweise benachbarte Länder enthält. Dann enthält eine zu L duale Landkarte L^* fünf Ecken, welche paarweise durch Kanten verbunden sind, also einen vollständigen Graphen mit fünf Ecken. Widerspruch. □

Lemma 3.9. *Wenn ein Land einer beliebigen Landkarte mehr als drei Nachbarn hat, so hat es zwei Nachbarn, die keine gemeinsame Grenzlinie haben.*

Satz 3.10. *Bei einem kleinsten Verbrecher hat kein Land weniger als fünf verschiedene Nachbarn.*

Satz 3.11. *Bei einem kleinsten Verbrecher hat jede Ecke den Grad 3.*

Beweis. Sei L ein kleinster Verbrecher. Angenommen, es gibt eine Ecke in L mit $d_L(x) > 3$. Sei D eine elementare Umgebung von x, man konstruiert eine neue Landkarte L', indem man die Kanten in L mit x als Endpunkt um die in D hineinragenden Strecken kürzen und die Kreisbögen, in die der Randkreis von D hineinragenden Strecken kürzen und die Kreisbögen, in die der Randkreis von D durch diese Kanten zerlegt wird, als neue Kanten hinzunehmen. Damit werden die Länder mit x als Grenzpunkt um Sektoren von D verkleinert und das Innere L'_0 von D kommt als neues Land hinzu. Nun ist die Anzahl der

Länder mit x als Grenzpunkt gleich dem Grad von x und nach unserer Konstruktion ist dies die Zahl der Nachbarn von L_0'. Wegen $d_L(x) > 3$ findet man Nachbarn L_1' und L_2' von L_0', die keine gemeinsame Grenzlinie haben. Wir bemerken, dass auch die Länder L_1 und L_2, aus denen L_1' und L_2' beim Übergang von L zu L' durch Verkleinern entstanden sind, keine gemeinsame Grenzlinie haben, sondern nur ander Ecke x zusammenstoßen. Durch Weglassen der gemeinsamen Grenzlinien von L_0' mit L_1' und L_2' erhält man eine Landkarte L'', bei der die Länder L_0', L_1' und L_2' zu einem Land L_x vereinigt sind. Die übrigen Länder ändern sich nicht. Da L'' immer noch ein Land weniger als L hat, besitzt L'' eine zulässige 4-Färbung ϕ''. Daraus erhalten wir eine zulässige 4-Färbung für L, indem wir den Ländern L_1 und L_2 die Farbe von L_x zuweisen und allen anderen Ländern die Farben ihrer außeralb von D gelegenen Landesteile bezüglich ϕ''. Also wäre L kein Verbrecher. Widerspruch. □

Definition 3.12. *Eine Landkarte ist* ***kubisch****, wenn sie regulär ist und alle Ecken genau den Grad 3 haben.*

Satz 3.13. *Es seien L eine reguläre und L^* eine zu L duale Landkarte.*

1. *L^* ist genau dann gesättigt, wenn L kubisch ist.*
2. *L^* ist genau dann kubisch, wenn L gesättigt ist.*

Satz 3.14. *Für eine reguläre Landkarte gilt:*

$$\sum_{r=1}^{v_L}(6-d_r) \geq 12,$$

$$\sum_{s=1}^{f_L}(6-n_s) \geq 12,$$

mit $d_r =$ Grad der Ecke r und $n_s =$ Anzahl der benachbarten Länder von Land s.

Beweis. Aufgrund der Dualitätstheorie genügt es eine Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{v_L}(6-d_r) &= 6\cdot v_L - 2\cdot k_L \\
&= 6\cdot v_L - 6\cdot k_L + 4\cdot k_L \\
&\geq 6\cdot v_L - 6\cdot k_L + 6\cdot f_L \\
&= 6\cdot(v_L - k_L + f_L) = 12
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.15. *Jede reguläre Landkarte hat Ecken, in denen höchstens fünf Kanten zusammenstoßen und Länder mit höchstens fünf Nachbarn.*

Definition 3.16. *Es seien L eine Landkarte und $n \in \mathbb{N}$. Eine* ***n-Kantenfärbung*** *von L ist eine Abbildung $\psi : L \to \{1, ..., n\}$. Eine n-Kantenfärbung ist* ***zulässig****, wenn Kanten mit gemeinsamen Randpunkten immer verschiedene Werte (Farben) haben.*

Satz 3.17 (Tait)**.** *Eine kubische Landkarte besitzt genau dann eine zulässige 4-Färbung, wenn sie eine zulässige 3-Kantenfärbung besitzt.*

Satz 3.18. *Gibt es in einer kubischen Landkarte einen Hamiltonschen Kreis, so besitzt die Landkarte eine zulässige 3-Kantenfärbung.*

3.4 Plättbare Graphen, Ringe, Konfiguration

Definition 3.19. *Es seien $G = (E, L)$ ein Graph und $n \in \mathbb{N}$. Eine **n-Eckenfärbung** von G ist eine Abbildung $\chi : E \to \{1, ..., n\}$. Eine n-Eckenfärbung heißt **zulässig**, wenn zwei Ecken, die Endpunkte ein und derselben Kante in L sind, immer verschiedene Werte (Farben) haben.*

Satz 3.20. *Eine Landkarte besitzt genau dann eine zulässige 4-Färbung, wenn jede zu ihr duale Landkarte eine zulässige 4-Eckenfärbung besitzt.*

Definition 3.21. *Ein **plättbarer Graph** ist ein Graph, der isomorph zu einem ebenen Graphen ist.*

Satz 3.22 (Kuratowski)**.** *Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn er keinen zu einer Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ isomorphen Teilgraphen besitzt.*

Satz 3.23. *Entsteht der kombinatorische Graph G' durch Kontraktion aus dem plättbaren Graphen G, so ist G' plättbar.*

Lemma 3.24. *In einem kleinsten Verbrecher ist jedes Dreieck Grenze eines Gebietes.*

Definition 3.25. *Ein Graph $G = (E, L)$ heißt **normal**, wenn er ein regulärer, gesättigter, ebener Graph ist, bei dem jedes Dreieck Rand eines Gebietes ist.*

Definition 3.26. *Sei $G = (E, L)$ ein Graph. Eine Menge R von Ecken heißt **Ring**, wenn sich ihre Elemente zu einer einfach geschlossenen Kette anordnen lassen; in diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der Elemente von R auch als die **Größe** des Ringes R.*

Satz 3.27. *In einem normalen Graphen bilden die Nachbarn einer Ecke stets einen Ring, dessen Größe mit dem Grad der Ecke übereinstimmt. Handelt es sich um eine innere Ecke, so liegt sie im Innengebiet der zugehörigen geschlossenen Jordankurve und ist die einzige Ecke des Graphen mit dieser Eigenschaft.*

Definition 3.28. *Ein Graph C heißt **Konfiguration**, wenn*

1. *er regulär ist,*
2. *die Außenecken einen Ring der Größe echt größer 4 bilden,*
3. *innere Ecken existieren,*
4. *die beschränkten Gebiete von Dreiecken begrenzt werden,*
5. *jedes Dreieck Grenze eines Gebietes ist.*

Das berühmteste Beispiel für eine Konfiguration ist der **Birkhoff-Diamant**. Dennoch gibt es andere wie z.B. Sterne.

Definition 3.29. *Eine Konfiguration heißt **Stern**, wenn sie nur eine innere Ecke enthält. Wir haben speziell einen **k-Stern**, wenn ein Stern mit genau k Außenecken, also insgesamt $k + 1$ Ecken vorliegt $(k \geq 4)$.*
***Innenkanten** verbinden zwei innere Ecken.*
***Außenkanten** verbinden zwei Außenecken.*
***Beine** verbinden eine innere Ecke mit einer Außenecke.*
*Die **Ringgröße** einer Konfiguration ist die Größe des Rings ihrer Außenecken.*

Lemma 3.30. *Der Rand jedes beschränkten Gebietes einer Konfiguration enthält immer mindestens eine innere Ecke.*

Satz 3.31. *Das Innere einer Konfiguration ist ein zusammenhängender Graph.*

Definition 3.32. *Zwei Konfigurationen* $C' = (E', L')$ *und* $C'' = (E'', L'')$ *heißen* ***äquivalent****, wenn es eine bijektive Abbildung* $\phi : E' \to E''$ *gibt, die in beiden Richtungen die Nachbarrelation enthält.*

Definition 3.33. *Der Graph* G ***enthält*** *die Konfiguration* C *, wenn es in* G *eine geschlossene Kette* K *gibt, derart dass der von den Ecken von* K *und den im Innengebiet von* K *liegenden Ecken aufgespannte Teilgraph* C_K *von* G *eine zu* C *äquivalente Konfiguration ist. Die Konfiguration ist* ***richtig in*** G ***eingebettet****, wenn* K *einfach abgeschlossen ist.*

Satz 3.34. *Eine Minimaltriangulation enthält keinen 4-Stern, aber mindestens zwölf 5 Sterne.*

Satz 3.35. *Der zu einem Ring mit mindestens 4 Ecken gehörige Kreis in einer Minimaltriangulation ist Randkreis einer richtig eingebetteten Konfiguration.*

Zur Untersuchung von Konfigurationen lohnt es sich möglichst einfache Darstellungen anzusehen. Man zeichnet nur das innere der Konfiguration auf und gibt die Grade der Ecken durch die Verwendung der folgenden Symbole an:

4 Minimaltriangulation

Definition 4.1. *Ein normaler Graph, der als kleinster Verbrecher gegen die Existenz einer* 4 *-Eckenfärbung betrachtet wird, wird auch als* ***Minimaltriangulation*** *bezeichnet.*

Definition 4.2. *Eine Konfiguration* C *heißt* ***reduzibel****, sonst* ***irreduzibel****, wenn ein normaler Graph, der* C *als Konfiguration enthält, keine Minimaltriangulation sein kann.*

Definition 4.3. *Eine Menge* U *von Konfigurationen heißt* ***unvermeidbar****, wenn jeder normale Graph ein Element von* U *enthält.*

Der generelle Induktionsschritt besteht darin, eine Ecke zu entfernen, wodurch man einen kleineren Graphen erhält, welcher nach Induktionsannahme mit 4 Farben färbbar ist. Das Problem besteht dann darin, die Färbung so zu ändern, dass man diese zu einer zulässigen Färbung inklusive der weggelassenen Ecke erweitern kann. Dabei interessiert uns der Fall für Ecken vom Grad kleiner gleich 4 nicht mehr, da man diese durch Kempe-Ketten reduzieren kann. Der 2. Schritt besteht darin zu zeigen, dass jeder planare Graph eine dieser reduziblen Konfigurationen enthält, also das finden einer unvermeidbaren Menge von reduziblen Konfigurationen.

Definition 4.4. *Ein* ***gefärbter*** *Graph ist ein Paar* (G, χ) *, bestehend aus einem (ebenen) Graphen* G *und einer zulässigen 4-Eckenfärbung* χ *von* G *.*

Definition 4.5. *Es sei* (G, χ) *ein gefärbter Graph.*

1. *Eine* ***Kempe-Kette*** *ist eine Kette, deren Ecken mit nur zwei Farben gefärbt sind. Speziell sprechen wir von einer* (b, g) ***-Kette****, wenn eine Kempe-Kette vorliegt, deren Ecken (abwechselnd) mit den Farben* b *und* $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ *gefärbt sind*

2. *Ein* ***Kempe-Netz*** *ist eine Komponente eines Teilgraphen der Form* G_{bg}. *Speziell sprechen wir von einem* (b, g) ***-Netz****, wenn ein Kempe-Netz vorliegt, dessen Ecken mit den Farben* b *und* $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ *gefärbt sind.*

Lemma 4.6. *Ist* (G, χ) *ein gefärbter Graph, so ist der Teilgraph* $C = (E_C, L_C)$ *von* G *genau dann ein Kempe-Netz, wenn gilt*

1. *Die Ecken von* C *sind insgesamt nur mit zwei Farben gefärbt.*
2. *Je zwei Ecken von* C *können durch eine Kempe-Kette verbunden werden, deren Ecken sämtlich zu* C *gehören.*
3. *Bezüglich der Eigenschaften 1. und 2. ist* E_C *maximal.*
4. C *wird von* E_C *aufgespannt.*

Definition 4.7. *Es sei* (G, χ) *ein gefärbter Graph. Die Färbung* $\hat{\chi}$ *von* $G = (E, L)$ *entsteht aus* χ *durch* ***Kempe-Austausch****, wenn in einem Kempe-Netz die Farben vertauscht werden, das heißt, wenn ein* (b, g) *-Netz* $C = (E_C, L_C)$ *existiert, derart dass gilt*

$$\hat{\chi}(z) = \begin{cases} g & \textit{falls } z \in E_C \textit{ und } \chi(z) = b, \\ b, & \textit{falls } z \in E_C \textit{ und } \chi(z) = g, \\ \chi(z), & \textit{falls } z \in E \setminus E_C \end{cases}$$

Lemma 4.8. *In einer Minimaltriangulation gibt es keine* 4 *-Ecke.*

Beweis. Sei y eine 4-Ecke einer Minimaltriangulation G, seien $x_1, ..., x_4$ die Nachbarn von y in zyklischer Reihenfolge. Der Graph G' entstehe aus G durch Weglassen der Ecke y und der zu y inzidenten Kanten. Da G eine Minimaltriangulation war, gibt es für G' eine zulässige 4-Färbung χ'. Sind für die Färbung der in G' enthaltenenen Nachbarn von y nur drei Farben verbraucht, so sind wir fertig. Sind die Nachbarn von y allerdings paarweise verschieden gefärbt, so kann man durch eine Permutation errreichen, dass

$$\chi'(x_i) = i \quad \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Jetzt beginnt das Kempe-Ketten Spiel:

1. Zug: Gehören x_1 und x_3 zu verschiedenen $(1, 3)$-Netzen, so wird ein Kempe-Austausch in dem $(1, 3)$-Netz durchgeführt, welches x_1 enthält. x_1 hat jetzt die Farbe 3 und die Nachbarn von y haben nur noch drei Farben.
2. Zug: Gehören die Ecken x_1 und x_3 zum gleichen $(1, 3)$-Netz, dann kann man zeigen, dass die Ecken x_2 und x_4 zu verschiendenen $(2, 4)$-Netzen. Durch einen Kempe-Austausch erhält man die Färbung χ'' mit

   $$\chi''(x_2) = \chi''(x_4) = 4,$$

   wobei wieder die Nachbarn von y mit nur drei Farben gefärbt sind.

□

Satz 4.9. *In einer Minimaltriangulation gibt es weder*

1. *einen Ring der Größe 4 noch*

2. *einen Ring der Größe 5, dessen Innengebiet mehr als eine Ecke von G enthält.*

Satz 4.10. *In einer Minimaltriangulation gibt es nicht:*

1. *Eine Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 5 haben.*
2. *Eine Ecke mit geradem Grad, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
3. *Eine 5-5-5-Kette, deren Ecken zu ein- und derselben 6-Ecke benachbar sind.*
4. *Eine 5-Ecke, deren Nachbarn zu einer 5-5-6-6-6-Kette angeordnet werden können.*
5. *Nur Ecken mit den Graden 5 und 6.*
6. *Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
7. *Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein 7-7-7-Dreieck.*
8. *Nur Ecken mit Graden ungleich 6 ohne ein 5-5-5-Dreieck.*
9. *Nur Ecken mit Graden $5, 6$ und 8.*
10. *Nur Ecken mit Graden ungleich 6.*
11. *Einen Birkhoff-Diamanten.*

Beweis. Es wird nur der Fall für den Birkhoff-Diamanten gezeigt.
Es sei G eine Minimaltriangulation, die einen Birkhoff-Diamanten enthält.
Der Graph G' entstehe aus G durch Wegnahme der inneren Ecken des Birkhoff-Diamanten und der mit ihnen inzidenten Kanten. Der erste Zug im nun beginnenden Kempe-Ketten Spiel beinhaltet noch keinen Kempe-Austausch, sondern eine Kontraktion.
1.Zug: Man bildet aus G' einen Graphen G'' wie folgt:

1. Man erweitert um eine Kante, die Diagonale die x_2 und x_4 verbindet: Dies ist möglich, da diese nicht schon durch eine Kante verbunden sind, andernfalls würden die Ecken x_2, x_4 und y_3 ein Dreicek in G bilden, Widerspruch zur Definition der Minimaltriangulation.
2. Dann wird die neue Kante zu der in ihr liegende Ecke y_3 kontrahiert.
3. Schließlich wird die Verbindungsstrecke von x_6 und y_3 als Kante hinzugenommen. Dies ist möglich, weil es in Minimaltriangulationen keine Ringe der Größe 4 gibt, denn andernfalls müßten entweder die Ecken x_2 und x_6 oder die Ecken x_4 und x_6 in G benachbart sein.

Bei der entstandenen Figur handelt es sich um einen **Reduzenten**. Der Graph G'' hat fünf Ecken weniger als G, besitzt also eine zulässige 4-Färbung χ''. Die Ecken des Dreiecks $[x_1 y_3 x_6]$ müssen drei verschiedene Farben haben. Sei also $\chi''(x_1) = 0, \chi''(y_3) = 1$ und $\chi''(x_6) = 2$. Nun setzt man für die Ecken z von G'

$$\chi'(z) = \begin{cases} 1, & z \in \{x_2, x_4\}, \\ \chi''(z), & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhält eine zulässige 4-Eckenfärbung von G'. Für die Außenecken ergeben sich nun folgende Möglichkeiten:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	0	1	0	1	3	2
2.	0	1	2	1	3	2
3.	0	1	3	1	3	2
4.	0	1	2	1	0	2
5.	0	1	3	1	0	2
6.	0	1	0	1	0	2

2.Zug: In den ersten fünf Fallen kann χ' direkt zu einer zulässigen 4-Färbung von G fortgestzt werden, wie die folgende Tabelle zeigt:

	y_1	y_2	y_3	y_4
1.	1	3	2	0
2.	1	2	3	0
3.	1	3	2	0
4.	1	2	0	3
5.	1	2	0	3

3.Zug: Der Rand des Birkhoff-Diamanten ist durch χ' gemäß Fall 6 gefärbt. Eine direkte Fortsetzung auf G ist nun nicht möglich, weil die Ecken y_2 und y_4 die Farben 2 und 3 erhalten müssten und dadurch keine mehr für y_3 übrig wäre. Man betrachtet nun verschiedene Möglichkeiten für das $(0,3)$-Netz C, dem die Ecke x_5 angehört.

1. Gehört die Ecke x_3 auch zu C, so erhält man durch Kempe-Austausch eine Färbung $\overline{\chi}'$ mit $\overline{\chi}'(x_4) = 2$, die sich in genau einer Weise auf ganz G fortsetzen lässt, nämlich durch

$$y_j \mapsto \begin{cases} 3, & \text{für} \quad j = 3 \\ 2, & \text{für} \quad j = 2 \\ 1, & \text{für} \quad j = 4 \\ 3, & \text{für} \quad j = 1. \end{cases}$$

2. Die Ecke x_3 gehört nicht zu C, aber die Ecke x_1 liegt in C. Dann liegen x_1 und x_3 in verschiedenene $(0,3)$-Netzen und man erhält durch Kempe-Austausch eine Färbung $\overline{\chi}'$ mit

$$\overline{\chi}'(x_3) = 3,$$

also den Fall 5 des 2. Zuges.

3. Die Ecken x_1 und x_3 gehören beide nicht zu C. Dann erhält man durch Kempe-Austausch eine Färbung $\overline{\chi}'$ mit

$$\overline{\chi}'(x_5) = 3,$$

das heißt den Fall 1 des 2. Zuges und das Spiel ist beendet.

□

5 Arten der Reduzibilität

5.1 D-Reduzibilität - Der Dürre-Heesch-Algorithmus

Definition 5.1. *1. Es sei $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$. Ein r-Tupel $a = (a_1, ..., a_r) \in \{0,1,2,3\}^r$ heißt* ***Randfärbung*** *(der Größe r), wenn $a_j \neq a_{j+1}$ für alle $j \in \{1, ..., r\}$ $a_r \neq a_1$ gilt.*

2. *Zwei Randfärbungen a und a' heißen* ***äquivalent****, wenn sie gleiche Größe r haben und sich nur um eine Permutation der Farben unterscheiden, das heißt, wenn es eine Bijektion $\pi : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ gibt, derart dass $a'_j = \pi(a_j)$ für alle $j \in \{1,...,r\}$ gilt.*

3. *Die Menge aller Randfärbungen der Größe r wird mit $\Phi(r)$ bezeichnet.*

4. *Eine Randfärbung heißt* ***wesentlich****, wenn sie in ihrer Äquivalenzklasse die kleinste ist.*

Lemma 5.2. *Für eine wesentliche Randfärbung muss gelten:*

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 \in \{0,2\}$$

Bei gerader Größe r gibt nur eine Randfärbungen mit zwei Farben, und zwar $(0,1,0,...,0,1)$. Bei ungeradem r werden mindestens drei Farben benötigt.

Beispiel. Beim Birkhoff Diamanten waren die Randfärbung $(0,1,2,1,3,2)$, $(0,1,2,1,0,2)$ und $(0,1,0,1,0,2)$ wesentlich. Die Randfärbung $(0,1,0,1,3,2)$ ist äquivalent zu $(0,1,0,1,2,3)$, $(0,1,3,1,3,2)$ ist äquivalent zu $(0,1,2,1,2,3)$ und $(0,1,3,1,0,2)$ ist äquivalent zu $(0,1,2,1,0,3)$.

Lemma 5.3. *Die Gesamtzahl $f(r)$ der wesentlichen Randfärbungen ergibt sich aus*

$$f(r) = \begin{cases} \frac{3^{r-1}-1}{8} & r \quad \textit{ungerade} \\ \frac{3^{r-1}+5}{8} & r \quad \textit{gerade.} \end{cases}$$

5.2 Durchfärbarkeit

Der erste Schritt im Test auf D-Reduzibilität besteht darin, die wesentlichen Randfärbungen der Konfiguration auf *Durchfärbbarkeit* zu prüfen. Dabei ist zu beachten, dass die Menge $\Phi(r)$ der Menge aller Randfärbungen der Größe r nur von der Ringgröße r der betrachteten Konfiguration C abhängt, während die Menge der von Anfang an guten Randfärbungen $\Phi_0(C)$ durch die ganze Struktur von C bestimmt ist. Dazu wird dem Rechner die gesamte Konfiguration mitgeteilt, in der Form: Es seien w innere Ecken mit $y_1,...,y_w$, alle Ecken werden durchnummeriert, also

$$z_j = \begin{cases} x_j & \text{für} \quad 1 \le j \le r \\ y_{j-r} & \text{für} \quad r < j \le r+w \end{cases}$$

und für die arithmetisch vollständige Beschreibung

$$\beta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } z_j \text{ und } z_k \text{ in } C \text{ durch eine Kante verbunden sind} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel. Für den Birkhoff-Diamanten sieht die Verbindungsmatrix folgendermaßen aus:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
6	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
8	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
9	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
10	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0

Zur Prüfung der Durchfärbbarkeit werden **Färbungsmatrizen** aufgebaut. Dabei handelt es sich um $4 \times (r+w)$-Matrizen (v_{ij}) mit $v_{ij} \in \{0,1\}$, derart, dass in jeder Spalte eine 1 steht und für alle $i \in \{0,1,2,3\}$, $j,k \in \{1,...,r+w\}$ gilt

$$v_{ij} = v_{ik} = 1 \Rightarrow \beta_{jk} = 0.$$

Die 4 Zeilen entsprechen den Farben, die Spalten werden den Ecken der Konfiguration zugeordnet. Eine Randfärbung legt die Einträge in den ersten r Spalten fest, Durchfärbbarkeit ist gegeben, wenn sich daraus eine vollständige Färbung aufbauen lässt.

Beispiel. Für den Birkhoff Diamanten ergibt sich für die Randfärbung $(0,1,2,1,3,2)$ die folgende Färbungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt sind 16 Randfärbungen direkt durchfärbbar. Die Randfärbung $(0,1,0,1,0,1)$ ist nicht direkt durchfärbbar, wie die folgende Matrix zeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Konfiguration C sei in die Minimaltriangulation G eingebettet. Bei der D-Reduzibilität kommt es nicht auf die richtige Einbettung an. Entfernt man aus G die inneren Ecken von C und die mit ihnen inzidierenden Kanten, so erhält man G', der 4-färbbar ist. Jede Färbung von G' induziert eine Färbung von C. Es wird nur noch der gefärbte zusammenhängende Graphen G', desen Gebiete alle bis auf eines von Dreiecken begrenzt wird, betrachtet (das Innere von C interessiert hier nicht mehr). Die Ecken und Kanten des **Ausnahmegebietes** bilden die den Randkreis von G'. Sind $x_1, ..., x_r$ die Ecken des Randkreises in zyklischer Reihenfolge, so sind auch hier die Randfärbungen der Größe r mit den 4-Eckenfärbungen des Randkreises identifizierbar. Jede Kante gehört zum Rand von genau zwei Gebieten, insbesondere gehört jede Kante, die nicht zum Randkreis gehört, zum Rand von genau zwei Dreiecken.

Definition 5.4. *Unter der **Farbpaarwahl** versteht man die Wahl einer Farbe $w \in \{1,2,3\}$, die zu einer Zerlegung der Farbenmenge in die beiden Farbpaare $\{0,w\}$ und $\{1,2,3\} \setminus \{w\}$ und damit zu Kempe-Netzen in G' und im Randkreis von G' führt. Die Kempe-Netze im Randkreis werden **Kempe-Sektoren** genannt.*

Die Eckenmenge eines Kempe-Sektors lässt sich immer zu einer Kette anordnen, die Anzahl ist entweder 1 oder gerade. Dabei werden w**-Sektoren**, deren Ecken mit 0 oder w gefärbt sind und $\hat{w}$**-Sektoren**, mit Ecken der beiden übrigen Farben, unterschieden. Verschiedene Kempe-Sektoren gleichen Typs können zum gleichen Kempe-Netz von G' gehören.

Definition 5.5. *Eine Menge von Ecken des Randkreises nennt man **Block**, wenn sie zum gleichen Kempe-Netz von G' gehören und die übrigen Ecken dieses Kempe-Netzes nicht im Randkreis liegen.*

Die Ecken des Randkreises lassen sich somit in Blöcke zerlegen. Jeder Block ist Vereinigung von Eckenmengen einiger Kempe-Sektoren gleichen Typs. Es gibt also w**-Blöcke** und $\hat{w}$**-Blöcke**. Für Kempe-Ketten-Spiel sind die entsprechenden Aufteilungen in Blöcke wichtig, daher benötigt man eine Übersicht über alle möglichen Blockzerlegungen einer Randfärbung. Jede Blockzerlegung bietet die Möglichkeit für einen oder mehrere Kempe-Austausche, dann kann man hoffen, dass sich dadurch eine bessere Randfärbung ergibt. Man kann weiterhin zeigen, das die möglichen Blockzerlegungen allein durch die Randfärbung und die Farbpaarwahl bestimmt sind, unabhängig von Konfigurationen und Graphen, in welche die Konfigurationen eingebettet sind.

Satz 5.6. *Gegeben sei eine Randfärbung $a = (a_1, ..., a_r)$ der Größe r und eine Farbpaarwahl $w \in \{1,2,3\}$. Eine Zerlegung der Indexmenge $\{1, ..., n\}$ in Blöcke $B_1, ..., B_s$ ist genau dann eine Blockzerlegung (bezüglich a und w), wenn gilt:*

1. *Jeder Block ist Vereinigung von Kempe-Sektoren gleichen Typs.*
2. *Blöcke trennen sich nicht gegenseitig, das heißt, für $k_1, k_2 \in B_k, l_1, l_2 \in B_l, k \neq l$, ist die Anordnung*
$$k_1 < l_1 < k_2 < l_2$$
unmöglich.
3. *Stoßen zwei Blöcke an einer Stelle zusammen, so auch noch an genau einer zweiten.*

5.3 Kempe-Ketten-Spiele

D-Reduzibilität liegt vor, wenn man jede Randfärbung durch mehrfachen Kempe-Austausch in eine von Anfang an gute Färbung überführen kann.

Beispiel. Im Falle des Birkhoff-Diamanten ist die Randfärbung $(0,1,0,1,0,1)$ nicht direkt durchfärbbar. Die Farbpaarwahl $w = 1$ bringt nichts. Man erhält nur einen Kempe-Sektor, der einzig mögliche Kempe-Austausch liefert die nicht wesentliche Randfärbung $(1,0,1,0,1,0)$, die zugehörige wesentliche Randfärbung ist die Ausgangsfärbung.
Für $w = 2$ enthalten die Kempe-Sektoren jeweils nur einen Index, es gibt 6 Kempe-Sektoren, also Block-Zerlegungen aus jeweils 4 Blöcken. Es gibt 5 mögliche Blockzerlegungen:

Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4
1.	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{5\}$	$\{2,4,6\}$
2.	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{1,3,5\}$
3.	$\{1\}$	$\{4\}$	$\{2,6\}$	$\{3,5\}$
4.	$\{2\}$	$\{5\}$	$\{1,3\}$	$\{4,6\}$
5.	$\{3\}$	$\{6\}$	$\{1,5\}$	$\{2,4\}$

Jede dieser Blockzerlegungen kann von außen aufgezwungen sein. Daher ist es notwendig zu prüfen, ob in jedem Fall ein Kempe-Austausch möglich ist.

1. Die erste Möglichkeit für einen Kempe-Austausch besteht darin, in B_1 die Farbe 0 durch die Farbe 2 zu ersetzen. Dies ergibt die wesentliche Randfärbung $(0,1,2,1,2,1)$, diese ist von Anfang an gut.

2. Ersetzt man in B_1 die Farbe 1 durch die Farbe 3 erhält man $(0,3,0,1,0,1)$, das heißt $(0,1,0,2,0,2)$, welche von Anfang an gut ist.

3. analog zu 1.

4. analog zu 2.

5. Ersetzt man in B_1 die Farbe 0 durch 2, so ergibt sich die wesentliche Randfärbung $(0,1,2,1,0,1)$, welche leider nicht direkt durchfärbbar ist. Ersetzt man in B_2 die Farbe 1 durch die Farbe 3 führt dies auf $(0,1,0,1,0,3)$ mit der zugehörigen wesentlichen Randfärbung $(0,1,0,1,0,2)$, wieder nicht direkt durchfärbbar. Färbt man allerdings B_1 und B_2 gleichzeitig liefert dies die wesentliche Randfärbung $(0,1,2,1,0,3)$, welche von Anfang an gut ist.

Definition 5.7. *Eine Randfärbung der Konfiguration C ist* ***gut von der Stufe*** 1, *wenn sie nicht von Anfang an gut ist, aber nach einer Farbpaarwahl jede Blockzerlegung einen Kempe-Austausch erlaubt, der sie in eine von Anfang an gute Randfärbung überführt.*

Beispiel. Beim Birkhoff-Diamanten sind die Randfärbungen $(0,1,0,1,0,2)$, $(0,1,0,2,3,1)$, $(0,1,2,1,0,1)$ und $(0,1,2,3,2,3)$ gut von der Stufe 1.

Definition 5.8. *Es seien a eine Randfärbung der Größe r, w eine Farbwahl und $B_1, ..., B_s$ eine zugehörige Blockzerlegung. Die Randfärbung a wird durch Kempe-Austausch oder Umfärbung in die Randfärbung b* ***transformiert****, wenn b aus a dadurch entsteht, dass in gewissen w-Blöcken die Farben 0 und w und/oder $\hat{w}$-Blöcken die beiden anderen Farben ineinander vertauscht werden.*

Ein Kempe-Austausch (Zug im Kempe-Ketten-Spiel) ist dadurch eindeutig festgelegt. Die Anzahl der möglichen Züge ist durch die Anzahl der möglichen Blockwauswahlen beschränkt.

Definition 5.9. *Es sei Φ eine Menge von Randfärbungen der Größe r. Eine Randfärbung $a \in \Phi(r)$ heißt Φ* ***-gut****, wenn sie nicht zu Φ gehört, es aber eine Farbwahl gibt, derart dass zu jeder zugehörigen Blockzerlegung ein Kempe-Austausch existiert, der a in ein Element von Φ transformiert.*

Lemma 5.10. *Es sei Φ eine bezüglich Äquivalenz abgeschlossene Menge von Randfärbungen fester Größe. Jede zu einer Φ-guten Randfärbung äquivalente Randfärbung ist Φ-gut.*

Der Dürre-Heesch-Algorithmus liefert also bei explizit gegebener, bezüglich Äquivalenz abgeschlossener Menge Φ von Randfärbungen fester Größe ein Verfahren zur Feststellung der Φ-Güte. Ist C eine Konfiguration der Ringgröße r, so stimmen die Randfärbungen der Güteklasse 1 von C mit den $\Phi_0(C)$-guten Randfärbungen überein. Der Rest des Dürre-Heesch-Algorithmus besteht in einer wiederholten ϕ-Güte-Bestimmung. Dadurch erhält man höhere Güteklassen, die induktiv sind.

Definition 5.11. *Es sei C eine Konfiguration und für $n \in \mathbb{N}$ sei die Menge $\Phi_n(C)$ von Randfärbungen der Güteklassen kleiner gleich n bereits bestimmt. Eine Randfärbung heißt* ***gut von der Stufe*** *$n+1$, wenn sie $\Phi_n(C)$-gut ist.*

Somit ergibt sich eine aufsteigende Kette von Randfärbungen $\Phi_n(C)$. Da die Menge $\Phi(r)$ endlich ist, muss diese Kette irgendwann einmal stationär werden, das heißt, es muss einen Index n_0 geben, derart dass keine Randfärbungen von der Güteklasse $n_0 + 1$ existieren, man schreibt $\overline{\Phi}(C)$ anstatt $\Phi_{n_0}(C)$.

Definition 5.12.

1. *Gilt $\overline{\Phi}(C) = \Phi(r)$, das heißt, jede Randfärbung ist gut von irgendeiner Stufe, so ist die Konfiguration C* ***D-reduzibel.***

2. *Φ_{n_0} ist eine echte Teilmenge von $\Phi(r)$ und damit ist die Konfiguration C* ***D-reduzibel.***

5.4 A-, B- und C-Reduzibilität

Definition 5.13. *Es sei C eine Konfiguration mit den Außenecken $x_1, ..., x_r$ in zyklischer Anordnung. Ein Paar (S, σ), bestehend aus einem Graphen S und einer surjektiven Abbildung σ von der Menge der Außenecken von C auf die Menge der Außenecken von S ist ein* ***Reduzent*** *für C, wenn S weniger Ecken hat als C und folgendes gilt:*

1. *σ erhält die Nachbarschaftsrelation, das heißt, für alle $j \in \{1, ..., r\}$ sind $\sigma(x_j)$ und $\sigma(x_{j+1})$ benachbart, insbesondere verschieden,*

2. *Urbilder verschiedener Außenecken von S bezüglich σ trennen sich nicht gegenseitig, das heißt, für $j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{1, ..., r\}$ mit*
$$\sigma(x_{j_1}) = \sigma(x_{j_2}) \neq \sigma(x_{k_1}) = \sigma(x_{k_2})$$
ist die Anordnung
$$j_1 < k_1 < j_2 < k_2$$
unmöglich.

Ein Graph der Bestandteil eines Reduzenten ist, ist auf jedem Fall zusammenhängend. Betrachtet man eine Minimaltriangulation G, die eine Konfiguration C enthält, zu welcher ein Reduzent (S, σ) gegeben ist, dann kann man einen Graphen G_σ konstruieren der weniger Ecken als G hat. Zunächst werden aus G die inneren Ecken von C entfernt. Der neu entstandene Graph G' hat ein Ausnahmegebiet L, welches beschränkt ist und von einem regulären r-Eck begrenzt wird. Im nächsten Schritt werden je zwei Ecken, die unter σ gleich abgebildet werden, durch Diagonalen verbunden. Da sich Urbilder einzelner Ecken nicht trennen, kreuzen sich die Diagonalen nicht. Durch Hinzunahme dieser Diagonalen als Kanten entsteht G'', dabei wird angenommen, dass C σ**-richtig** in G eingebettet ist, also 2

Außenecken von C, die von σ gleich abgebildet werden, sind in G nicht benachbart. Diese neuen Kanten werden zu einem ihrer Punkte kontrahiert und es entsteht G'''. Der mittlerweile deformierte Rand des Ausnahmegebietes von G' wird homöomorph auf den Rand des unbeschränkten Gebietes von S abgebildet. Die Umkehrabbildung läßt sich so zu einer Einbettung auf ganz S fortsetzen, dass gilt:

1. die Bilder der inneren Ecken von S liegen in Gebieten von G''',
2. sind die Bilder der Endpunkte einer Kante B von S in G'' durch eine Kante B' verbunden, so wird B auf B' abgebildet
3. die Bilder der übrigen Kanten von S liegen - möglicherweise mit Ausnahme eines oder beider Endpunkte - ganz in Gebieten von G'''.

Dadurch wird garantiert, dass die Bilder der Ecken und Kanten von S, soweit sie nicht schon zu G''' gehören, zu G''' hinzugenommen werden können, ohne die Grapheneigenschaft zu stören. Man erhält einen Graphen G_σ, in dem S eingebettet ist und zwar so, dass er die Konfiguration C in der ursprünglichen Minimaltriangulation G ersetzt. Die Abbildung σ wird zu einer Abbildung σ' von der Eckenmenge von G' in die Eckenmenge von G_σ fortgesetzt, so dass jede Ecke von G', die nicht Außenecke von C ist auf die entsprechende Ecke in G_σ abgebildet wird. Weil G_σ weniger Ecken als G hat, ist $\chi \circ \sigma'$ eine zulässige 4-Eckenfärbung von G'. Die Reduzibilität von C wäre gewährleistet, wenn C in einer Minimaltriangulation eingebettet werden könnte. Man betrachtet $\chi \circ \sigma$, welche durch die Werte von χ auf den Außenecken von S bestimmt wird. Sei $\Psi(S)$ die Menge der zulässigen 4-Eckenfärbungen von S.

Definition 5.14. *Eine Randfärbung von C ist σ-**verträglich**, wenn sie von der Form $\chi \circ \sigma$ mit $\chi \in \Psi(S)$ ist. Die Menge der σ-verträglichen Randfärbungen von C wird mit $\Phi(r, \sigma)$ bezeichnet.*

Beispiel. Beim Reduzenten für den Birkhoff-Diamanten sind nur 6 von 31 Randfärbungen der Größe 6 σ-verträglich.

Definition 5.15. *Eine Konfiguration C heißt **A-reduzibel**, wenn sie einen Reduzenten (S, σ) besitzt, der folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *C kann in eine Minimaltriangulation nur σ-richtig eingebettet werden*
2. *jede σ-verträgliche Randfärbung ist direkt durchfärbbar, das heißt, es gilt*

$$\Phi(r, \sigma) \subset \Phi_0(C).$$

Satz 5.16. *Eine Konfiguration, deren Inneres aus einer n-Ecke und $n-1$ zu ihr benachbarten 5-Ecken besteht ist A-reduzibel.*

Beispiel. Der 4-Stern ist A-reduzibel, siehe Satz 3.10.

Definition 5.17. *Es seien C eine Konfiguration und (S, σ) ein Reduzent für C, derart dass C in eine Minimaltriangulation nur σ-richtig eingebettet werden kann. Die Konfiguration C ist*

- ***B-reduzibel***, *wenn jede σ -verträgliche Randfärbung entweder von Anfang an gut oder gut von der Stufe 1 ist, das heißt, wenn gilt:*

$$\Phi(r,\sigma) \subset \Phi_1(C),$$

- ***C-reduzibel***, *wenn jede σ -verträgliche Randfärbung gut von irgendeiner Stufe ist, das heißt, wenn gilt:*

$$\Phi(r,\sigma) \subset \hat{\Phi}(C).$$

Beispiel. Der Birkhoff-Diamant ist B-reduzibel.

Satz 5.18. *Die Konfiguration C, deren Inneres aus einer 8-Ecke und fünf aufeinanderfolgenden ihrer Nachbarn mit dem Grad 5 besteht, ist C-reduzibel und D-reduzibel.*

Offenbar ist die A-Reduzibilität eine Spezialisierung der B-Reduzibilität und die B-Reduzibilität eine Spezialisierung der C-Reduzibilität. Die D-Reduzibilität lässt sich ebenfalls als eine Spezialisierung der C-Reduzibilität auffassen: Sei C eine Konfiguration, sei S der Randkreis von C und σ die Identität. Da σ keine Außenecken von C identifiziert, tritt C in einer Minimaltriangulation immer σ-richtig eingebettet auf, also

$$\Phi(r,\sigma) = \Phi(r).$$

5.5 Heesche Hindernisse und Faustregel

Eine Konfiguration, deren innere Ecken sämtlich mindestens den Grad 3 aufweisen hat bisher allen Reduzibilitätsversuchen getrotzt, wenn eine der folgenden Strukturen darin wesentlich auftritt (**Heesche-Hindernisse**):

1. eine innere Ecke mit mehr als drei Beinen
2. eine Artikulation mit mehr als zwei Beinen
3. ein **hängendes** 5-Paar, das heißt, zwei benachbarte innere 5-Ecken, die noch genau zu einer weiteren inneren Ecke benachbart sind und zwar zu derselben; die zu einem hängenden 5-Paar gehörenden Ecken haben jeweils genau drei Beine.

Definition 5.19. *Ein Hindernis tritt in einer Konfiguration* ***wesentlich*** *auf, wenn sie nicht aus einer reduziblen Konfiguration durch Erweiterung um ein Hindernis und eventuell weitere Hindernisse gewonnen werden kann.*

Faustregel 5.20. *Eine Konfiguration der Ringgröße n mit m inneren Ecken, aber ohne Hindernisse, ist mit großer Wahrscheinlichkeit reduzibel, wenn gilt*

$$m > \frac{3n}{2} - 6$$

Beispiel. Beim 4-Stern ist $m = 1, n = 4$ und $\frac{3n}{2} - 6 = 0 < m$.
Beim k-Stern, $k \geq 5$ ist $m = 1, n = k$ und $\frac{3n}{2} - 6 \geq \frac{3}{2} > m$.
Beim Birkhoff-Diamanten ist $m = 4, n = 6$ und $\frac{3n}{2} - 6 = 3 < m$.

Ein weiteres Hindernis ist die Ringgröße. Dabei geht es um die Rechenzeit, so vervierfacht sich die Rechenzeit und der Speicherbedarf bei einer Erhöhung der Ringgröße um 1. Daher sollte man unvermeidbare Mengen von von Konfigurationen mit beschränkter Ringgröße suchen. Andererseits erhöht eine Zunahme der Ringgröße die Wahrscheinlichkeit der Reduzibilität. Geht man nämlich zu einer Konfiguration über, deren Inneres gerade die gegebene Konfiguration ist, so wächst nach obiger Ungleichung die Ringgröße linear, die Zahl der inneren Ecken aber quadratisch. Daher ist immer ein Tradeoff zwischen Rechenzeit und Heescher Faustregel durchzuführen. Tatsächlich enthält die unvermeidbare Menge von Appel und Haken aus 1936 reduziblen Konfigurationen nur Elemente einer Ringgröße kleiner gleich 14.

6 Unvermeidbare Mengen - Entladungsprozeduren

Wegen (3.14) und den noch zu betrachtenden Fällen, also normale Graphen ohne Ecken mit einem Grad kleiner als 5 folgt:

$$v_5 - v_7 - 2v_8 - ... - (s-6)v_s = 12,$$

wobei s das Maximum der vorkommenden Grade von Ecken bezeichnet. Zu Beginn wird jeder Ecke die Ladung $60 \cdot (6-$ Grad der Ecke) zugeordnet. Die Gesamtladung des Systems entspricht nach obigem Ausdruck $+720$, wobei jedoch nur die 5-Ecken positiv geladen sind. Nun werden Ladungen verschoben, so dass die 5-Ecken positive Ladungen abgeben. Dabei wird die Gesamtladung nicht verändert, weshalb auch nach Entladung positiv geladene Ecken vorhanden sein müssen, voraus auf die Existenz unvermeidbarer Mengen geschlossen werden kann. Dabei können verschiedene Algorithmen zur Entladung benutzt werden. Wir benutzen nachfolgend zuerst den Algorithmus, dass jede 5-Ecke eine Ladung der Stärke 12 an jeden seiner Nachbarn vom Grad ≥ 7 abgibt. Als zweites benutzen wir einen Algorithmus, bei dem jede 5-Ecke eine Ladung der Stärke 20 an jeden seiner Nachbarn vom Grad ≥ 7 abgibt.

Satz 6.1. *Die Menge U_1, bestehend aus einer 5-5-Kette und einer 5-6-Kette, bildet eine unvermeidbare Menge.*

Beweis. Wenn G keine Konfigurationen in U_1 hat, dann haben alle Nachbarn von Ecken mit Grad 5 einen Grad ≥ 7. Die Ecken mit Grad 5 geben ihre Ladung vollkommen ab. Wenn v eine Ecke mit Grad $k \geq 7$, dann können nicht zwei aufeinanderfolgende Nachbarn von v Grad 5 haben, also hat v höchstens $\frac{1}{2}k$ Nachbarn mit Grad 5, erhält also maximal die Ladung $6k$. Weil es aber mit einer Ladung von $(6-k) \cdot 60$ gestartet ist, folgt $(6-k) \cdot 60 + 6k \leq (6-7) \cdot 60 + 6 \cdot 7 < 0$. Also ist die Ladung von G negativ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 6.2. *Die Menge U_2, bestehend aus einer 5-5-Kette und einer 6-6-5-Kette (wobei die beiden 6-Ecken mit der 5-Ecke verbunden sein müssen), bildet eine unvermeidbare Menge.*

Beweis. Angenommen G ist eine triangulierter Graph mit kleinsten Grad 5 und G enthält keine der Konfigurationen aus U_2. Es folgt, dass keine Ecke vom Grad 5 einen Nachbarn vom Grad 5 oder zwei benachbarte Ecken vom Grad 6. Deshalb hat jede Ecke vom Grad 5 mindestens 3 benachbarte Ecken vom Grad 7. Die Ecken vom Grad 5 werden also vollständig entladen. Die Ecken vom Grad 7 haben höchstens drei Nachbarn vom Grad 5, enden also mit einer Ladung von $(6-7) \cdot 60 + 3 \cdot 20 = 0$. Gleichzeitig haben aber alle Ecken mit Grad $k \geq 8$ eine maximale Ladung von $(6-k) \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot k = 360 - 50k \leq 360 - 50 \cdot 8 < 0$. □

Satz 6.3. *Eine Minimaltriangulation enthält mindestens eine* 6*-Ecke oder* 7*-Ecke.*

Um eine genauere Abschätzung der Größenordnung möglicher unvermeidbarer Mengen reduzibler Konfigurationen zu erhalten sucht man zunächst unvermeidbare Mengen, bestehend aus Konfigurationen, die geographisch gut sind.

Definition 6.4. *Eine Konfiguration heißt* ***geographisch gut****, wenn keine Ecke drei Beine besitzt, deren zweite Ecken sich nicht zu einer Kette anordnen lassen.*

Dies sind unter denjenigen Konfigurationen, deren Ecken alle einen Grad ≥ 5 haben, genau diejenigen, die die ersten beiden Heeschen Hindernisse vermeiden.

Ein große Hürde stellten 6-6-Kanten dar. Diese wurden mit sogenannten transversalen Entladungen geknackt, bei der Ladungen quer entlang mehrerer Kante fließen. Da diese jedoch situationsabhängig sind, werden diese nicht weiter dargestellt, wenngleich sie aber essentiell für den Beweis sind.

Literatur

[1] Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour and Robin Thomas, *"A NEW PROOF OF THE FOUR COLOUR THEOREM"*, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, August 1996

[2] Robert A. Wilson, *"GRAPHS, COLOURINGS AND THE FOUR-COLOUR THEOREM"*, OXFORD University Press, Oxford, 2002

[3] Reinhard Diestel, *"Graphentheorie"*, Springer Verlag, Berlin, 2006

[4] Rudolf und Gerda Fritsch, *"Der Vierfarbensatz"*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994

[5] http://de.wikipedia.org/wiki/Vier-Farben-Satz