

# Der Vierfarbensatz

Carsten Erdmann

06.04.2009

Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# Francis Guthrie



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# Augustus de Morgan



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# William Rowan Hamilton



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

Kleinste Verbrecher

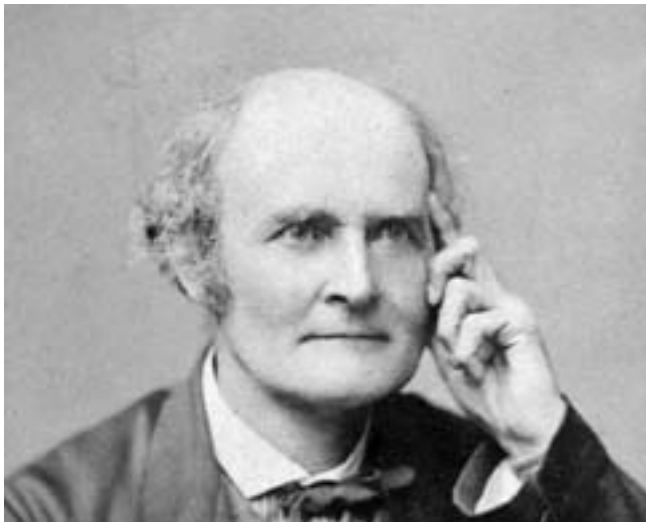
Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# Arthur Cayley



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# Alfred Kempe



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# Heinrich Heesch



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

# Wolfgang Haken



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz



Historisches

Kleinste Verbrecher

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

Paul Seymour



Carsten Erdmann

Der Vierfarbensatz

Historisches

**Kleinste Verbrecher**

Graphentheoretische Grundlagen

Minimaltriangulation

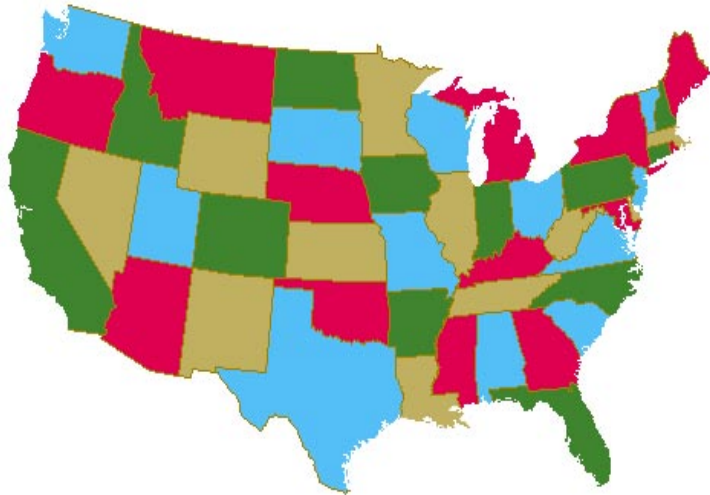
Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

Generelles Vorgehen

Grundsätzlich

Reguläre Landkarten



Die generelle Strategie zur Lösung des Vierfarbensatzes erfolgt mit Hilfe der klassischen Induktion. Dabei liegt dem der Gedanke zugrunde, dass wenn es Landkarten gibt, welche sich nicht mit 4 Farben färben lassen, so muss es darunter auch eine mit kleinster Länderzahl  $f$  geben. Dann prüfen wir alle Eigenschaften dieses Gegenbeispiels, mit der Hoffnung einen Widerspruch zu erhalten. Das kleinste Gegenbeispiel wird auch als **kleinster Verbrecher** bezeichnet. Daher werden wir im Folgenden versuchen die Anzahl möglicher Landkarten einzuschränken und denjenigen die übrigbleiben bestimmte Eigenschaften zuzuordnen.

## Satz

*Eine Kante einer Landkarte gehört zu mindestens einer und höchstens zwei Landesgrenzen.*

## Satz

*Bei Landkarten mit mindestens zwei Ländern enthält jede Landesgrenze mindestens einen Kreis.*

## Satz

*Eine Kante einer Landkarte gehört zu mindestens einer und höchstens zwei Landesgrenzen.*

## Satz

*Bei Landkarten mit mindestens zwei Ländern enthält jede Landesgrenze mindestens einen Kreis.*

## Satz

*Eine nicht zusammenhängende Landkarte besitzt ein Land mit nicht zusammenhängender Grenze.*

## Satz

*Eine Kante einer Landkarte gehört zu mindestens einer und höchstens zwei Landesgrenzen.*

## Satz

*Bei Landkarten mit mindestens zwei Ländern enthält jede Landesgrenze mindestens einen Kreis.*

## Satz

*Eine nicht zusammenhängende Landkarte besitzt ein Land mit nicht zusammenhängender Grenze.*

## Definition

Es sei  $L$  eine Landkarte und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  **$n$ -Färbung** von  $L$  ist eine Abbildung  $\phi : M_L \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine  $n$ -Färbung ist **zulässig**, wenn benachbarte Länder immer verschiedene Werte (Farben) haben.

## Lemma

Ist  $\phi : M_L \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine zulässige  $n$ -Färbung einer Landkarte  $L$  und  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine Permutation, so ist auch die Zusammensetzung  $\pi \cdot \phi$  eine zulässige  $n$ -Färbung.

## Definition

Es sei  $L$  eine Landkarte und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  **$n$ -Färbung** von  $L$  ist eine Abbildung  $\phi : M_L \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine  $n$ -Färbung ist **zulässig**, wenn benachbarte Länder immer verschiedene Werte (Farben) haben.

## Lemma

Ist  $\phi : M_L \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine zulässige  $n$ -Färbung einer Landkarte  $L$  und  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine Permutation, so ist auch die Zusammensetzung  $\pi \cdot \phi$  eine zulässige  $n$ -Färbung.



## Lemma

*Wenn es einen kleinsten Verbrecher mit  $f$  Ländern gibt, so gibt es einen kleinsten Verbrecher mit  $f$  Ländern ohne Brücken und Endkanten.*

## Lemma

*Ein kleinster Verbrecher ohne Brücken und Endkanten ist eine zusammenhängende Landkarte.*

### Lemma

*Wenn es einen kleinsten Verbrecher mit  $f$  Ländern gibt, so gibt es einen kleinsten Verbrecher mit  $f$  Ländern ohne Brücken und Endkanten.*

### Lemma

*Ein kleinster Verbrecher ohne Brücken und Endkanten ist eine zusammenhängende Landkarte.*

## Satz

*Wenn es einen kleinsten Verbrecher  $L$  mit  $f$  Ländern gibt, so gibt es einen kleinsten Verbrecher mit  $f$  Ländern derart, dass jede Ecke mindestens den Grad 3 hat.*

## Lemma

*Bei einem kleinsten Verbrecher ohne Brücken, derart dass der Grad jeder Ecke größer gleich 3 ist, haben zwei verschiedene Länder höchstens eine gemeinsame Grenzlinie.*

## Satz

*Wenn es einen kleinsten Verbrecher  $L$  mit  $f$  Ländern gibt, so gibt es einen kleinsten Verbrecher mit  $f$  Ländern derart, dass jede Ecke mindestens den Grad 3 hat.*

## Lemma

*Bei einem kleinsten Verbrecher ohne Brücken, derart dass der Grad jeder Ecke größer gleich 3 ist, haben zwei verschiedene Länder höchstens eine gemeinsame Grenzlinie.*

## Definition

Eine Landkarte ist **regulär**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- 1 sie ist nicht leer,
- 2 sie ist zusammenhängend,
- 3 sie enthält keine Brücken und Endkanten,
- 4 je zwei verschiedene Länder haben höchstens eine gemeinsame Grenzlinie.

## Satz

*Wenn es überhaupt kleinste Verbrecher gibt, so gibt es unter ihnen reguläre Landkarten.*

## Lemma

*Jede Ecke einer regulären Landkarte hat mindestens den Grad 3.*

## Satz

*Wenn es überhaupt kleinste Verbrecher gibt, so gibt es unter ihnen reguläre Landkarten.*

## Lemma

*Jede Ecke einer regulären Landkarte hat mindestens den Grad 3.*

## Satz

*Bei einem regulären kleinsten Verbrecher ist jede Landesgrenze ein Kreis.*

## Lemma

*Bei einem kleinsten Verbrecher ist der Grad einer Ecke gleich der Zahl der Länder, die diese Ecke zum Grenzpunkt haben.*



## Satz

*Bei einem regulären kleinsten Verbrecher ist jede Landesgrenze ein Kreis.*

## Lemma

*Bei einem kleinsten Verbrecher ist der Grad einer Ecke gleich der Zahl der Länder, die diese Ecke zum Grenzpunkt haben.*

# Gesättigte Graphen

## Definition

Ein Graph heißt **gesättigt**, wenn Kanten ohne Vergrößerung der Eckenmenge nicht mehr hinzugenommen werden können.

## Lemma

Sei  $v_L$  die Anzahl der Ecken,  $k_L$  die Zahl der Kanten,  $f_L$  die Zahl der Länder und  $z_L$  die Zahl der Komponenten. Entsteht die Landkarte  $L'$  aus der Landkarte  $L$  durch Erweiterung um eine Kante  $B$ , so berechnen sich die Anzahlen der Ecken, Kanten, Länder und Komponenten von  $L'$  aus den entsprechenden Anzahlen aus  $L$  wie folgt:

| Typ von $B$                | $v_{L'}$  | $k_{L'}$  | $f_{L'}$  | $z_{L'}$  |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Endkante mit zwei Endecken | $v_L + 2$ | $k_L + 1$ | $f_L$     | $z_L + 1$ |
| Enkante mit einer Endecke  | $v_L + 1$ | $k_L + 1$ | $f_L$     | $z_L$     |
| Brücke                     | $v_L$     | $k_L + 1$ | $f_L$     | $z_L - 1$ |
| Kreiskante                 | $v_L$     | $k_L + 1$ | $f_L + 1$ | $z_L$     |

## Lemma

Sei  $v_L$  die Anzahl der Ecken,  $k_L$  die Zahl der Kanten,  $f_L$  die Zahl der Länder und  $z_L$  die Zahl der Komponenten. Entsteht die Landkarte  $L'$  aus der Landkarte  $L$  durch Erweiterung um eine Kante  $B$ , so berechnen sich die Anzahlen der Ecken, Kanten, Länder und Komponenten von  $L'$  aus den entsprechenden Anzahlen aus  $L$  wie folgt:

| Typ von $B$                | $v_{L'}$  | $k_{L'}$  | $f_{L'}$  | $z_{L'}$  |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Endkante mit zwei Endecken | $v_L + 2$ | $k_L + 1$ | $f_L$     | $z_L + 1$ |
| Enkante mit einer Endecke  | $v_L + 1$ | $k_L + 1$ | $f_L$     | $z_L$     |
| Brücke                     | $v_L$     | $k_L + 1$ | $f_L$     | $z_L - 1$ |
| Kreiskante                 | $v_L$     | $k_L + 1$ | $f_L + 1$ | $z_L$     |

## Lemma

*Entsteht die Landkarte  $L'$  aus der Landkarte  $L$  durch Erweiterung um eine Kante, so gilt*

$$v_{L'} - k_{L'} + f_{L'} - z_{L'} = v_L - k_L + f_L - z_L.$$

## Satz

*Für jede Landkarte  $L$  gilt*

$$e_L - k_L + f_L - z_L = 1.$$

## Lemma

*Entsteht die Landkarte  $L'$  aus der Landkarte  $L$  durch Erweiterung um eine Kante, so gilt*

$$v_{L'} - k_{L'} + f_{L'} - z_{L'} = v_L - k_L + f_L - z_L.$$

## Satz

*Für jede Landkarte  $L$  gilt*

$$e_L - k_L + f_L - z_L = 1.$$

# Eulersche Polyederformel

## Lemma (Eulersche Polyederformel)

*Ist  $L$  eine nichtleere zusammenhängende Landkarte, so gilt*

$$e_L - k_L + f_L = 2.$$

# Dualität

## Definition

Die Landkarte  $L^*$  heißt **dual** zu der Landkarte  $L$ , wenn gilt:

- 1 keine Ecke von  $L^*$  ist ein neutraler Punkt von  $L$ ,
- 2 jedes Land von  $L$  enthält genau eine Ecke von  $L^*$ ,



# Dualität

## Definition

Die Landkarte  $L^*$  heißt **dual** zu der Landkarte  $L$ , wenn gilt:

- 1 keine Ecke von  $L^*$  ist ein neutraler Punkt von  $L$ ,
- 2 jedes Land von  $L$  enthält genau eine Ecke von  $L^*$ ,
- 3 zwei Ecken von  $L^*$  sind genau dann durch eine Kante in  $L^*$  verbunden, wenn sie in benachbarten Ländern liegen,

# Dualität

## Definition

Die Landkarte  $L^*$  heißt **dual** zu der Landkarte  $L$ , wenn gilt:

- 1 keine Ecke von  $L^*$  ist ein neutraler Punkt von  $L$ ,
- 2 jedes Land von  $L$  enthält genau eine Ecke von  $L^*$ ,
- 3 zwei Ecken von  $L^*$  sind genau dann durch eine Kante in  $L^*$  verbunden, wenn sie in benachbarten Ländern liegen,
- 4 eine Kante von  $L^*$  enthält nur Punkte der beiden Länder von  $L$ , denen ihre Ecken angehören und genau einen inneren Punkt einer gemeinsamen Grenzlinie dieser Länder.

# Dualität

## Definition

Die Landkarte  $L^*$  heißt **dual** zu der Landkarte  $L$ , wenn gilt:

- 1 keine Ecke von  $L^*$  ist ein neutraler Punkt von  $L$ ,
- 2 jedes Land von  $L$  enthält genau eine Ecke von  $L^*$ ,
- 3 zwei Ecken von  $L^*$  sind genau dann durch eine Kante in  $L^*$  verbunden, wenn sie in benachbarten Ländern liegen,
- 4 eine Kante von  $L^*$  enthält nur Punkte der beiden Länder von  $L$ , denen ihre Ecken angehören und genau einen inneren Punkt einer gemeinsamen Grenzlinie dieser Länder.

## Lemma

*Ist die Landkarte  $L^*$  dual zu der Landkarte  $L$ , dann gilt*

- *$L^*$  ist eine zusammenhängende Karte.*
- *Ist  $L$  nichtleer, so enthält jedes Land von  $L^*$  mindestens eine Ecke von  $L$ .*

## Lemma

*Ist die Landkarte  $L^*$  dual zu der Landkarte  $L$ , dann gilt*

- *$L^*$  ist eine zusammenhängende Karte.*
- *Ist  $L$  nichtleer, so enthält jedes Land von  $L^*$  mindestens eine Ecke von  $L$ .*

## Lemma

- *Hat  $L$  mindestens 2 Länder, dann gilt*

$$v_{L^*} = f_L$$

$$k_{L^*} \leq k_L$$

$$f_{L^*} \leq v_L.$$

*Ist  $L$  regulär, so gelten in den letzten beiden ausdrücken '='.*

- *Sei  $L$  regulär, dann gilt*
  - 1 *Die Landkarte  $L$  ist eine zu  $L^*$  duale Landkarte.*
  - 2 *Die Landkarte  $L^*$  ist regulär.*

## Lemma

- *Hat  $L$  mindestens 2 Länder, dann gilt*

$$v_{L^*} = f_L$$

$$k_{L^*} \leq k_L$$

$$f_{L^*} \leq v_L.$$

*Ist  $L$  regulär, so gelten in den letzten beiden ausdrücken '='.*

- *Sei  $L$  regulär, dann gilt*
  - 1 *Die Landkarte  $L$  ist eine zu  $L^*$  duale Landkarte.*
  - 2 *Die Landkarte  $L^*$  ist regulär.*

## Satz (Weiske)

*Es gibt keine Landkarte mit fünf paarweise benachbarten Ländern.*

**Beweis.** Angenommen es gibt eine Landkarte  $L$  die fünf paarweise benachbarte Länder enthält. Dann enthält eine zu  $L$  duale Landkarte  $L^*$  fünf Ecken, welche paarweise durch Kanten verbunden sind, also einen vollständigen ebenen Graphen mit fünf Ecken. Widerspruch. □



## Satz (Weiske)

*Es gibt keine Landkarte mit fünf paarweise benachbarten Ländern.*

**Beweis.** Angenommen es gibt eine Landkarte  $L$  die fünf paarweise benachbarte Länder enthält. Dann enthält eine zu  $L$  duale Landkarte  $L^*$  fünf Ecken, welche paarweise durch Kanten verbunden sind, also einen vollständigen ebenen Graphen mit fünf Ecken. Widerspruch. □

## Lemma

*Wenn ein Land einer beliebigen Landkarte mehr als drei Nachbarn hat, so hat es zwei Nachbarn, die keine gemeinsame Grenzlinie haben.*

## Satz

*Bei einem kleinsten Verbrecher hat kein Land weniger als fünf verschiedene Nachbarn.*

## Lemma

*Wenn ein Land einer beliebigen Landkarte mehr als drei Nachbarn hat, so hat es zwei Nachbarn, die keine gemeinsame Grenzlinie haben.*

## Satz

*Bei einem kleinsten Verbrecher hat kein Land weniger als fünf verschiedene Nachbarn.*

## Sehr wichtiger Satz

### Satz

*Bei einem kleinsten Verbrecher hat jede Ecke den Grad 3.*

### Beweis.

Sei  $L$  ein kleinster Verbrecher. Angenommen, es gibt eine Ecke in  $L$  mit  $d_L(x) > 3$ . Sei  $D$  eine elementare Umgebung von  $x$ , man konstruiert eine neue Landkarte  $L'$ , indem man die Kanten in  $L$  mit  $x$  als Endpunkt um die in  $D$  hineinragenden Strecken kürzt und die Kreisbögen, in die der Randkreis von  $D$  hineinragenden Strecken kürzt und die Kreisbögen, in die der Randkreis von  $D$  durch diese Kanten zerlegt wird, als neue Kanten hinzunehmen.

## Sehr wichtiger Satz

### Satz

*Bei einem kleinsten Verbrecher hat jede Ecke den Grad 3.*

### **Beweis.**

Sei  $L$  ein kleinster Verbrecher. Angenommen, es gibt eine Ecke in  $L$  mit  $d_L(x) > 3$ . Sei  $D$  eine elementare Umgebung von  $x$ , man konstruiert eine neue Landkarte  $L'$ , indem man die Kanten in  $L$  mit  $x$  als Endpunkt um die in  $D$  hineinragenden Strecken kürzt und die Kreisbögen, in die der Randkreis von  $D$  hineinragenden Strecken kürzt und die Kreisbögen, in die der Randkreis von  $D$  durch diese Kanten zerlegt wird, als neue Kanten hinzunimmt. Damit werden die Länder mit  $x$  als Grenzpunkt um Sektoren von  $D$  verkleinert und das Innere  $L'_0$  von  $D$  kommt als neues Land hinzu.

## Sehr wichtiger Satz

### Satz

*Bei einem kleinsten Verbrecher hat jede Ecke den Grad 3.*

### **Beweis.**

Sei  $L$  ein kleinster Verbrecher. Angenommen, es gibt eine Ecke in  $L$  mit  $d_L(x) > 3$ . Sei  $D$  eine elementare Umgebung von  $x$ , man konstruiert eine neue Landkarte  $L'$ , indem man die Kanten in  $L$  mit  $x$  als Endpunkt um die in  $D$  hineinragenden Strecken kürzt und die Kreisbögen, in die der Randkreis von  $D$  hineinragenden Strecken kürzt und die Kreisbögen, in die der Randkreis von  $D$  durch diese Kanten zerlegt wird, als neue Kanten hinzunimmt. Damit werden die Länder mit  $x$  als Grenzpunkt um Sektoren von  $D$  verkleinert und das Innere  $L'_0$  von  $D$  kommt als neues Land hinzu.

Nun ist die Anzahl der Länder mit  $x$  als Grenzpunkt gleich dem Grad von  $x$  und nach unserer Konstruktion ist dies die Zahl der Nachbarn von  $L'_0$ . Wegen  $d_L(x) > 3$  findet man Nachbarn  $L'_1$  und  $L'_2$  von  $L'_0$ , die keine gemeinsame Grenzlinie haben.

Nun ist die Anzahl der Länder mit  $x$  als Grenzpunkt gleich dem Grad von  $x$  und nach unserer Konstruktion ist dies die Zahl der Nachbarn von  $L'_0$ . Wegen  $d_L(x) > 3$  findet man Nachbarn  $L'_1$  und  $L'_2$  von  $L'_0$ , die keine gemeinsame Grenzlinie haben. Wir bemerken, dass auch die Länder  $L_1$  und  $L_2$ , aus denen  $L'_1$  und  $L'_2$  beim Übergang von  $L$  zu  $L'$  durch Verkleinern entstanden sind, keine gemeinsame Grenzlinie haben, sondern nur an der Ecke  $x$  zusammenstoßen.



Nun ist die Anzahl der Länder mit  $x$  als Grenzpunkt gleich dem Grad von  $x$  und nach unserer Konstruktion ist dies die Zahl der Nachbarn von  $L'_0$ . Wegen  $d_L(x) > 3$  findet man Nachbarn  $L'_1$  und  $L'_2$  von  $L'_0$ , die keine gemeinsame Grenzlinie haben. Wir bemerken, dass auch die Länder  $L_1$  und  $L_2$ , aus denen  $L'_1$  und  $L'_2$  beim Übergang von  $L$  zu  $L'$  durch Verkleinern entstanden sind, keine gemeinsame Grenzlinie haben, sondern nur an der Ecke  $x$  zusammenstoßen.

Durch Weglassen der gemeinsamen Grenzlinien von  $L'_0$  mit  $L'_1$  und  $L'_2$  erhält man eine Landkarte  $L''$ , bei der die Länder  $L'_0$ ,  $L'_1$  und  $L'_2$  zu einem Land  $L_x$  vereinigt sind. Die übrigen Länder ändern sich nicht. Da  $L''$  immer noch ein Land weniger als  $L$  hat, besitzt  $L''$  eine zulässige 4-Färbung  $\phi''$ .

Durch Weglassen der gemeinsamen Grenzlinien von  $L'_0$  mit  $L'_1$  und  $L'_2$  erhält man eine Landkarte  $L''$ , bei der die Länder  $L'_0$ ,  $L'_1$  und  $L'_2$  zu einem Land  $L_x$  vereinigt sind. Die übrigen Länder ändern sich nicht. Da  $L''$  immer noch ein Land weniger als  $L$  hat, besitzt  $L''$  eine zulässige 4-Färbung  $\phi''$ .

Daraus erhalten wir eine zulässige 4-Färbung für  $L$ , indem wir den Ländern  $L_1$  und  $L_2$  die Farbe von  $L_x$  zuweisen und allen anderen Ländern die Farben ihrer außerhalb von  $D$  gelegenen Landesteile bezüglich  $\phi''$ . Also wäre  $L$  kein Verbrecher. Widerspruch.

Durch Weglassen der gemeinsamen Grenzlinien von  $L'_0$  mit  $L'_1$  und  $L'_2$  erhält man eine Landkarte  $L''$ , bei der die Länder  $L'_0$ ,  $L'_1$  und  $L'_2$  zu einem Land  $L_x$  vereinigt sind. Die übrigen Länder ändern sich nicht. Da  $L''$  immer noch ein Land weniger als  $L$  hat, besitzt  $L''$  eine zulässige 4-Färbung  $\phi''$ .

Daraus erhalten wir eine zulässige 4-Färbung für  $L$ , indem wir den Ländern  $L_1$  und  $L_2$  die Farbe von  $L_x$  zuweisen und allen anderen Ländern die Farben ihrer außerhalb von  $D$  gelegenen Landesteile bezüglich  $\phi''$ . Also wäre  $L$  kein Verbrecher. Widerspruch.

## Definition

Eine Landkarte ist **kubisch**, wenn sie regulär ist und alle Ecken genau den Grad 3 haben.

## Satz

Es seien  $L$  eine reguläre und  $L^*$  eine zu  $L$  duale Landkarte.

- 1  $L^*$  ist genau dann gesättigt, wenn  $L$  kubisch ist.
- 2  $L^*$  ist genau dann kubisch, wenn  $L$  gesättigt ist.

## Definition

Eine Landkarte ist **kubisch**, wenn sie regulär ist und alle Ecken genau den Grad 3 haben.

## Satz

Es seien  $L$  eine reguläre und  $L^*$  eine zu  $L$  duale Landkarte.

- 1  $L^*$  ist genau dann gesättigt, wenn  $L$  kubisch ist.
- 2  $L^*$  ist genau dann kubisch, wenn  $L$  gesättigt ist.

## äußerst wichtiger Satz

### Satz

*Für eine reguläre Landkarte gilt:*

$$\sum_{r=1}^{v_L} (6 - d_r) \geq 12$$

$$\sum_{s=1}^{f_L} (6 - n_s) \geq 12$$

**Beweis.** Aufgrund der Dualitätstheorie genügt es eine Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{v_L} (6 - d_r) &= 6 \cdot v_L - 2 \cdot k_L \\ &= 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 4 \cdot k_L\end{aligned}$$



**Beweis.** Aufgrund der Dualitätstheorie genügt es eine Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{v_L} (6 - d_r) &= 6 \cdot v_L - 2 \cdot k_L \\ &= 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 4 \cdot k_L \\ &\geq 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 6 \cdot f_L\end{aligned}$$

**Beweis.** Aufgrund der Dualitätstheorie genügt es eine Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{v_L} (6 - d_r) &= 6 \cdot v_L - 2 \cdot k_L \\ &= 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 4 \cdot k_L \\ &\geq 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 6 \cdot f_L \\ &= 6 \cdot (v_L - k_L + f_L) =\end{aligned}$$

**Beweis.** Aufgrund der Dualitätstheorie genügt es eine Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{v_L} (6 - d_r) &= 6 \cdot v_L - 2 \cdot k_L \\ &= 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 4 \cdot k_L \\ &\geq 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 6 \cdot f_L \\ &= 6 \cdot (v_L - k_L + f_L) = 12\end{aligned}$$



**Beweis.** Aufgrund der Dualitätstheorie genügt es eine Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{v_L} (6 - d_r) &= 6 \cdot v_L - 2 \cdot k_L \\ &= 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 4 \cdot k_L \\ &\geq 6 \cdot v_L - 6 \cdot k_L + 6 \cdot f_L \\ &= 6 \cdot (v_L - k_L + f_L) = 12\end{aligned}$$

□

## Lemma

*Jede reguläre Landkarte hat Ecken, in denen höchstens fünf Kanten zusammenstoßen und Länder mit höchstens fünf Nachbarn.*

## Definition

*Es seien  $L$  eine Landkarte und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  **$n$ -Kantenfärbung** von  $L$  ist eine Abbildung  $\psi : L \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine  $n$ -Kantenfärbung ist **zulässig**, wenn Kanten mit gemeinsamen Randpunkten immer verschiedene Werte (Farben) haben.*

## Lemma

*Jede reguläre Landkarte hat Ecken, in denen höchstens fünf Kanten zusammenstoßen und Länder mit höchstens fünf Nachbarn.*

## Definition

*Es seien  $L$  eine Landkarte und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  **$n$ -Kantenfärbung** von  $L$  ist eine Abbildung  $\psi : L \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine  $n$ -Kantenfärbung ist **zulässig**, wenn Kanten mit gemeinsamen Randpunkten immer verschiedene Werte (Farben) haben.*

## Satz (Tait)

*Eine kubische Landkarte besitzt genau dann eine zulässige 4-Färbung, wenn sie eine zulässige 3-Kantenfärbung besitzt.*

## Satz

*Gibt es in einer kubischen Landkarte einen Hamiltonschen Kreis, so besitzt die Landkarte eine 3-Kantenfärbung.*

## Satz (Tait)

*Eine kubische Landkarte besitzt genau dann eine zulässige 4-Färbung, wenn sie eine zulässige 3-Kantenfärbung besitzt.*

## Satz

*Gibt es in einer kubischen Landkarte einen Hamiltonschen Kreis, so besitzt die Landkarte eine 3-Kantenfärbung.*



## Definition (n-Eckenfärbung)

Es seien  $G = (E, L)$  ein Graph und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine **n-Eckenfärbung** von  $G$  ist eine Abbildung  $\chi : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine n-Eckenfärbung heißt **zulässig**, wenn zwei Ecken, die Endpunkte ein und derselben Kante in  $L$  sind immer verschiedene Werte (Farben) haben.

## Satz

Eine Landkarte besitzt genau dann eine zulässige 4-Färbung, wenn jede zu ihr duale Landkarte eine zulässige 4-Eckenfärbung besitzt.

## Definition (n-Eckenfärbung)

Es seien  $G = (E, L)$  ein Graph und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine **n-Eckenfärbung** von  $G$  ist eine Abbildung  $\chi : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine n-Eckenfärbung heißt **zulässig**, wenn zwei Ecken, die Endpunkte ein und derselben Kante in  $L$  sind immer verschiedene Werte (Farben) haben.

## Satz

Eine Landkarte besitzt genau dann eine zulässige 4-Färbung, wenn jede zu ihr duale Landkarte eine zulässige 4-Eckenfärbung besitzt.

## Definition (plättbarer Graph)

*Ein **plättbarer Graph** ist ein Graph, der isomorph zu einem ebenen Graphen ist.*

## Satz (Kuratowski)

*Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn er keinen zu einer Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  isomorphen Teilgraphen besitzt.*

## Definition (plättbarer Graph)

*Ein **plättbarer Graph** ist ein Graph, der isomorph zu einem ebenen Graphen ist.*

## Satz (Kuratowski)

*Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn er keinen zu einer Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  isomorphen Teilgraphen besitzt.*

## Satz

*Entsteht der kombinatorische Graph  $G'$  durch Kontraktion aus dem plättbaren Graphen  $G$ , so ist  $G'$  plättbar.*

## Lemma

*In einem kleinsten Verbrecher ist jedes Dreieck Grenze eines Gebietes.*

## Satz

*Entsteht der kombinatorische Graph  $G'$  durch Kontraktion aus dem plättbaren Graphen  $G$ , so ist  $G'$  plättbar.*

## Lemma

*In einem kleinsten Verbrecher ist jedes Dreieck Grenze eines Gebietes.*

## Definition (Normale Graphen)

Ein Graph  $G = (E, L)$  heißt **normal**, wenn er ein regulärer, gesättigter, ebener Graph ist, bei dem jedes Dreieck Rand eines Gebietes ist.

## Definition (Ring)

Sei  $G = (E, L)$  ein Graph. Eine Menge  $R$  von Ecken heißt **Ring**, wenn sich ihre Elemente zu einer einfach geschlossenen Kette anordnen lassen; in diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der Elemente von  $R$  auch als die **Größe** des Ringes  $R$ .

## Definition (Normale Graphen)

Ein Graph  $G = (E, L)$  heißt **normal**, wenn er ein regulärer, gesättigter, ebener Graph ist, bei dem jedes Dreieck Rand eines Gebietes ist.

## Definition (Ring)

Sei  $G = (E, L)$  ein Graph. Eine Menge  $R$  von Ecken heißt **Ring**, wenn sich ihre Elemente zu einer einfach geschlossenen Kette anordnen lassen; in diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der Elemente von  $R$  auch als die **Größe** des Ringes  $R$ .



# Konfiguration

## Definition (Konfiguration)

Ein Graph  $C$  heißt **Konfiguration**, wenn

- 1 er regulär ist,
- 2 die Außenecken einen Ring der Größe echt größer 4 bilden,
- 3 innere Ecken existieren,
- 4 die beschränkten Gebiete von Dreiecken begrenzt werden,
- 5 jedes Dreieck Grenze eines Gebietes ist.

# Sterne

## Definition (Sterne)

Eine Konfiguration heißt **Stern**, wenn sie nur eine innere Ecke enthält. Wir haben speziell einen **k-Stern**, wenn ein Stern mit genau  $k$  Außenecken, also insgesamt  $k + 1$  Ecken vorliegt ( $k \geq 4$ ).

**Innenkanten** verbinden zwei innere Ecken.

**Außenkanten** verbinden zwei Außenecken.

**Beine** verbinden eine innere Ecke mit einer Außenecke.

Die **Ringgröße** einer Konfiguration ist die Größe des Rings ihrer Außenecken.

## Lemma

*Der Rand jedes beschränkten Gebietes einer Konfiguration enthält immer mindestens eine innere Ecke.*

## Satz

*Das Innere einer Konfiguration ist ein zusammenhängender Graph.*

## Lemma

*Der Rand jedes beschränkten Gebietes einer Konfiguration enthält immer mindestens eine innere Ecke.*

## Satz

*Das Innere einer Konfiguration ist ein zusammenhängender Graph.*

## Definition (Äquivalenz)

Zwei Konfigurationen  $C' = (E', L')$  und  $C'' = (E'', L'')$  heißen **äquivalent**, wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi : E' \rightarrow E''$  gibt, die in beiden Richtungen die Nachbarrelation enthält.

## Definition

Der Graph  $G$  **enthält** die Konfiguration  $C$ , wenn es in  $G$  eine geschlossene Kette  $K$  gibt, derart dass der von den Ecken von  $K$  und den im Innengebiet von  $K$  liegenden Ecken aufgespannte Teilgraph  $C_K$  von  $G$  eine zu  $C$  äquivalente Konfiguration ist.

## Definition (Äquivalenz)

Zwei Konfigurationen  $C' = (E', L')$  und  $C'' = (E'', L'')$  heißen **äquivalent**, wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi : E' \rightarrow E''$  gibt, die in beiden Richtungen die Nachbarrelation enthält.

## Definition

Der Graph  $G$  **enthält** die Konfiguration  $C$ , wenn es in  $G$  eine geschlossene Kette  $K$  gibt, derart dass der von den Ecken von  $K$  und den im Innengebiet von  $K$  liegenden Ecken aufgespannte Teilgraph  $C_K$  von  $G$  eine zu  $C$  äquivalente Konfiguration ist.

Die Konfiguration ist **richtig in  $G$  eingebettet**, wenn  $K$  einfach abgeschlossen ist.

## Definition (Äquivalenz)

Zwei Konfigurationen  $C' = (E', L')$  und  $C'' = (E'', L'')$  heißen **äquivalent**, wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi : E' \rightarrow E''$  gibt, die in beiden Richtungen die Nachbarrelation enthält.

## Definition

Der Graph  $G$  **enthält** die Konfiguration  $C$ , wenn es in  $G$  eine geschlossene Kette  $K$  gibt, derart dass der von den Ecken von  $K$  und den im Innengebiet von  $K$  liegenden Ecken aufgespannte Teilgraph  $C_K$  von  $G$  eine zu  $C$  äquivalente Konfiguration ist.

Die Konfiguration ist **richtig in  $G$  eingebettet**, wenn  $K$  einfach abgeschlossen ist.

## Satz

*Eine Minimaltriangulation enthält keinen 4-Stern, aber mindestens zwölf 5 Sterne.*

## Satz

*Der zu einem Ring mit mindestens 4 Ecken gehörige Kreis in einer Minimaltriangulation ist Randkreis einer richtig eingebetteten Konfiguration.*

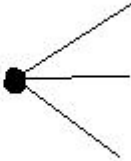
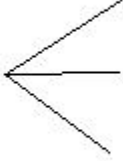
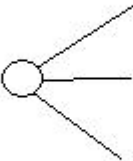


## Satz

*Eine Minimaltriangulation enthält keinen 4-Stern, aber mindestens zwölf 5 Sterne.*

## Satz

*Der zu einem Ring mit mindestens 4 Ecken gehörige Kreis in einer Minimaltriangulation ist Randkreis einer richtig eingebetteten Konfiguration.*

|        |   |   |   |
|--------|---|---|---|
| Grad   | 5   | 6   | $\geq 7$  |
| Symbol |  |  |  |

## Definition (Minimaltriangulation)

*Ein normaler Graph, der als kleinster Verbrecher gegen die Existenz einer 4-Eckenfärbung betrachtet wird, wird als **Minimaltriangulation** bezeichnet.*

## Definition (Reduzibilität)

*Eine Konfiguration  $C$  heißt **reduzibel**, sonst **irreduzibel**, wenn ein normaler Graph, der  $C$  als Konfiguration enthält, keine Minimaltriangulation sein kann.*

## Definition (Minimaltriangulation)

*Ein normaler Graph, der als kleinster Verbrecher gegen die Existenz einer 4-Eckenfärbung betrachtet wird, wird als **Minimaltriangulation** bezeichnet.*

## Definition (Reduzibilität)

*Eine Konfiguration  $C$  heißt **reduzibel**, sonst **irreduzibel**, wenn ein normaler Graph, der  $C$  als Konfiguration enthält, keine Minimaltriangulation sein kann.*

### Definition (unvermeidbare Mengen)

Eine Menge  $U$  von Konfigurationen heißt **unvermeidbar**, wenn jeder normale Graph ein Element von  $U$  enthält.

### Definition (gefärbter Graph)

Ein **gefärbter** Graph ist ein Paar  $(G, \chi)$ , bestehend aus einem (ebenen) Graphen  $G$  und einer zulässigen 4-Eckenfärbung  $\chi$  von  $G$ .

### Definition (unvermeidbare Mengen)

Eine Menge  $U$  von Konfigurationen heißt **unvermeidbar**, wenn jeder normale Graph ein Element von  $U$  enthält.

### Definition (gefärbter Graph)

Ein **gefärbter** Graph ist ein Paar  $(G, \chi)$ , Bestehend aus einem (ebenen) Graphen  $G$  und einer zulässigen 4-Eckenfärbung  $\chi$  von  $G$ .

Der generelle Induktionsschritt besteht darin, eine Ecke zu entfernen, wodurch man einen kleineren Graphen erhält, welcher nach Induktionsannahme mit 4 Farben färbbar ist.

Das Problem besteht dann darin, die Färbung so zu ändern, dass man diese zu einer zulässigen Färbung inklusive der weggelassenen Ecke erweitern kann. Dabei interessiert uns der Fall für Ecken vom Grad kleiner gleich 4 nicht mehr, da man diese durch Kempe-Ketten reduzieren kann.

Der generelle Induktionsschritt besteht darin, eine Ecke zu entfernen, wodurch man einen kleineren Graphen erhält, welcher nach Induktionsannahme mit 4 Farben färbbar ist.

Das Problem besteht dann darin, die Färbung so zu ändern, dass man diese zu einer zulässigen Färbung inklusive der weggelassenen Ecke erweitern kann. Dabei interessiert uns der Fall für Ecken vom Grad kleiner gleich 4 nicht mehr, da man diese durch Kempe-Ketten reduzieren kann.

Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, dass jeder planare Graph eine dieser reduzierbaren Konfigurationen enthält, also das finden einer unvermeidbaren Menge von reduzierbaren Konfigurationen.



Der generelle Induktionsschritt besteht darin, eine Ecke zu entfernen, wodurch man einen kleineren Graphen erhält, welcher nach Induktionsannahme mit 4 Farben färbbar ist.

Das Problem besteht dann darin, die Färbung so zu ändern, dass man diese zu einer zulässigen Färbung inklusive der weggelassenen Ecke erweitern kann. Dabei interessiert uns der Fall für Ecken vom Grad kleiner gleich 4 nicht mehr, da man diese durch Kempe-Ketten reduzieren kann.

Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, dass jeder planare Graph eine dieser reduzierbaren Konfigurationen enthält, also das finden einer unvermeidbaren Menge von reduzierbaren Konfigurationen.

## Definition

Es sei  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph.

- (i) Eine **Kempe-Kette** ist eine Kette, deren Ecken mit nur zwei Farben gefärbt sind. Speziell sprechen wir von einer  $(b, g)$ -**Kette**, wenn eine Kempe-Kette vorliegt, deren Ecken (abwechselnd) mit den Farben  $b$  und  $g \in \{1, 2, 3, 4\}$  gefärbt sind
- (ii) Ein **Kempe-Netz** ist eine Komponente eines Teilgraphen der Form  $G_{bg}$ . Speziell sprechen wir von einem  $(b, g)$ -**Netz**, wenn ein Kempe-Netz vorliegt, dessen Ecken mit den Farben  $b$  und  $g \in \{1, 2, 3, 4\}$  gefärbt sind.

## Definition

Es sei  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph.

- (i) Eine **Kempe-Kette** ist eine Kette, deren Ecken mit nur zwei Farben gefärbt sind. Speziell sprechen wir von einer  $(b, g)$ -**Kette**, wenn eine Kempe-Kette vorliegt, deren Ecken (abwechselnd) mit den Farben  $b$  und  $g \in \{1, 2, 3, 4\}$  gefärbt sind
- (ii) Ein **Kempe-Netz** ist eine Komponente eines Teilgraphen der Form  $G_{bg}$ . Speziell sprechen wir von einem  $(b, g)$ -**Netz**, wenn ein Kempe-Netz vorliegt, dessen Ecken mit den Farben  $b$  und  $g \in \{1, 2, 3, 4\}$  gefärbt sind.

## Lemma

*Ist  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph, so ist der Teilgraph  $C = (E_C, L_C)$  von  $G$  genau dann ein Kempe-Netz, wenn gilt*

- 1 Die Ecken von  $C$  sind insgesamt nur mit zwei Farben gefärbt.*
- 2 Je zwei Ecken von  $C$  können durch eine Kempe-Kette verbunden werden, deren Ecken sämtlich zu  $C$  gehören.*

## Lemma

*Ist  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph, so ist der Teilgraph  $C = (E_C, L_C)$  von  $G$  genau dann ein Kempe-Netz, wenn gilt*

- 1 Die Ecken von  $C$  sind insgesamt nur mit zwei Farben gefärbt.*
- 2 Je zwei Ecken von  $C$  können durch eine Kempe-Kette verbunden werden, deren Ecken sämtlich zu  $C$  gehören.*
- 3 Bezüglich der Eigenschaften 1. und 2. ist  $E_C$  maximal.*

## Lemma

Ist  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph, so ist der Teilgraph  $C = (E_C, L_C)$  von  $G$  genau dann ein Kempe-Netz, wenn gilt

- 1 Die Ecken von  $C$  sind insgesamt nur mit zwei Farben gefärbt.
- 2 Je zwei Ecken von  $C$  können durch eine Kempe-Kette verbunden werden, deren Ecken sämtlich zu  $C$  gehören.
- 3 Bezüglich der Eigenschaften 1. und 2. ist  $E_C$  maximal.
- 4  $C$  wird von  $E_C$  aufgespannt.

## Lemma

Ist  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph, so ist der Teilgraph  $C = (E_C, L_C)$  von  $G$  genau dann ein Kempe-Netz, wenn gilt

- 1 Die Ecken von  $C$  sind insgesamt nur mit zwei Farben gefärbt.
- 2 Je zwei Ecken von  $C$  können durch eine Kempe-Kette verbunden werden, deren Ecken sämtlich zu  $C$  gehören.
- 3 Bezüglich der Eigenschaften 1. und 2. ist  $E_C$  maximal.
- 4  $C$  wird von  $E_C$  aufgespannt.

## Definition

Es sei  $(G, \chi)$  ein gefärbter Graph. Die Färbung  $\hat{\chi}$  von  $G = (E, L)$  entsteht aus  $\chi$  durch **Kempe-Austausch**, wenn in einem Kempe-Netz die Farben vertauscht werden, das heißt, wenn ein  $(b, g)$ -Netz  $C = (E_C, L_C)$  existiert, derart dass gilt

$$\hat{\chi}(z) = \begin{cases} g & \text{falls } z \in E_C \text{ und } \chi(z) = b, \\ b, & \text{falls } z \in E_C \text{ und } \chi(z) = g, \\ \chi(z), & \text{falls } z \in E \setminus E_C \end{cases}$$



## Lemma

*Es sei  $K = (x_1, \dots, x_r)$  mit  $r \geq 4$  eine geschlossene Kette in einem gefärbten Graphen  $(G, \chi)$ , deren zugehörige geschlossene Jordankurve  $J(K)$  ein Gebiet von  $G$  berandet. Ferner sei angenommen, dass die Ecken  $x_1$  und  $x_j$  mit  $2 < j < r$  dem gleichen  $(1, 2)$ -Netz angehören. Dann gehören zwei Ecken  $x_k$  und  $x_l$  mit  $1 < k < j$  und  $j < l \leq r$ , die die Farben 3 und 4 tragen, sicherlich nicht dem gleichen  $(3, 4)$ -Netz an.*

## Lemma

*In einer Minimaltriangulation gibt es keine 4-Ecke.*

## Lemma

*Es sei  $K = (x_1, \dots, x_r)$  mit  $r \geq 4$  eine geschlossene Kette in einem gefärbten Graphen  $(G, \chi)$ , deren zugehörige geschlossene Jordankurve  $J(K)$  ein Gebiet von  $G$  berandet. Ferner sei angenommen, dass die Ecken  $x_1$  und  $x_j$  mit  $2 < j < r$  dem gleichen  $(1, 2)$ -Netz angehören. Dann gehören zwei Ecken  $x_k$  und  $x_l$  mit  $1 < k < j$  und  $j < l \leq r$ , die die Farben 3 und 4 tragen, sicherlich nicht dem gleichen  $(3, 4)$ -Netz an.*

## Lemma

*In einer Minimaltriangulation gibt es keine 4-Ecke.*

## Beweis: Kempe-Ergebnis

Sei  $y$  eine 4-Ecke einer Minimaltriangulation  $G$ , seien  $x_1, \dots, x_4$  die Nachbarn von  $y$  in zyklischer Reihenfolge. Der Graph  $G'$  entstehe aus  $G$  durch Weglassen der Ecke  $y$  und der zu  $y$  inzidenten Kanten.

Da  $G$  eine Minimaltriangulation war, gibt es für  $G'$  eine zulässige 4-Färbung  $\chi'$ . Sind für die Färbung der in  $G'$  enthaltenen Nachbarn von  $y$  nur drei Farben verbraucht, so sind wir fertig.

## Beweis: Kempe-Ergebnis

Sei  $y$  eine 4-Ecke einer Minimaltriangulation  $G$ , seien  $x_1, \dots, x_4$  die Nachbarn von  $y$  in zyklischer Reihenfolge. Der Graph  $G'$  entstehe aus  $G$  durch Weglassen der Ecke  $y$  und der zu  $y$  inzidenten Kanten.

Da  $G$  eine Minimaltriangulation war, gibt es für  $G'$  eine zulässige 4-Färbung  $\chi'$ . Sind für die Färbung der in  $G'$  enthaltenen Nachbarn von  $y$  nur drei Farben verbraucht, so sind wir fertig.

Sind die Nachbarn von  $y$  allerdings paarweise verschieden gefärbt, so kann man durch eine Permutation erreichen, dass

$$\chi'(x_i) = i \quad \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Jetzt beginnt das Kempe-Ketten Spiel:

- 1 Zug: Gehören  $x_1$  und  $x_3$  zu verschiedenen  $(1, 3)$ -Netzen, so wird ein Kempe-Austausch in dem  $(1, 3)$ -Netz durchgeführt, welches  $x_1$  enthält.  $x_1$  hat jetzt die Farbe 3 und die Nachbarn von  $y$  haben nur noch drei Farben.

Sind die Nachbarn von  $y$  allerdings paarweise verschieden gefärbt, so kann man durch eine Permutation erreichen, dass

$$\chi'(x_i) = i \quad \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Jetzt beginnt das Kempe-Ketten Spiel:

- Zug: Gehören  $x_1$  und  $x_3$  zu verschiedenen  $(1, 3)$ -Netzen, so wird ein Kempe-Austausch in dem  $(1, 3)$ -Netz durchgeführt, welches  $x_1$  enthält.  $x_1$  hat jetzt die Farbe 3 und die Nachbarn von  $y$  haben nur noch drei Farben.
- Zug: Gehören die Ecken  $x_1$  und  $x_3$  zum gleichen  $(1, 3)$ -Netz, dann kann man zeigen, dass die Ecken  $x_2$  und  $x_4$  zu verschiedenen  $(2, 4)$ -Netzen. Durch einen Kempe-Austausch erhält man die Färbung  $\chi''$  mit

$$\chi''(x_2) = \chi''(x_4) = 4,$$

wobei wieder die Nachbarn von  $y$  mit nur drei Farben gefärbt

Sind die Nachbarn von  $y$  allerdings paarweise verschieden gefärbt, so kann man durch eine Permutation erreichen, dass

$$\chi'(x_i) = i \quad \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Jetzt beginnt das Kempe-Ketten Spiel:

- 1 Zug: Gehören  $x_1$  und  $x_3$  zu verschiedenen  $(1, 3)$ -Netzen, so wird ein Kempe-Austausch in dem  $(1, 3)$ -Netz durchgeführt, welches  $x_1$  enthält.  $x_1$  hat jetzt die Farbe 3 und die Nachbarn von  $y$  haben nur noch drei Farben.
- 2 Zug: Gehören die Ecken  $x_1$  und  $x_3$  zum gleichen  $(1, 3)$ -Netz, dann kann man zeigen, dass die Ecken  $x_2$  und  $x_4$  zu verschiedenen  $(2, 4)$ -Netzen. Durch einen Kempe-Austausch erhält man die Färbung  $\chi''$  mit

$$\chi''(x_2) = \chi''(x_4) = 4,$$

wobei wieder die Nachbarn von  $y$  mit nur drei Farben gefärbt

## Satz

*In einer Minimaltriangulation gibt es weder*

- ① *einen Ring der Größe 4 noch*
- ② *einen Ring der Größe 5, dessen Innengebiet mehr als eine Ecke von  $G$  enthält.*

## Lemma

*Es sei  $y$  Ecke einer Minimaltriangulation  $G$  und  $R$  sei die Menge aller Ecken von  $G$ , die von  $y$  und seinen Nachbarecken verschieden, aber zu einer Nachbarecke von  $y$  benachbart sind. Dann ist  $R$  ein Ring mit mindestens  $d_G(y)$  Ecken.*



## Satz

*In einer Minimaltriangulation gibt es weder*

- ① *einen Ring der Größe 4 noch*
- ② *einen Ring der Größe 5, dessen Innengebiet mehr als eine Ecke von  $G$  enthält.*

## Lemma

*Es sei  $y$  Ecke einer Minimaltriangulation  $G$  und  $R$  sei die Menge aller Ecken von  $G$ , die von  $y$  und seinen Nachbarecken verschieden, aber zu einer Nachbarecke von  $y$  benachbart sind. Dann ist  $R$  ein Ring mit mindestens  $d_G(y)$  Ecken.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

*In einer Minimaltriangulation gibt es nicht:*

- 1 *Eine Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 5 haben.*
- 2 *Eine Ecke mit geradem Grad, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

*In einer Minimaltriangulation gibt es nicht:*

- 1 *Eine Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 5 haben.*
- 2 *Eine Ecke mit geradem Grad, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
- 3 *Eine 5 – 5 – 5-Kette, deren Ecken zu ein- und derselben 6-Ecke benachbart sind.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

*In einer Minimaltriangulation gibt es nicht:*

- 1 *Eine Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 5 haben.*
- 2 *Eine Ecke mit geradem Grad, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
- 3 *Eine  $5 - 5 - 5$ -Kette, deren Ecken zu ein- und derselben 6-Ecke benachbart sind.*
- 4 *Eine 5-Ecke, deren Nachbarn zu einer  $5 - 5 - 6 - 6 - 6$ -Kette angeordnet werden können.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

*In einer Minimaltriangulation gibt es nicht:*

- 1 *Eine Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 5 haben.*
- 2 *Eine Ecke mit geradem Grad, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
- 3 *Eine  $5 - 5 - 5$ -Kette, deren Ecken zu ein- und derselben 6-Ecke benachbart sind.*
- 4 *Eine 5-Ecke, deren Nachbarn zu einer  $5 - 5 - 6 - 6 - 6$ -Kette angeordnet werden können.*
- 5 *Nur Ecken mit den Graden 5 und 6.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

*In einer Minimaltriangulation gibt es nicht:*

- 1 *Eine Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 5 haben.*
- 2 *Eine Ecke mit geradem Grad, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
- 3 *Eine  $5 - 5 - 5$ -Kette, deren Ecken zu ein- und derselben 6-Ecke benachbar sind.*
- 4 *Eine 5-Ecke, deren Nachbarn zu einer  $5 - 5 - 6 - 6 - 6$ -Kette angeordnet werden können.*
- 5 *Nur Ecken mit den Graden 5 und 6.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

- 1 *Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.*
- 2 *Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein  $7-7-7$ -Dreieck.*

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

- 1 Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.
- 2 Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein  $7 - 7 - 7$ -Dreieck.
- 3 Nur Ecken mit Graden ungleich 6 ohne ein  $5 - 5 - 5$ -Dreieck.



## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

- 1 Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.
- 2 Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein  $7-7-7$ -Dreieck.
- 3 Nur Ecken mit Graden ungleich 6 ohne ein  $5-5-5$ -Dreieck.
- 4 Nur Ecken mit Graden 5, 6 und 8.

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

- 1 Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.
- 2 Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein  $7-7-7$ -Dreieck.
- 3 Nur Ecken mit Graden ungleich 6 ohne ein  $5-5-5$ -Dreieck.
- 4 Nur Ecken mit Graden 5, 6 und 8.
- 5 Nur Ecken mit Graden ungleich 6.

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

- 1 Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.
- 2 Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein  $7-7-7$ -Dreieck.
- 3 Nur Ecken mit Graden ungleich 6 ohne ein  $5-5-5$ -Dreieck.
- 4 Nur Ecken mit Graden 5, 6 und 8.
- 5 Nur Ecken mit Graden ungleich 6.
- 6 Einen Birkhoff-Diamanten.

## Satz (Aufzählung wichtiger Ergebnisse)

- 1 Eine 5-Ecke, deren Nachbarn alle den Grad 6 haben.
- 2 Nur Ecken mit den Graden 5 und 7 ohne ein  $7-7-7$ -Dreieck.
- 3 Nur Ecken mit Graden ungleich 6 ohne ein  $5-5-5$ -Dreieck.
- 4 Nur Ecken mit Graden 5, 6 und 8.
- 5 Nur Ecken mit Graden ungleich 6.
- 6 Einen Birkhoff-Diamanten.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 1/8

Es sei  $G$  eine Minimaltriangulation, die einen Birkhoff-Diamanten enthält.

Der Graph  $G'$  entstehe aus  $G$  durch Wegnahme der inneren Ecken des Birkhoff-Diamanten und der mit ihnen inzidenten Kanten. Der erst Zug im Nun beginnenden Kempe-Ketten Spiel beinhaltet noch keinen Kempe-Austausch, sondern eine Kontraktion.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 1/8

Es sei  $G$  eine Minimaltriangulation, die einen Birkhoff-Diamanten enthält.

Der Graph  $G'$  entstehe aus  $G$  durch Wegnahme der inneren Ecken des Birkhoff-Diamanten und der mit ihnen inzidenten Kanten. Der erst Zug im Nun beginnenden Kempe-Ketten Spiel beinhaltet noch keinen Kempe-Austausch, sondern eine Kontraktion.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 2/8

1.Zug: Man bildet aus  $G'$  einen Graphen  $G''$  wie folgt:

- 1 Man erweitert um eine Kante, die Diagonale die  $x_2$  und  $x_4$  verbindet: Dies ist möglich, da diese nicht schon durch eine Kante verbunden sind, andernfalls würden die Ecken  $x_2$ ,  $x_4$  und  $y_3$  ein Dreieck in  $G$  bilden, Widerspruch zur Definition der Minimaltriangulation.
- 2 Dann wird die neue Kante zu der in ihr liegende Ecke  $y_3$  kontrahiert.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 2/8

1. Zug: Man bildet aus  $G'$  einen Graphen  $G''$  wie folgt:

- 1 Man erweitert um eine Kante, die Diagonale die  $x_2$  und  $x_4$  verbindet: Dies ist möglich, da diese nicht schon durch eine Kante verbunden sind, andernfalls würden die Ecken  $x_2$ ,  $x_4$  und  $y_3$  ein Dreieck in  $G$  bilden, Widerspruch zur Definition der Minimaltriangulation.
- 2 Dann wird die neue Kante zu der in ihr liegende Ecke  $y_3$  kontrahiert.
- 3 Schließlich wird die Verbindungsstrecke von  $x_6$  und  $y_3$  als Kante hinzugenommen. Dies ist möglich, weil es in Minimaltriangulationen keine Ringe der Größe 4 gibt, denn andernfalls müßten entweder die Ecken  $x_2$  und  $x_6$  oder die Ecken  $x_4$  und  $x_6$  in  $G$  benachbart sein.



## Beweis: Birkhoff-Diamant 2/8

1. Zug: Man bildet aus  $G'$  einen Graphen  $G''$  wie folgt:

- 1 Man erweitert um eine Kante, die Diagonale die  $x_2$  und  $x_4$  verbindet: Dies ist möglich, da diese nicht schon durch eine Kante verbunden sind, andernfalls würden die Ecken  $x_2$ ,  $x_4$  und  $y_3$  ein Dreieck in  $G$  bilden, Widerspruch zur Definition der Minimaltriangulation.
- 2 Dann wird die neue Kante zu der in ihr liegende Ecke  $y_3$  kontrahiert.
- 3 Schließlich wird die Verbindungsstrecke von  $x_6$  und  $y_3$  als Kante hinzugenommen. Dies ist möglich, weil es in Minimaltriangulationen keine Ringe der Größe 4 gibt, denn andernfalls müßten entweder die Ecken  $x_2$  und  $x_6$  oder die Ecken  $x_4$  und  $x_6$  in  $G$  benachbart sein.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 3/8

Bei der entstandenen Figur handelt es sich um einen **Reduzenten**. Der Graph  $G''$  hat fünf Ecken weniger als  $G$ , besitzt also eine zulässige 4-Färbung  $\chi''$ . Die Ecken des Dreiecks  $[x_1 y_3 x_6]$  müssen drei verschiedene Farben haben. Sei also  $\chi''(x_1) = 0$ ,  $\chi''(y_3) = 1$  und  $\chi''(x_6) = 2$ . Nun setzt man für die Ecken  $z$  von  $G'$

$$\chi'(z) = \begin{cases} 1, & z \in \{x_2, x_4\}, \\ \chi''(z), & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhält eine zulässige 4-Eckenfärbung von  $G'$ .

## Beweis: Birkhoff-Diamant 4/8

Für die Außenecken ergeben sich nun folgende Möglichkeiten:

|    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. | 0     | 1     | 0     | 1     | 3     | 2     |
| 2. | 0     | 1     | 2     | 1     | 3     | 2     |
| 3. | 0     | 1     | 3     | 1     | 3     | 2     |
| 4. | 0     | 1     | 2     | 1     | 0     | 2     |
| 5. | 0     | 1     | 3     | 1     | 0     | 2     |
| 6. | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2     |

## Beweis: Birkhoff-Diamant 5/8

2.Zug: In den ersten fünf Fällen kann  $\chi'$  direkt zu einer zulässigen 4-Färbung von  $G$  fortgesetzt werden, wie die folgende Tabelle zeigt:

|    | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|----|-------|-------|-------|-------|
| 1. | 1     | 3     | 2     | 0     |
| 2. | 1     | 2     | 3     | 0     |
| 3. | 1     | 3     | 2     | 0     |
| 4. | 1     | 2     | 0     | 3     |
| 5. | 1     | 2     | 0     | 3     |

## Beweis: Birkhoff-Diamant 6/8

3.Zug: Der Rand des Birkhoff-Diamanten ist durch  $\chi'$  gemäß Fall 6 gefärbt.

Eine direkte Fortsetzung auf  $G$  ist nun nicht möglich, weil die Ecken  $y_2$  und  $y_4$  die Farben 2 und 3 erhalten müssten und dadurch keine mehr für  $y_3$  übrig wäre.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 6/8

3.Zug: Der Rand des Birkhoff-Diamanten ist durch  $\chi'$  gemäß Fall 6 gefärbt.

Eine direkte Fortsetzung auf  $G$  ist nun nicht möglich, weil die Ecken  $y_2$  und  $y_4$  die Farben 2 und 3 erhalten müssten und dadurch keine mehr für  $y_3$  übrig wäre.

Man betrachtet nun verschiedene Möglichkeiten für das  $(0, 3)$ -Netz  $C$ , dem die Ecke  $x_5$  angehört.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 6/8

3.Zug: Der Rand des Birkhoff-Diamanten ist durch  $\chi'$  gemäß Fall 6 gefärbt.

Eine direkte Fortsetzung auf  $G$  ist nun nicht möglich, weil die Ecken  $y_2$  und  $y_4$  die Farben 2 und 3 erhalten müssten und dadurch keine mehr für  $y_3$  übrig wäre.

Man betrachtet nun verschiedene Möglichkeiten für das  $(0, 3)$ -Netz  $C$ , dem die Ecke  $x_5$  angehört.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 7/8

- Gehört die Ecke  $x_3$  auch zu  $C$ , so erhält man durch Kempe-Austausch eine Färbung  $\bar{\chi}'$  mit  $\bar{\chi}'(x_4) = 2$ , die sich in genau einer Weise auf ganz  $G$  fortsetzen lässt, nämlich durch

$$y_j \mapsto \begin{cases} 3, & j = 3 \\ 2, & j = 2 \\ 1, & j = 4 \\ 3, & j = 1 \end{cases}$$

- Die Ecke  $x_3$  gehört nicht zu  $C$ , aber die Ecke  $x_1$  liegt in  $C$ . Dann liegen  $x_1$  und  $x_3$  in verschiedenen  $(0, 3)$ -Netzen und man erhält durch Kempe-Austausch eine Färbung  $\bar{\chi}'$  mit

$$\bar{\chi}'(x_3) = 3,$$

also den Fall 5 des 2. Zuges.



## Beweis: Birkhoff-Diamant 7/8

- Gehört die Ecke  $x_3$  auch zu  $C$ , so erhält man durch Kempe-Austausch eine Färbung  $\bar{\chi}'$  mit  $\bar{\chi}'(x_4) = 2$ , die sich in genau einer Weise auf ganz  $G$  fortsetzen lässt, nämlich durch

$$y_j \mapsto \begin{cases} 3, & j = 3 \\ 2, & j = 2 \\ 1, & j = 4 \\ 3, & j = 1 \end{cases}$$

- Die Ecke  $x_3$  gehört nicht zu  $C$ , aber die Ecke  $x_1$  liegt in  $C$ . Dann liegen  $x_1$  und  $x_3$  in verschiedenen  $(0, 3)$ -Netzen und man erhält durch Kempe-Austausch eine Färbung  $\bar{\chi}'$  mit

$$\bar{\chi}'(x_3) = 3,$$

also den Fall 5 des 2. Zuges.

## Beweis: Birkhoff-Diamant 8/8

- Die Ecken  $x_1$  und  $x_3$  gehören beide nicht zu  $C$ . Dan erhält man durch Kempe-Austausch eine Färbung  $\bar{\chi}'$  mit

$$\bar{\chi}'(x_5) = 3,$$

das heißt den Fall 1 des 2. Zuges und das Spiel ist beendet.

## Definition

- (i) Es sei  $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$ . Ein  $r$ -Tupel  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \{0, 1, 2, 3\}^r$  heißt **Randfärbung**(der Größe  $r$ ), wenn  $a_j \neq a_{j+1}$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$   $a_r \neq a_1$  gilt.
- (ii) Zwei Randfärbungen  $a$  und  $a'$  heißen **äquivalent**, wenn sie gleiche Größe  $r$  haben und sich nur um eine Permutation der Farben unterscheiden, das heißt, wenn es eine Bijektion  $\pi : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  gibt, derart dass  $a'_j = \pi(a_j)$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$  gilt.

## Definition

- (i) Es sei  $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$ . Ein  $r$ -Tupel  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \{0, 1, 2, 3\}^r$  heißt **Randfärbung**(der Größe  $r$ ), wenn  $a_j \neq a_{j+1}$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$   $a_r \neq a_1$  gilt.
- (ii) Zwei Randfärbungen  $a$  und  $a'$  heißen **äquivalent**, wenn sie gleiche Größe  $r$  haben und sich nur um eine Permutation der Farben unterscheiden, das heißt, wenn es eine Bijektion  $\pi : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  gibt, derart dass  $a'_j = \pi(a_j)$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$  gilt.
- (iii) Die Menge aller Randfärbungen der Größe  $r$  wird mit  $\Phi(r)$  bezeichnet.

## Definition

- (i) Es sei  $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$ . Ein  $r$ -Tupel  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \{0, 1, 2, 3\}^r$  heißt **Randfärbung**(der Größe  $r$ ), wenn  $a_j \neq a_{j+1}$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$   $a_r \neq a_1$  gilt.
- (ii) Zwei Randfärbungen  $a$  und  $a'$  heißen **äquivalent**, wenn sie gleiche Größe  $r$  haben und sich nur um eine Permutation der Farben unterscheiden, das heißt, wenn es eine Bijektion  $\pi : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  gibt, derart dass  $a'_j = \pi(a_j)$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$  gilt.
- (iii) Die Menge aller Randfärbungen der Größe  $r$  wird mit  $\Phi(r)$  bezeichnet.
- (iv) Eine Randfärbung heißt **wesentlich**, wenn sie in ihrer Äquivalenzklasse die kleinste ist.

## Definition

- (i) Es sei  $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$ . Ein  $r$ -Tupel  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \{0, 1, 2, 3\}^r$  heißt **Randfärbung**(der Größe  $r$ ), wenn  $a_j \neq a_{j+1}$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$   $a_r \neq a_1$  gilt.
- (ii) Zwei Randfärbungen  $a$  und  $a'$  heißen **äquivalent**, wenn sie gleiche Größe  $r$  haben und sich nur um eine Permutation der Farben unterscheiden, das heißt, wenn es eine Bijektion  $\pi : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  gibt, derart dass  $a'_j = \pi(a_j)$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$  gilt.
- (iii) Die Menge aller Randfärbungen der Größe  $r$  wird mit  $\Phi(r)$  bezeichnet.
- (iv) Eine Randfärbung heißt **wesentlich**, wenn sie in ihrer Äquivalenzklasse die kleinste ist.

Der erste Schritt im Test auf D-Reduzibilität besteht darin, die wesentlichen Randfärbungen der Konfiguration auf *Durchfärbbarkeit* zu prüfen.

Dabei ist zu beachten, dass die Menge  $\Phi(r)$  der Menge aller Randfärbungen der Größe  $r$  nur von der Ringgröße  $r$  der betrachteten Konfiguration  $C$  abhängt, während die Menge der von Anfang an guten Randfärbungen  $\Phi_0(C)$  durch die ganze Struktur von  $C$  bestimmt ist.

Der erste Schritt im Test auf D-Reduzibilität besteht darin, die wesentlichen Randfärbungen der Konfiguration auf *Durchfärbbarkeit* zu prüfen.

Dabei ist zu beachten, dass die Menge  $\Phi(r)$  der Menge aller Randfärbungen der Größe  $r$  nur von der Ringgröße  $r$  der betrachteten Konfiguration  $C$  abhängt, während die Menge der von Anfang an guten Randfärbungen  $\Phi_0(C)$  durch die ganze Struktur von  $C$  bestimmt ist.



Dazu wird dem Rechner die gesamte Konfiguration mitgeteilt, in der Form: Es seien  $w$  innere Ecken mit  $y_1, \dots, y_w$ , alle Ecken werden durchnummeriert, also

$$z_j = \begin{cases} x_j & \text{für } 1 \leq j \leq r \\ y_{j-r} & \text{für } r < j \leq r + w \end{cases}$$

und für die arithmetisch vollständige Beschreibung

$$\beta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } z_j \text{ und } z_k \text{ in } C \text{ durch eine Kante verbunden sind} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Beispiel: Birkhoff-Diamant

Für den Birkhoff-Diamanten sieht die Verbindungsmatrix folgendermaßen aus:

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0  |
| 2  | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0  |
| 3  | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0  |
| 4  | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1  |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1  |
| 6  | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0  |
| 7  | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1  |
| 8  | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1  |
| 9  | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1  |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0  |

Zur Prüfung der Durchfärbbarkeit werden **Färbungsmatrizen** aufgebaut. Dabei handelt es sich um  $4 \times (r + w)$ -Matrizen  $(v_{ij})$  mit  $v_{ij} \in \{0, 1\}$ , derart, dass in jeder Spalte eine 1 steht und für alle  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $j, k \in \{1, \dots, r + w\}$  gilt

$$v_{ij} = v_{ik} = 1 \Rightarrow \beta_{jk} = 0.$$

Die 4 Zeilen entsprechen den Farben, die Spalten werden den Ecken der Konfiguration zugeordnet. Eine Randfärbung legt die Einträge in den ersten  $r$  Spalten fest, Durchfärbbarkeit ist gegeben, wenn sich daraus eine vollständige Färbung aufbauen lässt

## Beispiel: Birkhoff-Diamant Fortsetzung

Für den Birkhoff Diamanten ergibt sich für die Färbung  
(0, 1, 2, 1, 3, 2) die folgende Färbungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Beispiel: Birkhoff-Diamant Fortsetzung

Insgesamt sind 16 Randfärbungen direkt durchfärbbar. Die Randfärbung  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$  ist nicht direkt durchfärbbar, wie die folgende Matrix zeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Konfiguration  $C$  sei in die Minimaltriangulation  $G$  eingebettet. Bei der D-Reduzibilität kommt es nicht auf die richtige Einbettung an.

Entfernt man aus  $G$  die inneren Ecken von  $C$  und die mit ihnen inzidierenden Kanten, so erhält man  $G'$ , der 4-färbbar ist. Jede Färbung von  $G'$  induziert eine Färbung von  $C$ . Auf das Innere von  $C$  kommt es nicht mehr an, daher werden gefärbte zusammenhängende Graphen  $G'$ , deren Gebiete alle bis auf eines von Dreiecken begrenzt wird, betrachtet.

Die Konfiguration  $C$  sei in die Minimaltriangulation  $G$  eingebettet. Bei der D-Reduzibilität kommt es nicht auf die richtige Einbettung an.

Entfernt man aus  $G$  die inneren Ecken von  $C$  und die mit ihnen inzidierenden Kanten, so erhält man  $G'$ , der 4-färbbar ist. Jede Färbung von  $G'$  induziert eine Färbung von  $C$ . Auf das Innere von  $C$  kommt es nicht mehr an, daher werden gefärbte zusammenhängende Graphen  $G'$ , deren Gebiete alle bis auf eines von Dreiecken begrenzt wird, betrachtet.

Die Ecken und Kanten des **Ausnahmegebietes** bilden die den Randkreis von  $G'$ . Sind  $x_1, \dots, x_r$  die Ecken des Randkreises in zyklischer Reihenfolge, so sind auch hier die Randfärbungen der Größe  $r$  mit den 4-Eckenfärbungen des Randkreises identifizierbar. Jede Kante, die nicht zum Randkreis gehört, gehört zum Rand von genau zwei Dreiecken.

Die Konfiguration  $C$  sei in die Minimaltriangulation  $G$  eingebettet. Bei der D-Reduzibilität kommt es nicht auf die richtige Einbettung an.

Entfernt man aus  $G$  die inneren Ecken von  $C$  und die mit ihnen inzidierenden Kanten, so erhält man  $G'$ , der 4-färbbar ist. Jede Färbung von  $G'$  induziert eine Färbung von  $C$ . Auf das Innere von  $C$  kommt es nicht mehr an, daher werden gefärbte zusammenhängende Graphen  $G'$ , deren Gebiete alle bis auf eines von Dreiecken begrenzt wird, betrachtet.

Die Ecken und Kanten des **Ausnahmegebietes** bilden die den Randkreis von  $G'$ . Sind  $x_1, \dots, x_r$  die Ecken des Randkreises in zyklischer Reihenfolge, so sind auch hier die Randfärbungen der Größe  $r$  mit den 4-Eckenfärbungen des Randkreises identifizierbar. Jede Kante, die nicht zum Randkreis gehört, gehört zum Rand von genau zwei Dreiecken.



## Definition

Unter der **Farbpaarwahl** versteht man die Wahl einer Farbe  $w \in \{1, 2, 3\}$ , die zu einer Zerlegung der Farbenmenge in die beiden Farbpaare  $\{0, w\}$  und  $\{1, 2, 3\} \setminus \{w\}$  und damit zu Kempe-Netzen in  $G'$  und im Randkreis von  $G'$  führt. Die Kempe-Netze im Randkreis werden **Kempe-Sektoren** genannt.

Die Eckenmenge eines Kempe-Sektors lässt sich immer zu einer Kette anordnen, die Anzahl ist entweder 1 oder gerade.

Dabei werden  $w$ -**Sektoren**, deren Ecken mit 0 oder  $w$  gefärbt sind und  $\hat{w}$ -**Sektoren**, mit Ecken der beiden übrigen Farben, unterscheiden. Verschiedene Kempe-Sektoren gleichen Typs können zum gleichen Kempe-Netz von  $G'$  gehören.

Die Eckenmenge eines Kempe-Sektors lässt sich immer zu einer Kette anordnen, die Anzahl ist entweder 1 oder gerade.

Dabei werden  $w$ -**Sektoren**, deren Ecken mit 0 oder  $w$  gefärbt sind und  $\hat{w}$ -**Sektoren**, mit Ecken der beiden übrigen Farben, unterscheiden. Verschiedene Kempe-Sektoren gleichen Typs können zum gleichen Kempe-Netz von  $G'$  gehören.

## Definition

*Eine Menge von Ecken des Randkreises nennt man **Block**, wenn sie zum gleichen Kempe-Netz von  $G'$  gehören und die übrigen Ecken dieses Kempe-Netzes nicht im Randkreis liegen.*

## Satz

*Gegeben sei eine Randfärbung  $a = (a_1, \dots, a_r)$  der Größe  $r$  und eine Farbpaarwahl  $w \in \{1, 2, 3\}$ . Eine Zerlegung der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$  in Blöcke  $B_1, \dots, B_s$  ist genau dann eine Blockzerlegung (bezüglich  $a$  und  $w$ ), wenn gilt:*

- 1 *Jeder Block ist Vereinigung von Kempe-Sektoren gleichen Typs.*

## Satz

Gegeben sei eine Randfärbung  $a = (a_1, \dots, a_r)$  der Größe  $r$  und eine Farbpaarwahl  $w \in \{1, 2, 3\}$ . Eine Zerlegung der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$  in Blöcke  $B_1, \dots, B_s$  ist genau dann eine Blockzerlegung (bezüglich  $a$  und  $w$ ), wenn gilt:

- 1 Jeder Block ist Vereinigung von Kempe-Sektoren gleichen Typs.
- 2 Blöcke trenne sich nicht gegenseitig, das heißt, für  $k_1, k_2 \in B_k, l_1, l_2 \in B_l, k \neq l$ , ist die Anordnung

$$k_1 < l_1 < k_2 < l_2$$

unmöglich.

## Satz

Gegeben sei eine Randfärbung  $a = (a_1, \dots, a_r)$  der Größe  $r$  und eine Farbpaarwahl  $w \in \{1, 2, 3\}$ . Eine Zerlegung der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$  in Blöcke  $B_1, \dots, B_s$  ist genau dann eine Blockzerlegung (bezüglich  $a$  und  $w$ ), wenn gilt:

- 1 Jeder Block ist Vereinigung von Kempe-Sektoren gleichen Typs.
- 2 Blöcke trenne sich nicht gegenseitig, das heißt, für  $k_1, k_2 \in B_k, l_1, l_2 \in B_l, k \neq l$ , ist die Anordnung

$$k_1 < l_1 < k_2 < l_2$$

unmöglich.

- 3 Stoßen zwei Blöcke an einer Stelle zusammen, so auch noch an genau einer zweiten.

## Satz

Gegeben sei eine Randfärbung  $a = (a_1, \dots, a_r)$  der Größe  $r$  und eine Farbpaarwahl  $w \in \{1, 2, 3\}$ . Eine Zerlegung der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$  in Blöcke  $B_1, \dots, B_s$  ist genau dann eine Blockzerlegung (bezüglich  $a$  und  $w$ ), wenn gilt:

- 1 Jeder Block ist Vereinigung von Kempe-Sektoren gleichen Typs.
- 2 Blöcke trenne sich nicht gegenseitig, das heißt, für  $k_1, k_2 \in B_k, l_1, l_2 \in B_l, k \neq l$ , ist die Anordnung

$$k_1 < l_1 < k_2 < l_2$$

unmöglich.

- 3 Stoßen zwei Blöcke an einer Stelle zusammen, so auch noch an genau einer zweiten.



D-Reduzibilität liegt vor, wenn man jede Randfärbung durch mehrfachen Kempe-Austausch in eine von Anfang an gute Färbung überführen kann.

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 1/4

Im Falle des Birkhoff-Diamanten ist die Randfärbung  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$  nicht direkt durchfärbbar. Die Farbpaarwahl  $w = 1$  bringt nichts. Man erhält nur einen Kempe-Sektor, der einzig mögliche Kempe-Austausch liefert die nicht wesentliche Randfärbung  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ , die zugehörige wesentliche Randfärbung ist die Ausgangsfärbung.

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 1/4

Im Falle des Birkhoff-Diamanten ist die Randfärbung  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$  nicht direkt durchfärbbar. Die Farbpaarwahl  $w = 1$  bringt nichts. Man erhält nur einen Kempe-Sektor, der einzig mögliche Kempe-Austausch liefert die nicht wesentliche Randfärbung  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ , die zugehörige wesentliche Randfärbung ist die Ausgangsfärbung.

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 2/4

Für  $w = 2$  enthalten die Kempe-Sektoren jeweils nur einen Index, es gibt 6 Kempe-Sektoren, also Block-Zerlegungen aus jeweils 4 Blöcken. Es gibt 5 mögliche Blockzerlegungen

| Nr. | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$  | $B_4$     |
|-----|-------|-------|--------|-----------|
| 1.  | {1}   | {3}   | {5}    | {2, 4, 6} |
| 2.  | {2}   | {4}   | {6}    | {1, 3, 5} |
| 3.  | {1}   | {4}   | {2, 6} | {3, 5}    |
| 4.  | {2}   | {5}   | {1, 3} | {4, 6}    |
| 5.  | {3}   | {6}   | {1, 5} | {2, 4}    |

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 3/4

Jede dieser Blockzerlegungen kann von außen aufgezwungen sein. Daher ist es notwendig zu prüfen, ob in jedem Fall ein Kempe-Austausch möglich ist.

- 1 Die erste Möglichkeit für einen Kempe-Austausch besteht darin, in  $b_1$  die Farbe 0 durch die Farbe 2 zu ersetzen. Dies ergibt die Randfärbung  $(0, 1, 2, 1, 2, 1)$ , diese ist von Anfang an gut.
- 2 Ersetzt man in  $B_1$  die Farbe 1 durch die Farb 3 erhält man  $(0, 3, 0, 1, 0, 1)$ , das heißt  $(0, 1, 0, 2, 0, 2)$ , welche von Anfang an gut ist.

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 3/4

Jede dieser Blockzerlegungen kann von außen aufgezwungen sein. Daher ist es notwendig zu prüfen, ob in jedem Fall ein Kempe-Austausch möglich ist.

- 1 Die erste Möglichkeit für einen Kempe-Austausch besteht darin, in  $b_1$  die Farbe 0 durch die Farbe 2 zu ersetzen. Dies ergibt die Randfärbung  $(0, 1, 2, 1, 2, 1)$ , diese ist von Anfang an gut.
- 2 Ersetzt man in  $B_1$  die Farbe 1 durch die Farb 3 erhält man  $(0, 3, 0, 1, 0, 1)$ , das heißt  $(0, 1, 0, 2, 0, 2)$ , welche von Anfang an gut ist.
- 3 analog zu 1.
- 4 analog zu 2.

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 3/4

Jede dieser Blockzerlegungen kann von außen aufgezwungen sein. Daher ist es notwendig zu prüfen, ob in jedem Fall ein Kempe-Austausch möglich ist.

- 1 Die erste Möglichkeit für einen Kempe-Austausch besteht darin, in  $b_1$  die Farbe 0 durch die Farbe 2 zu ersetzen. Dies ergibt die Randfärbung  $(0, 1, 2, 1, 2, 1)$ , diese ist von Anfang an gut.
- 2 Ersetzt man in  $B_1$  die Farbe 1 durch die Farb 3 erhält man  $(0, 3, 0, 1, 0, 1)$ , das heißt  $(0, 1, 0, 2, 0, 2)$ , welche von Anfang an gut ist.
- 3 analog zu 1.
- 4 analog zu 2.

## Beispiel: Birkhoff-Diamant 4/4

- ersetzt man in  $B_1$  die Farbe 0 durch 2, so ergibt sich die wesentliche Randfärbung  $(0, 1, 2, 1, 0, 1)$ , welche leider nicht direkt durchfärbbar ist. Ersetzt man in  $B_2$  die Farbe 1 durch die Farbe 3 führt dies auf  $(0, 1, 0, 1, 0, 2)$  mit der zugehörigen wesentlichen Randfärbung  $(0, 1, 0, 1, 0, 2)$ , wieder nicht direkt durchfärbbar. Färbt man allerdings  $B_1$  und  $B_2$  gleichzeitig liefert dies die wesentliche Randfärbung  $(0, 1, 2, 1, 0, 3)$ , welche von Anfang an gut ist.



## Definition

*Eine Randfärbung der Konfiguration  $C$  ist **gut von der Stufe 1**, wenn sie nicht von Anfang an gut ist, aber nach einer Farbpaarwahl jede Blockzerlegung einen Kempe-Austausch erlaubt, der sie in eine von Anfang an gute Randfärbung überführt.*

Beim Birkhoff-Diamanten sind die Randfärbungen  $(0, 1, 0, 1, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 0, 2, 3, 1)$ ,  $(0, 1, 2, 1, 0, 1)$  und  $(0, 1, 2, 3, 2, 3)$  gut von der Stufe 1.

## Definition

*Eine Randfärbung der Konfiguration  $C$  ist **gut von der Stufe 1**, wenn sie nicht von Anfang an gut ist, aber nach einer Farbpaarwahl jede Blockzerlegung einen Kempe-Austausch erlaubt, der sie in eine von Anfang an gute Randfärbung überführt.*

Beim Birkhoff-Diamanten sind die Randfärbungen  $(0, 1, 0, 1, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 0, 2, 3, 1)$ ,  $(0, 1, 2, 1, 0, 1)$  und  $(0, 1, 2, 3, 2, 3)$  gut von der Stufe 1.

## Definition

*Es seien  $a$  eine Randfärbung der Größe  $r$ ,  $w$  eine Farbwahl und  $B_1, \dots, B_s$  eine zugehörige Blockzerlegung. Die Randfärbung  $a$  wird durch Kempe-Austausch oder Umfärbung in die Randfärbung  $b$  **transformiert**, wenn  $b$  aus  $a$  dadurch entsteht, dass in gewissen  $w$ -Blöcken die Farben  $0$  und  $w$  und/oder  $\hat{w}$ -Blöcken die beiden anderen Farben ineinander vertauscht werden.*

## Definition

*Es sei  $\Phi$  eine Menge von Randfärbungen der Größe  $r$ . Eine Randfärbung  $a \in \Phi(r)$  heißt  **$\Phi$ -gut**, wenn sie nicht zu  $\Phi$  gehört, es aber eine Farbwahl gibt, derart dass zu jeder zugehörigen Blockzerlegung ein Kempe-Austausch existiert, der  $a$  in ein Element von  $\Phi$  transformiert.*

## Lemma

*Es sei  $\Phi$  eine bezüglich Äquivalenz abgeschlossene Menge von Randfärbungen fester Größe. Jede zu einer  $\Phi$ -guten Randfärbung äquivalente Randfärbung ist  $\Phi$ -gut.*

Der Dürre-Heesch-Algorithmus liefert also bei explizit gegebener, bezüglich Äquivalenz abgeschlossener Menge  $\Phi$  von Randfärbungen fester Größe ein Verfahren zur Feststellung der  $\Phi$ -Güte.

Ist  $C$  eine Konfiguration der Ringgröße  $r$ , so stimmen die Randfärbungen der Güteklasse 1 von  $C$  mit den  $\Phi_0(C)$ -guten Randfärbungen überein. Der Rest des Dürre-Heesch-Algorithmus besteht in einer wiederholten  $\phi$ -Güte-Bestimmung. Dadurch erhält man höhere Güteklassen, die induktiv sind.

Der Dürre-Heesch-Algorithmus liefert also bei explizit gegebener, bezüglich Äquivalenz abgeschlossener Menge  $\Phi$  von Randfärbungen fester Größe ein Verfahren zur Feststellung der  $\Phi$ -Güte.

Ist  $C$  eine Konfiguration der Ringgröße  $r$ , so stimmen die Randfärbungen der Güteklasse 1 von  $C$  mit den  $\Phi_0(C)$ -guten Randfärbungen überein. Der Rest des Dürre-Heesch-Algorithmus besteht in einer wiederholten  $\phi$ -Güte-Bestimmung. Dadurch erhält man höhere Güteklassen, die induktiv sind.

## Definition

*Es sei  $C$  eine Konfiguration und für  $n \in \mathbb{N}$  sei die Menge  $\Phi_n(C)$  von Randfärbungen der Güteklassen kleiner gleich  $n$  bereits bestimmt. Eine Randfärbung heißt **gut von der Stufe  $n + 1$** , wenn sie  $\Phi_n(C)$ -gut ist.*

Somit ergibt sich eine aufsteigende Kette von Randfärbungen  $\Phi_n(C)$ . Da die Menge  $\Phi(r)$  endlich ist, muss diese Kette irgendwann einmal stationär werden, das heißt, es muss einen Index  $n_0$  geben, derart dass keine Randfärbungen von der Güteklasse  $n_0 + 1$  existieren, man schreibt  $\bar{\Phi}(C)$  anstatt  $\Phi_{n_0}(C)$ .



## Definition

*Es sei  $C$  eine Konfiguration und für  $n \in \mathbb{N}$  sei die Menge  $\Phi_n(C)$  von Randfärbungen der Güteklassen kleiner gleich  $n$  bereits bestimmt. Eine Randfärbung heißt **gut von der Stufe  $n + 1$** , wenn sie  $\Phi_n(C)$ -gut ist.*

Somit ergibt sich eine aufsteigende Kette von Randfärbungen  $\Phi_n(C)$ . Da die Menge  $\Phi(r)$  endlich ist, muss diese Kette irgendwann einmal stationär werden, das heißt, es muss einen Index  $n_0$  geben, derart dass keine Randfärbungen von der Güteklasse  $n_0 + 1$  existieren, man schreibt  $\bar{\Phi}(C)$  anstatt  $\Phi_{n_0}(C)$ .

## Definition (D-Reduzibilität)

- 1 Gilt  $\overline{\Phi}(C) = \Phi(r)$ , das heißt, jede Randfärbung ist gut von irgendeiner Stufe, so ist die Konfiguration  $C$  **D-reduzibel**.
- 2  $\Phi_{n_0}$  ist eine echte Teilmenge von  $\Phi(r)$  und damit ist die Konfiguration  $C$  **D-reduzibel**.

## Definition (Reduzent)

*Es sei  $C$  eine Konfiguration mit den Außenecken  $x_1, \dots, x_r$  in zyklischer Anordnung. Ein Paar  $(S, \sigma)$ , bestehend aus einem Graphen  $S$  und einer surjektiven Abbildung  $\sigma$  von der Menge der Außenecken von  $C$  auf die Menge der Außenecken von  $S$  ist ein **Reduzent** für  $C$ , wenn  $S$  weniger Ecken hat als  $C$  und folgendes gilt:*

## Definition (Reduzent)

- 1  $\sigma$  erhält die Nachbarschaftsrelation, das heißt, für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$  sind  $\sigma(x_j)$  und  $\sigma(x_{j+1})$  benachbart, insbesondere verschieden,
- 2 Urbilder verschiedener Außenecken von  $S$  bezüglich  $\sigma$  trennen sich nicht gegenseitig, das heißt, für  $j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{1, \dots, r\}$  mit

$$\sigma(x_{j_1}) = \sigma(x_{j_2}) \neq \sigma(x_{k_1}) = \sigma(x_{k_2})$$

ist die Anordnung

$$j_1 < k_1 < j_2 < k_2$$

unmöglich.

### Definition ( $\sigma$ -verträglich)

*Eine Randfärbung von  $C$  ist  $\sigma$ -**verträglich**, wenn sie von der Form  $\chi \circ \sigma$  mit  $\chi \in \Psi(S)$  ist. Die Menge der  $\sigma$ -verträglichen Randfärbungen von  $C$  wird mit  $\Phi(r, \sigma)$  bezeichnet.*

## Definition

Es seien  $C$  eine Konfiguration und  $(S, \sigma)$  ein Reduzent für  $C$ , derart dass  $C$  in eine Minimaltriangulation nur  $\sigma$ -richtig eingebettet werden kann. Die Konfiguration  $C$  ist

- **B-reduzibel**, wenn jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung entweder von Anfang an gut oder gut von der Stufe 1 ist, das heißt, wenn gilt:

$$\Phi(r, \sigma) \subset \Phi_1(C),$$

- **C-reduzibel**, wenn jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung gut von irgendeiner Stufe ist, das heißt, wenn gilt:

$$\Phi(r, \sigma) \subset \hat{\Phi}(C).$$

## Definition

*Es seien  $C$  eine Konfiguration und  $(S, \sigma)$  ein Reduzent für  $C$ , derart dass  $C$  in eine Minimaltriangulation nur  $\sigma$ -richtig eingebettet werden kann. Die Konfiguration  $C$  ist*

- **B-reduzibel**, wenn jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung entweder von Anfang an gut oder gut von der Stufe 1 ist, das heißt, wenn gilt:

$$\Phi(r, \sigma) \subset \Phi_1(C),$$

- **C-reduzibel**, wenn jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung gut von irgendeiner Stufe ist, das heißt, wenn gilt:

$$\Phi(r, \sigma) \subset \hat{\Phi}(C).$$

Eine Konfiguration, deren innere Ecken sämtlich mindestens den Grad 3 aufweisen hat bisher allen Reduzibilitätsversuchen getrotzt, wenn eine der folgenden Strukturen darin wesentlich auftritt (**Heesche-Hindernisse**):

- 1 eine innere Ecke mit mehr als drei Beinen



Eine Konfiguration, deren innere Ecken sämtlich mindestens den Grad 3 aufweisen hat bisher allen Reduzibilitätsversuchen getrotzt, wenn eine der folgenden Strukturen darin wesentlich auftritt (**Heesche-Hindernisse**):

- 1 eine innere Ecke mit mehr als drei Beinen
- 2 eine Artikulation mit mehr als zwei Beinen

Eine Konfiguration, deren innere Ecken sämtlich mindestens den Grad 3 aufweisen hat bisher allen Reduzibilitätsversuchen getrotzt, wenn eine der folgenden Strukturen darin wesentlich auftritt (**Heesche-Hindernisse**):

- 1 eine innere Ecke mit mehr als drei Beinen
- 2 eine Artikulation mit mehr als zwei Beinen
- 3 ein **hängendes** 5-Paar, das heißt, zwei benachbarte innere 5-Ecken, die noch genau zu einer weiteren inneren Ecke benachbart sind und zwar zu derselben; die zu einem hängenden 5-Paar gehörenden Ecken haben jeweils genau drei Beine.

Eine Konfiguration, deren innere Ecken sämtlich mindestens den Grad 3 aufweisen hat bisher allen Reduzibilitätsversuchen getrotzt, wenn eine der folgenden Strukturen darin wesentlich auftritt (**Heesche-Hindernisse**):

- ① eine innere Ecke mit mehr als drei Beinen
- ② eine Artikulation mit mehr als zwei Beinen
- ③ ein **hängendes** 5-Paar, das heißt, zwei benachbarte innere 5-Ecken, die noch genau zu einer weiteren inneren Ecke benachbart sind und zwar zu derselben; die zu einem hängenden 5-Paar gehörenden Ecken haben jeweils genau drei Beine.

## Definition

*Ein Hindernis tritt in einer Konfiguration **wesentlich** auf, wenn sie nicht aus einer reduzierten Konfiguration durch Erweiterung um diese und eventuell weitere Hindernisse gewonnen werden kann.*

## Faustregel

*Eine Konfiguration der Ringgröße  $n$  mit  $m$  inneren Ecken, aber ohne Hindernisse, ist mit großer Wahrscheinlichkeit reduzierbar, wenn gilt*

$$m > \frac{3n}{2} - 6$$

## Definition

*Ein Hindernis tritt in einer Konfiguration **wesentlich** auf, wenn sie nicht aus einer reduzierten Konfiguration durch Erweiterung um diese und eventuell weitere Hindernisse gewonnen werden kann.*

## Faustregel

*Eine Konfiguration der Ringgröße  $n$  mit  $m$  inneren Ecken, aber ohne Hindernisse, ist mit großer Wahrscheinlichkeit reduzierbar, wenn gilt*

$$m > \frac{3n}{2} - 6$$

Beim 4-Stern ist  $m = 1, n = 4$  und  $\frac{3n}{2} - 6 = 0 < m$ .

Beim  $k$ -Stern,  $k \geq 5$  ist  $m = 1, n = k$  und  $\frac{3n}{2} - 6 \geq \frac{3}{2} > m$ .

Beim 4-Stern ist  $m = 1, n = 4$  und  $\frac{3n}{2} - 6 = 0 < m$ .

Beim  $k$ -Stern,  $k \geq 5$  ist  $m = 1, n = k$  und  $\frac{3n}{2} - 6 \geq \frac{3}{2} > m$ .

Beim Birkhoff-Diamanten ist  $m = 4, n = 6$  und  $\frac{3n}{2} - 6 = 3 < m$ .

Beim 4-Stern ist  $m = 1, n = 4$  und  $\frac{3n}{2} - 6 = 0 < m$ .

Beim  $k$ -Stern,  $k \geq 5$  ist  $m = 1, n = k$  und  $\frac{3n}{2} - 6 \geq \frac{3}{2} > m$ .

Beim Birkhoff-Diamanten ist  $m = 4, n = 6$  und  $\frac{3n}{2} - 6 = 3 < m$ .



Ein weiteres Hindernis ist die Ringgröße.

Dabei geht es um die Rechenzeit, so vervierfacht sich die Rechenzeit und der Speicherbedarf bei einer Erhöhung der Ringgröße um 1. Daher sollte man unvermeidbare Mengen von von Konfigurationen mit beschränkter Ringgröße suchen.

Ein weiteres Hindernis ist die Ringgröße.

Dabei geht es um die Rechenzeit, so vervierfacht sich die Rechenzeit und der Speicherbedarf bei einer Erhöhung der Ringgröße um 1. Daher sollte man unvermeidbare Mengen von von Konfigurationen mit beschränkter Ringgröße suchen.

Andererseits erhöht eine Zunahme der Ringgröße die Wahrscheinlichkeit der Reduzibilität. Geht man nämlich zu einer Konfiguration über, deren Inneres gerade die gegebene Konfiguration ist, so wächst nach obiger Ungleichung die Ringgröße linear, die Zahl der inneren Ecken aber quadratisch.

Ein weiteres Hindernis ist die Ringgröße.

Dabei geht es um die Rechenzeit, so vervierfacht sich die Rechenzeit und der Speicherbedarf bei einer Erhöhung der Ringgröße um 1. Daher sollte man unvermeidbare Mengen von von Konfigurationen mit beschränkter Ringgröße suchen.

Andererseits erhöht eine Zunahme der Ringgröße die Wahrscheinlichkeit der Reduzibilität. Geht man nämlich zu einer Konfiguration über, deren Inneres gerade die gegebene Konfiguration ist, so wächst nach obiger Ungleichung die Ringgröße linear, die Zahl der inneren Ecken aber quadratisch.

Daher ist immer ein Tradeoff zwischen Rechenzeit und Heescher Faustregel durchzuführen. Tatsächlich enthält die unvermeidbare Menge von Appel und Haken aus 1834 reduzierbaren Konfigurationen nur Elemente einer Ringgröße kleiner gleich 14.

Ein weiteres Hindernis ist die Ringgröße.

Dabei geht es um die Rechenzeit, so vervierfacht sich die Rechenzeit und der Speicherbedarf bei einer Erhöhung der Ringgröße um 1. Daher sollte man unvermeidbare Mengen von von Konfigurationen mit beschränkter Ringgröße suchen.

Andererseits erhöht eine Zunahme der Ringgröße die Wahrscheinlichkeit der Reduzibilität. Geht man nämlich zu einer Konfiguration über, deren Inneres gerade die gegebene Konfiguration ist, so wächst nach obiger Ungleichung die Ringgröße linear, die Zahl der inneren Ecken aber quadratisch.

Daher ist immer ein Tradeoff zwischen Rechenzeit und Heescher Faustregel durchzuführen. Tatsächlich enthält die unvermeidbare Menge von Appel und Haken aus 1834 reduzierbaren Konfigurationen nur Elemente einer Ringgröße kleiner gleich 14.

Wegen (3.15) und den noch zu betrachtenden Fällen, also normale Graphen ohne Ecken mit einem Grad kleiner als 5 folgt:

$$v_5 - v_7 - 2v_8 - \dots - (s - 6)v_s = 12,$$

wobei  $s$  das Maximum der vorkommenden Grade von Ecken bezeichnet.

Zu Beginn wird jeder Ecke die Ladung  $60 \cdot (6 - \text{Grad der Ecke})$  zugeordnet. Die Gesamtladung des Systems entspricht nach obigem Ausdruck  $+720$ , wobei jedoch nur die 5-Ecken positiv geladen sind. Nun werden Ladungen verschoben, so dass die 5-Ecken positive Ladungen abgeben. Dabei wird die Gesamtladung nicht verändert, weshalb auch nach Entladung positiv geladene Ecken vorhanden sein müssen, voraus auf die Existenz unvermeidbarer Mengen geschlossen werden kann.

Wegen (3.15) und den noch zu betrachtenden Fällen, also normale Graphen ohne Ecken mit einem Grad kleiner als 5 folgt:

$$v_5 - v_7 - 2v_8 - \dots - (s - 6)v_s = 12,$$

wobei  $s$  das Maximum der vorkommenden Grade von Ecken bezeichnet.

Zu Beginn wird jeder Ecke die Ladung  $60 \cdot (6 - \text{Grad der Ecke})$  zugeordnet. Die Gesamtladung des Systems entspricht nach obigem Ausdruck  $+720$ , wobei jedoch nur die 5-Ecken positiv geladen sind. Nun werden Ladungen verschoben, so dass die 5-Ecken positive Ladungen abgeben. Dabei wird die Gesamtladung nicht verändert, weshalb auch nach Entladung positiv geladene Ecken vorhanden sein müssen, voraus auf die Existenz unvermeidbarer Mengen geschlossen werden kann.

## Satz

*Die Menge  $U_1$ , bestehend aus einer 5-5-Kette und einer 5-6-Kette, bildet eine unvermeidbare Menge.*

**Beweis.** Wenn  $G$  keine keine Konfigurationen in  $U_1$  hat, dann haben alle Nachbarn von Ecken mit Grad 5 einen Grad  $\geq 7$ . Die Ecken mit Grad 5 geben ihre Ladung vollkommen ab. Wenn  $v$  eine Ecke mit Grad  $k \geq 7$ , dann können nicht zwei aufeinanderfolgende Nachbarn von  $v$  Grad 5 haben, also hat  $v$  höchstens  $\frac{1}{2}k$  Nachbarn mit Grad 5, erhält also maximal die Ladung  $6k$ . Weil es aber mit einer Ladung von  $(6 - k) \cdot 60$  gestartet ist, folgt

$$(6 - k) \cdot 60 + 6k \leq (6 - 7) \cdot 60 + 6 \cdot 7 < 0.$$

Also ist die Ladung von  $G$  negativ im Widerspruch zur Voraussetzung. □



## Satz

*Die Menge  $U_2$ , bestehend aus einer 5-5-Kette und einer 6-5-6-Kette bildet eine unvermeidbare Menge.*

**Beweis.** Angenommen  $G$  ist ein triangulierter Graph mit kleinstem Grad 5 und  $G$  enthält keine der Konfigurationen aus  $U_2$ . Es folgt, dass keine Ecke vom Grad 5 einen Nachbarn vom Grad 5 oder zwei benachbarte Ecken vom Grad 6. Deshalb hat jede Ecke vom Grad 5 mindestens 3 benachbarte Ecken vom Grad 7. Die Ecken vom Grad 5 werden also vollständig entladen. Die Ecken vom Grad 7 haben höchstens drei Nachbarn vom Grad 5, enden also mit einer Ladung von  $(6 - 7) \cdot 60 + 3 \cdot 20 = 0$ . Gleichzeitig haben aber alle Ecken mit Grad  $k \geq 8$  eine maximale Ladung von

$$(6 - k) \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot k = 360 - 50k \geq 360 - 50 \cdot 8 < 0.$$



Um eine genauere Abschätzung der Größenordnung möglicher unvermeidbarer Mengen reduzierbarer Konfigurationen zu erhalten sucht man zunächst unvermeidbare Mengen, bestehend aus Konfigurationen, die geographisch gut sind.

### Definition

*Eine Konfiguration heißt **geographisch gut**, wenn keine Ecke drei Beine besitzt, deren zweite Ecken sich nicht zu einer Kette anordnen lassen.*

Um eine genauere Abschätzung der Größenordnung möglicher unvermeidbarer Mengen reduzierbarer Konfigurationen zu erhalten sucht man zunächst unvermeidbare Mengen, bestehend aus Konfigurationen, die geographisch gut sind.

### Definition

*Eine Konfiguration heißt **geographisch gut**, wenn keine Ecke drei Beine besitzt, deren zweite Ecken sich nicht zu einer Kette anordnen lassen.*

-  Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour and Robin Thomas, *"A NEW PROOF OF THE FOUR COLOUR THEOREM"*, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, August 1996
-  Robert A. Wilson, *"GRAPHS, COLOURINGS AND THE FOUR-COLOUR THEOREM"*, OXFORD University Press, Oxford, 2002
-  Reinhard Diestel, *"Graphentheorie"*, Springer Verlag, Berlin, 2006
-  Rudolf und Gerda Fritsch, *"Der Vierfarbensatz"*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994
-  <http://de.wikipedia.org/wiki/Vier-Farben-Satz>