Seminar Partielle Differentialgleichungen **28.11.2008**
Carsten Erdmann

Die Theorie der H^p-Räume auf Röhren

1 Einführendes

Definition 1.1. *Unter dem Hardy-Raum* $H^p = H^p(\mathbb{R}_2^+)$ *auf* $\mathbb{R}_+^2$ *verstehen wir die Klasse aller holomorphen Funktionen, die*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dx \leq A^p < \infty, \quad y > 0, \quad A < \infty. \tag{1}$$

genügen. Besser bekannt sind die übereinstimmenden H^p *-Räume verbunden mit der Einheitsscheibe* $D = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| < 1\}$ *. Diese bestehen aus den analytischen Funktionen F, für die*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\Theta})| d\Theta \leq A^p < \infty \quad 0 \leq r < 1$$

gilt.

Definition 1.2. *Sei* B *eine offene Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *, dann verstehen wir unter der* ***Röhre*** T_B *, mit Basis* B *die Teilmenge aller* $z = (z_1, ..., z_n) = (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n) = x + iy \in \mathbb{C}_n$ *für die* $y \in B$ *. Eine holomorphe Funktion auf der Röhre* T_B *gehört genau dann zu dem Raum* $H^p = H^p(T_B), p > 0$ *, wenn* $\exists A < \infty$ *so dass*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx \leq A^p, \quad \forall y \in B.$$

Ein anderer Ansatz beruht auf der Tatsache, dass eine Funktion $F = u + iv$ genau dann in einem einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch ist, wenn (v, u) der Gradient einer harmonischen Funktion in dieser Region ist. Sei $F = (u_1, ..., u_n)$ eine vektorwertige Funktion, die in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. F ist genau dann analytisch, wenn für seine partiellen Ableitungen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, ..., n$$

gilt. Wir halten fest, dass die zweite Bedingung fordert, dass F in einem einfach zusammenhängenden Gebiet von D, der Gradient einer Funktion h ist und die erste, dass h harmonisch ist. Wohlgemerkt stehen für $n = 2$ oben nichts anderes als die Cauchy-Riemann'schen Gleichungen, in diesem Fall ist $u_2 + iu_1$ eine analytische Funktion von $z = x_1 + ix_2$.

Beispiel.
Im Folgenden sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Wir konstruieren eine Funktion $F \in H^2(T_B)$. Dazu sei f eine Funktion, für die

$$\sup_{y \in B} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \leq A^2 < \infty \tag{2}$$

gilt. Wir zeigen, dass wenn y auf einer kompakten Teilmenge von B beschränkt ist, eine integrierbare Funktion existiert, die $|e^{2\pi iz\cdot t}f(t)| = e^{-2\pi y\cdot t}|f(t)|$ majorisiert. Dann ist

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi iz\cdot t}f(t)dt \tag{3}$$

eine holomorphe Funktion in T_B. Sei $y_0 \in B$ beliebig, weil B offen, existiert eine Umgebung $N \subset B$ von y_0. Für alle $y \in N$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0 t} e^{-4\pi(y-y_0)t} dt \leq A^2.$$

Zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ in eine endliche Menge von disjunkten vieleckigen Kegeln $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ mit Spitze im Nullpunkt und wenn immer 2 Punkte, v und w zu einem dieser Kegel gehören, dann ist der Winkel zwischen den beiden Segmenten $0v$ und $0w$ kleiner als $\pi/4$. Weil N eine Umgebung von y_0 ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $\{y : |y - y_0| = \delta\} \subset N$. Sei $\epsilon = 4\pi\delta/\sqrt{2}$ und y so dass $(y_0 - y) \in \Gamma_j$ und $|y - y_0| = \delta$, dann ist $\epsilon|t| \leq -4\pi(y - y_0)\cdot t$ für alle $t \in \Gamma_j$. Es folgt

$$\int_{\Gamma_j} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} e^{\epsilon|t|} dt \leq \int_{\Gamma_j} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} e^{-4\pi(y-y_0)\cdot t} dt \leq A^2$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} e^{\epsilon|t|} dt = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} e^{\epsilon|t|} dt \leq kA^2 < \infty.$$

Also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| e^{-2\pi y_0\cdot t} e^{(\epsilon/4)|t|} dt &= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(t)| e^{(\epsilon/2)|t|} e^{-2\pi y_0\cdot t}) e^{-(\epsilon/4)|t|} dt \\ &\leq (\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{\epsilon|t|} e^{-4\pi y_0\cdot t} dt)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\epsilon/2)|t|} dt)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Weil y in einer Umgebung mit Radius $\epsilon/8\pi$ um y_0 liegt, ergibt sich

$$|f(t)|e^{-2\pi y\cdot t} \leq |f(t)|e^{-2\pi y_0\cdot t} e^{(\epsilon/4)|t|},$$

also eine integrierbare Funktion. Eine Anwendung des Satzes von Plancherel für $y \in B$ liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y\cdot t} dt \leq A^2 < \infty.$$

2 H^p-Theorie

Satz 2.1. *$F \in H^2(T_B)$ genau dann, wenn F die Form (3) hat und f (2) erfüllt.*

Definition 2.2. *Für $B \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit B^c die **konvexe Hülle** von B. B^c ist die kleinste konvexe Menge, die B enthält.*

Korollar 2.3. *Wenn $F \in H^2(T_B)$ dann ist das Integral in (3) für alle $z \in T_{B^c}$ wohldefiniert und stellt eine Funktion in $H^2(T_{B^c})$ mit der selben Norm wie F dar.*

Beweis. Als erstes halten wir fest, dass der Satz von Plancherel zusammen mit Satz 2.1 impliziert, dass

$$\|F\|_2 = \sup_{y \in B}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Sei

$$S = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \le \|F\|_2^2 \right\},$$

dann ist $B \subset S$ und es bleibt zu zeigen, dass S konvex ist. Nehmen wir dafür an, dass $y', y'' \in S$ mit $y = \alpha y' + (1-\alpha) y''$, $0 \le \alpha \le 1$. Unter Ausnutzung der Ungleichung $u^\alpha v^{1-\alpha} \le \alpha u + (1-\alpha) v$ (gültig für alle nichtnegativen Zahlen u, v) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi \alpha y' \cdot t} e^{-4\pi(1-\alpha) y'' \cdot t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(t)|^2 e^{-4\pi y' \cdot t})^\alpha (|f(t)|^2 e^{-4\pi y'' \cdot t})^{1-\alpha} dt \\
&\le \alpha \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y' \cdot t} dt + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y'' \cdot t} dt \\
&\le \|F\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Somit $y \in S$ und S konvex. □

Im Folgenden sei die Basis B konvex und offen.

Korollar 2.4. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $H^2(T_B)$ eine Funktion ungleich Null enthält ist, dass keine komplette Gerade in B liegt.*

Beweis. Angenommen B enthält eine Gerade, die alle Punkte y enthält, für die $y = \alpha\tau + b, -\infty < \tau < \infty$ gilt. Weiterhin sei $N(t_0)$ die sphärische Umgebung im $\mathbb{R}^n$ von t_0, so dass $a \cdot t$ außerhalb von 0 begrenzt ist. Dann gilt für y auf dieser Linie, dass $F \in H^2(T_B)$ und f erfüllt (2) und (3). Es gilt

$$\|F\|_2^2 \ge \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \ge \int_{N(t_0)} |f(t)|^2 e^{-4\pi t(\alpha \cdot t)} e^{-4\pi(b \cdot t)} dt.$$

Aber weil $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig, können wir $e^{-4\pi\tau(\alpha \cdot t)}$ so groß in $N(t_0)$ machen, wie wir wollen. Also $f(t) = 0$ für fast alle $t \in N(t_0)$.
Um zu sehen, dass wenn B keine Linie enthält und $H^2(T_B)$ dann eine Funktion $F \ne 0$ enthält, nehmen wir an, dass solch eine Menge B die Existenz eines offenen konvexen Kegels, Γ impliziert. Wobei Γ keine Gerade, aber B enthält. Es folgt, dass Γ regulär ist und für solche Kegel $H^2(T_\Gamma)$ ein $F \ne 0$ enthält. □

Wenn y_0 ein Randpunkt von B ist, eröffnet sich die Frage, ob der Grenzwert

$$F(x+iy_0) = \lim_{y \to y_0, y \in B} F(x+iy) \tag{5}$$

existiert und wenn ja, in welchem Sinn?

Als erstes halten wir fest, dass wenn y_0 ein Randpunkt von B ist, dass (wegen (4) und Fatou's Lemma)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0 \cdot t} dt \leq \|F\|_2^2 .$$

Weil $f(t)e^{-2\pi y_0 \cdot t}$ eine Funktion in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, können wir die Definition des Integrals in (3) ausweiten zu $z = x + iy_0$, indem wir die inverse Fouriertransformation benutzen. Wir erhalten also

$$F(x+iy_0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x+ty_0)\cdot t} f(t) dt. \tag{6}$$

In diesem Sinne kann man indem die Fouriertransformierte einer Funktion $F_y = F(\cdot + iy)$ nimmt, dann zum Limes übergeht und die inverse Fouriertransformierte nimmt, eine Antwort auf die Frage gegeben werden.

Beispiel. Man könnte also annehmen, dass wie im Eindimensionalen, dass $F(x+iy) \to F(x+iy_0)$ falls $y \to y_0, y \in B$, entweder bzgl. der L^2-Norm oder für fast alle x. Jedoch ist dies im Allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei l eine Linie im $\mathbb{R}^2$ mit der Form $y \cdot a = \beta$ (wobei a ein fester Vektor und $\beta \in \mathbb{R}$) und y_1 ein Punkt, der nicht auf dieser Linie liegt. Durch diese Linie wird der $\mathbb{R}^2$ in 2 disjunkte Halbräume geteilt. Nehmen wir weiterhin an, dass y_1 in demjenigen Halbraum ist, für den $y \cdot a > \beta$ gilt. Dann gilt, dass die Funktion von 2 komplexen Variablen $z = (z_1, z_2) = (x+iy)$ definiert durch $G(z) = \exp(-i\rho(z \cdot a - i\beta)), \rho > 0$, $|G(z)| = \exp(\rho(y \cdot a - \beta))$ erfüllt. Diese ist 1 für $y \in l$, kleiner 1 im Halbraum, welcher nicht y_1 enthält und gleich einer Zahl $N > 1$, wenn $y = y_1$. Dieses N kann natürlich so groß gemacht werden, wie man will, indem man ρ groß genug wählt. Weiterhin gilt, dass $|G(z)| \leq N$, wenn $z = x + iy$ der Bedingung $(y_1 - y) \cdot a \geq 0$ genügt.
Nehmen wir jetzt an, dass B eine Scheibe im $\mathbb{R}^2$ ist mit 0 als Grenzpunkt und in der oberen Halbebene liegend. Wir wählen eine Folge $\{y_k\}$ auf dem Rand von B mit $y_k \to 0$. Weiterhin sei $\{\sigma_k\}$ eine Folge von Sektoren von B, jeder von diesen besteht aus einem Gebiet zwischen einer Linie l_k, welche beide Ränder von B von beiden Seiten von y_k schneidet, und dem Bogen auf dem Rand, welcher y_k enthält. Weiterhin nehmen wir an, dass die l_k's so nahe an den den y_k's liegen, dass die σ_k's paarweise disjunkt sind und l_k parallel zu der Tangente in y_k ist. Nun können wir für jedes k eine Funktion G_k konstruieren, für die gilt dass

(i) G_k ist analytisch in $\mathbb{C}_2$

(ii) $|G_k(x+iy)|$ hängt lediglich von y ab

(iii) $|G_k(z)| \leq 1$ wenn $z \in T_B \backslash T_{\sigma_k}$

(iv) $|G_k(x+iy_k)| = 1 + 2^{k+2} = N_k$ und für $z \in T_{\sigma_k} : |G_k(z)| \leq N_k$.

Weiterhin definieren wir eine Funktion F durch

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}G_k(z).$$

Falls $z\in T_B$, dann gehört es entweder zu genau einer Röhre $T_{\sigma_{k_0}}$ oder zu keiner. Für den ersten Fall ergibt sich wegen (iii) und (iv)

$$|F(z)|\leq\sum_{k=1}^{k_0-1}2^{-k}+(2^{-k_0}+4)+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^{-k}=5,$$

und im zweiten Fall ergibt sich

$$|F(z)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1.$$

Also auf alle Fälle $F\in H^{\infty}(T_B)$. Wegen (ii) und (iv) können wir Punkte $y'_k\in\sigma_k$ finden, die so nahe an y_k sind, dass $|G_k(x+iy'_k)|>N_k-1$, $k=1,2,....$ Also

$$\begin{aligned}|F(x+iy'_k)| &\geq 2^{-k}|G_k(x+iy'_k)|-\sum_{j\neq k}2^{-j}|G_k(x+iy'_k)|\\ &> 2^{-k}(N_k-1)-\sum_{j\neq k}2^{-j}\\ &> 4-1=3.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass wenn wir den Grenzpunkt 0 mit einer Folge erreichen, die alle Sektoren σ_k umgeht, dass dann $|F(x+iy)|\leq 1$ für alle y in dieser Folge. Andererseits $\lim_{k\to\infty}y'_k=0$ und $|F(x+iy'_k)|>3$. Dies zeigt, dass der punktweise Limes

$$\lim_{y\in B,y\to 0}F(x+iy)$$

nicht für jedes $x\in\mathbb{R}^2$ existieren kann.
Um ein Beispiel für eine Funktion im $H^2(T_B)$, welche keinen Limes bzgl. der L^2-Norm hat, genügt es eine Funktion $G\in H^2(T_{B'})$, wobei $\overline{B}\subset B'$, sodass $G(x+i0)=G(x)\neq 0$, zu finden und diese dann mit F zu multiplizieren. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x+iy)G(x+iy)|^2dx\geq 9\int_{\mathbb{R}^n}|G(x+iy)|^2dx$$

für $y=y'_k$, $k=1,2,....$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x+iy)G(x+iy)|^2dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}|G(x+iy)|^2dx$$

wenn $y\in B$ und $y\notin\sigma_k, k=1,2,....$. Daher kann

$$\lim_{y\in B,y\to 0}F(x+iy)G(x+iy)$$

nicht in der L^2-Norm existieren. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist

$$G(z)=\frac{1}{(z_1+i)(z_2+i)}\qquad z=(z_1,z_2)=(x_1+iy_1,x_2+iy_2),\quad y_1,y_2>-\frac{1}{2}.$$

Sie ist definiert und analytisch in $T_{B'}$ mit $\overline{B} \subset B'$ und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |G(x+iy)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_1+i(y_1+1)|^2|x_2+i(y_2+1)|^2} dx_1 dx_2 \\ &\leq \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{4}} dx\right\}^2 < \infty.\end{aligned}$$

Also $G \in H^2(T_{B'})$.

Definition 2.5. *Ein offenes Vieleck im $\mathbb{R}^n$ ist das Innere der konvexen Hülle einer endlichen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.*

Korollar 2.6. *Sei P ein offenes Vieleck in $\mathbb{R}^n$ und $F \in H^2(T_P)$. Wenn wir die Definition von F zu der Menge $T_{\overline{P}}$ wie in (6) erweitern, dann ist die Abbildung $y \to F(x+iy)$, von $\overline{P}$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$, stetig.*

Beweis. Es genügt, aufgrund des Satzes von Plancherel zu zeigen, dass $y \to f(t)e^{-2\pi y\cdot t}$ stetig ist. Angenommen $\overline{P}$ ist die konvexe Hülle der endlichen Menge $\{y_1, ..., y_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$G(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{-4\pi y_j\cdot t}|f(t)|^2$$

integrierbar in $\mathbb{R}^n$. Außerdem ist G die Majorante für $e^{-4\pi y\cdot t}|f(t)|^2$ für alle $y \in \overline{P}$. Sei $y \in \overline{P}$, mit $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_k y_k, \alpha_j \geq 0, j = 1, ..., k$ und $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$. Es folgt

$$e^{-4\pi y\cdot t} = \exp\left\{-4\pi \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (y_j \cdot t)\right\} = \prod_{j=1}^{k} (e^{-4\pi(y_j\cdot t)})^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{-4\pi y_j\cdot t}$$

Für $y, \overline{y} \in \overline{P}, y \to \overline{y}$, ergibt sich

$$|f(t)e^{-2\pi y\cdot t} - f(t)e^{-2\pi \overline{y}\cdot t}|^2 \to 0.$$

Diese Konvergenz kann man durch $4G(t)$ abschätzen. Die Behauptung folgt durch Anwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz. □

Korollar 2.7. *Sei B eine offene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und y_0 ein Punkt auf seinem Abschluss. Weiterhin sei $F \in H^2(T_B)$ und P ein offenes Vieleck, welches in B enthalten ist, mit y_0 als Grenzpunkt. Dann folgt aus $y \to y_0$ in P , dass $F(x+iy) \to F(x+iy_0)$ bzgl. der L^2 -Norm, wobei $F(x+iy_0)$ wie in (6) definiert ist.*

Beweis. Weil $H^2(T_B) \subset H^2(T_P)$ ist dies ein Spezialfall des Korollars 2.6. □

Satz 2.8. *Sei B eine offene konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $y_0 \in \partial B$. Dann existiert*

$$\lim_{y\to y_0, y\in B} F(x+iy) = F(x+iy_0)$$

in L^2 für jedes $F \in H^2(T_B)$ genau dann, wenn y_0 ein vieleckiger Randpunkt von B ist.

Bemerkung:

Wenn der Limes in (5) existiert, dann bezeichnen wir ihn als **unbeschränkten Limes**. Wenn ein solcher Limes immer dann exisiert, wenn $y \to y_0$ innerhalb eines Vielecks in B, wobei y_0 ein Randpunkt ist, dann sagen wir dass der **beschränkte Limes** in y_0 existiert. In diesem Sinne behauptet Korollar (2.7), dass L^2-begrenzte Limiten an allen Randpunkten für alle H^2-Funktionen existieren. Währenddessen Satz (2.8) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von L^2-unbeschränkten Limiten angibt (für $n = 2$).

Lemma 2.9. *Sei $F \in H^p(T_B), p > 0$ und $B_0 \subset B$, sodass $d(B_0, \partial B) = \inf\{|y_1 - y_2| : y_1 \in B_0, y_2 \notin B\} \geq \epsilon > 0$, dann existiert eine Konstante $C = C(\epsilon, n)$, sodass*

$$\sup_{z \in T_{B_0}} |F(z)| \leq C \|F\|_p .$$

Beweis. Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in T_{B_0}$ und $S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - z_0| < \epsilon\}$. Wenn $\sum_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| < \epsilon\}$ dann ist $S_\epsilon \subset T_{\sum_\epsilon} \subset T_B$. Es folgt

$$\begin{aligned}
(\int_{S_\epsilon} |F(z)|^p dxdy)^{1/p} &\leq (\int_{T_{\sum_\epsilon}} |F(z)|^p dxdy)^{1/p} \\
&= (\int_{\sum_\epsilon} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx \right\} dy)^{1/p} \\
&\leq \|F\|_p (\Omega_n \epsilon^n)^{1/p},
\end{aligned}$$

wobei Ω_n das Volumen des Einheitsballes im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Andererseits gilt, weil $|F|^p$ subharmonisch ist, dass

$$|F(z_0)|^p \leq \Omega_{2n}^{-1} \epsilon^{-2n} (\int_{S_\epsilon} |F(z)|^p dxdy).$$

Insgesamt also $|F(z_0)| \leq C \|F\|_p$, wobei $C = (\Omega_n / \Omega_{2n})^{1/p} \epsilon^{-n/p}$. □

Um den Beweis für Satz (2.1) zu beenden, müssen wir noch zeigen, dass wenn $F \in H^2(T_B)$, dann existiert eine Funktion f, die (2) erfüllt. Dazu sei f_y für $y \in B$ die Fouriertransformierte von $F(x + iy)$, verstanden als eine Funktion von x. Es ist ausreichend zu zeigen, dass wenn $y, y' \in B$, dann $e^{2\pi y' \cdot t} f_{y'}(t) = e^{2\pi y \cdot t} f_y(t)$. Dann ist $f(t) = e^{2\pi y \cdot t} f_y(t)$ fast überall definiert und unabhängig von $y \in B$ erfüllt f (2) mit $A = \|F\|$.
Dazu nehmen wir an, dass y, y' in einem Quader liegen, dessen Abschluss ebenfalls in B liegt, weiterhin sollen die Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Des weiteren nehmen wir an, dass $|F(x+iy)|$ eine Funktion von x ist und von einer Funktion majorisiert wird, welche schnell in ∞ verschwindet und konstant für $y \in Q$ ist. Außerdem kann man davon ausgehen, dass $y, y' \in Q$ von der Form $y = (\eta_1, y_2, ..., y_n)$ und $y' = (\eta_1', y_2, ..., y_n)$ mit $\eta_1' \geq \eta_1$, dann folgt wegen dem Integral Satz von Cauchy, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-R}^{R} e^{-2\pi i(x_1 + i\eta_1)t_1} F(x_1 + i\eta_1, ..., x_n + iy_n) dx_1 \\
&\quad + \int_{\eta_1}^{\eta_1'} e^{-2\pi i(R + i\eta)t_1} F(R + i\eta, ...) d\eta \\
&\quad + \int_{R}^{-R} e^{-2\pi i(x_1 + i\eta_1')t_1} F(x_1 + i\eta_1', ...) dx_1 \\
&\quad + \int_{\eta_1'}^{\eta_1} e^{-2\pi i(-R + i\eta)t_1} F(-R + i\eta, ...) d\eta.
\end{aligned}$$

Nach Integration in $x_2, ..., x_n$ erhält man

$$\begin{aligned} e^{2\pi y\cdot t} f_y(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x+iy)\cdot t} F(x+iy)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x+iy')\cdot t} F(x+iy')dx \\ &= e^{2\pi y'\cdot t} f_y(t). \end{aligned}$$

Nach Lemma (2.9) ist F beschränkt auf T_Q, z.B. durch $|F(z)| \leq M$ für $z \in T_Q$. Daher ist es möglich $F^{(\epsilon)}$ durch

$$F^{(\epsilon)}(z) = e^{\left\{-\varepsilon \sum_{j=1}^{n} z_j^2\right\}} F(z)$$

zu definieren. Für $z = (z_1, ..., z_n) \in T_Q$ ergibt sich

$$|F^{(\varepsilon)}(x+iy)| \leq M e^{\varepsilon n a^2} e^{-|x|^2 \varepsilon}$$

für $y \in Q$ und $a = \max_{y\in Q} \{|y_1|, ..., |y_n|\}$. Bilden wir die Fouriertransformierte $f_y^{(\epsilon)}$ von $F^{(\epsilon)}(x+iy)$ dann folgt

$$e^{2\pi y\cdot t} f_y^{(\epsilon)}(t) = e^{2\pi y'\cdot t} f_{y'}^{(\epsilon)}(t) \tag{7}$$

für $y, y' \in Q$. Aber

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F^{(\epsilon)}(x+iy) - F(x+iy)|^2 dx \to 0 \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0$$

Daher bleibt die Gleichung (7) im Limes, wenn $\epsilon \to 0$. Daher können wir den Satz von Plancherel anwenden und erhalten die L^2-Konvergenz $f_y^{(\epsilon)} \to f_y$ und $f_{y'}^{(\epsilon)} \to f_{y'}$. Also

$$e^{2\pi y\cdot t} f_y(t) = e^{2\pi y'\cdot t} f_{y'}(t)$$

für fast alle t.

3 Röhren über Kegel

Definition 3.1. *Unter einem offenen Kegel verstehen wir eine Teilmenge* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *für die gilt dass*

(i) $\Gamma \neq \emptyset$

(ii) $0 \notin \Gamma$

(iii) wenn $x, y \in \Gamma$ *und* $\alpha, \beta > 0$ *, dann* $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ *.*

Offensichtlich ist Γ *konvex.*

Definition 3.2. *Ein abgeschlossener Kegel ist der Abschluss eines offenen Kegels. Falls* Γ *ein offener Kegel ist, dann ist* $\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot t \geq 0, t \in \Gamma\}$ *abgeschlossen. Wenn* Γ^* *ein nichtleeres Inneres hat, ist er ein abgeschlossener Kegel, man sagt auch, dass* Γ *regulär ist.* Γ^* *ist der duale Kegel von* Γ *.*

Beispiel. Für $n = 1$ sind die offenen Kegel die Halblinien $\{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : x < 0\}$. Für $n = 2$ sind die offenen Kegel die winkeligen Gebiete zwischen zwei sich im Ursprung schneidenden Geraden, mit einem Schnittwinkel $\leq \pi$. Solche Kegel sind genau dann regulär, wenn der Schnittwinkel echt kleiner π ist.

Satz 3.3. *Sei* Γ *ein offener Kegel. Dann ist* $F \in H^2(T_\Gamma)$ *genau dann, wenn*

$$F(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot t} f(t) dt \tag{8}$$

wobei f *eine messbare Funktion im* $\mathbb{R}^n$ *ist, für die*

$$\int_{\Gamma^*} |f(t)|^2 dt < \infty$$

gilt. Weiterhin gilt

$$\|F\|_2 = (\int_{\Gamma^*} |f(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Außerdem ist die Beziehung $F \leftrightarrow f$ *eine unitäre lineare Abbildung vom* $H^2(T_\Gamma)$ *in den* $L^2(\Gamma^*)$ *.* $H^2(T_\Gamma)$ *enthält eine Funktion ungleich Null genau dann, wenn* Γ *regulär ist.*

Beweis. Weil $y \cdot t \geq 0$ für $y \in \Gamma$ und $t \in \Gamma^*$, folgt das $F \in H^2(T_\Gamma)$, wenn es die Form (8) hat, mit $f \in L^2(\Gamma^*)$, unmittelbar aus Satz (2.1). Angenommen $F \in H^2(T_\Gamma)$, dann folgt aus Satz 2.1 und (4)

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z \cdot t} f(t) dt$$

mit

$$\|F\|_2^2 = \sup_{y \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi y \cdot t} |f(t)|^2 dt.$$

Wir zeigen, dass f im Komplement von Γ^* verschwindet. Wenn $t_0 \notin \Gamma^*$, dann existiert ein $y_0 \in \Gamma$, sodass $y_0 \cdot t_0 < 0$. Das heißt es existiert eine Umgebung von t_0 , $N = N(t_0) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Gamma^*$ und ein $\delta > 0$ sodass $y_0 \cdot t < -\delta < 0$ für $t \in N$.

Also $(ky_0)\cdot t < -k\delta$ für $t\in N$ und $k>0$. Weil $ky_0\in\Gamma$ folgt

$$\int_N e^{-4\pi ky_0\cdot t}|f(t)|^2dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi ky_0\cdot t}|f(t)|^2dt \leq \|F\|_2^2 < \infty.$$

Dies impliziert

$$\int_N e^{4\pi k\delta}|f(t)|^2dt \leq \|F\|_2^2 < \infty$$

für alle $k>0$ und natürlich auch $f(t)=0$ für fast alle t in $N(t_0)$. Es folgt, dass $f(t)=0$ für fast alle t außerhalb Γ^*. Dies beweist die Behauptung. □

Bemerkung:

Im klassischen Sinne, wenn F zu H^2 zusammen mit der oberen Halbebene gehört, kann man dei Cauchy'sche Integralformel

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{9}$$

beweisen, wobei F in mit Hilfe seiner Randpunkte ausgedrückt wird. Im Folgenden zeigen wir, dass man dies auch auf den Fall erweitern kann, falls die Basis ein Kegel Γ ist, der im $\mathbb{R}^n$ liegt. Diese Darstellung enthält lediglich diejenigen Randwerte, für die $y\in\Gamma$ gegen einen Randpunkt von Γ. Die Existenz folgt aus dem folgenden Korollar:

Korollar 3.4. *Sei Γ ein offener Kegel in $\mathbb{R}^n$ und $F(x+iy)\in H^2(T_\Gamma)$, dann existiert eine Funktion $F(x)$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $F(x+iy)\to F(x)$ im Sinne der L^2-Norm, wenn $y\to 0$ für $y\in\Gamma$.*

Beweis. Sei $F(x)$ die inverse Fouriertransformierte von f, also

$$F(x) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi ix\cdot t}f(t)dt.$$

Aber (8) fordert, dass $F(x+iy)$ die inverse Fouriertransformierte von $e^{-2\pi y\cdot t}f(t)$ ist. Weil $e^{-2\pi y\cdot t}f(t)\to f(t)$ in der L^2-Norm, wenn $y\to 0$, folgt die Aussage aus dem Satz von Plancherel. □

Definition 3.5. *Für $z=x+iy\in T_\Gamma$ definieren wir den **Cauchy-Kern** K verbunden mit der Röhre T_Γ durch*

$$K(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi iz\cdot t}dt = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi y\cdot t}dt.$$

Offenbar ist K stetig auf T_Γ. Als eine Funktion von $x=\Re\{z\}$ gehört K zu $L^2(\mathbb{R}^2)$. Durch den Satz von Plancherel folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x+iy)|^2dx = \int_{\Gamma^*} e^{-4\pi y\cdot t}dt = K(2iy) \tag{10}$$

für alle $y\in\Gamma$.

Satz 3.6. *Wenn $F \in H^2(T_\Gamma)$ dann ist*

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} K(z-\xi)F(\xi)d\xi$$

für alle $z \in T_\Gamma$, wobei $F(\xi) = \lim_{\eta\to 0, \eta\in\Gamma} F(\xi + i\eta)$ als Limes einer Funktion aus Korollar (3.4) zu verstehen ist.

Beweis. Wegen den Sätzen 3.3 und Korrolar 3.4 ergibt sich

$$F(z) = F(x+iy) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t} f(t)dt$$

wobei f die Fouriertransformierte von $F(\xi) = \lim_{\eta\to 0, \eta\in\Gamma} F(\xi + i\eta)$. Das heißt, dass f der Limes im Sinne der L^2-Norm von der Funktionenfolge

$$f_k(t) = \int_{|\xi|\le k} f(\xi)e^{-2\pi i t\cdot\xi}d\xi$$

$k = 1, 2, 3, ...$ ist. Unter Ausnutzung des Satzes von Fubini und der Tatsache, dass $K(x - \xi + iy)$, als eine Funktion von ξ, zu $L^2(\mathbb{R}^n)$ gehört, erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(z) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t} f_k(t)dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t} \left\{ \int_{|\xi|\le k} F(\xi)e^{-2\pi i t\cdot\xi}d\xi \right\} dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{|\xi|\le k} F(\xi) \left\{ \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(z-\xi)\cdot t}dt \right\} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi)K(z-\xi)d\xi,
\end{aligned}$$

was den Satz beweist. □

Definition 3.7. *Im Eindimensionalen Fall kann man den Poisson-Kern*

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

mit Hilfe des Cauchy-Kerns ausdrücken. Für $z = x+iy, y > 0$ ist

$$P(x,y) = \frac{|K(z)|^2}{K(2iy)}.$$

Um diese Definition zu erweitern, nehmen wir an, dass T_Γ eine Röhre, mit Basis Γ, ein regulärer Kegel ist, sowie K der zugehörige Cauchy-Kern. Der Poisson-Kern verbunden mit T_Γ ist durch

$$\mathscr{P}(x,y) = \frac{|K(x+iy)|^2}{K(2iy)}$$

mit $z = x+iy \in \Gamma$ definiert.

Es ist bekannt, dass $K(x+iy)$, betrachtet als eine Funktion von x zu $L^2(\mathbb{R}^n)$ gehört. Deshalb gehört $\mathscr{P}(\cdot,y)$ zu $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir zeigen, dass $\mathscr{P}(\cdot,y)$ auch zu $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört. Dazu zeigen wir, dass $K(x+iy)$ für alle $y\in\Gamma$ und unabhängig von x beschränkt ist. Jedoch gilt

$$|K(x+iy)| = |\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+iy)\cdot t}dt| \leq \int_{\Gamma^*} e^{-2\pi y\cdot t}dt = K(iy).$$

Daher genügt es zu zeigen, dass $K(iy)$ für alle $y\in\Gamma$ endlich ist. Wenn $y\in\Gamma$, dann existiert ein $\delta=\delta_y>0$, sodass $\delta|t|\leq y\cdot t$ für alle $t\in\Gamma^*$. Wir beschränken uns darauf dies für alle $t\in\Gamma^*$, für die $|t|=1$ gilt, zu zeigen. Aufgrund der Definition von Γ^* erhalten wir $0\leq y\cdot t$. Andererseits ist eine Gleichheit unmöglich, ansonsten könnten wir, weil Γ offen ist, ein $u\in\mathbb{R}^n$ finden, sodass $y+u\in\Gamma$ und sodass $(y+u)\cdot t = u\cdot t<0$ im Widerspruch zu $t\in\Gamma^*$. Weil der Schnitt von Γ^* mit der Oberfläche, $\sum$, der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$ kompakt ist, folgt die Existenz eines δ_y aus der Tatsache, dass $0<y\cdot t \quad \forall \Gamma^*\cap\sum$. Insgesamt also

$$\int_{\Gamma^*} e^{-2\pi y\cdot t}dt \leq \int_{\Gamma^*} e^{-2\pi\delta|t|}dt < \infty$$

für $y\in\Gamma$. Weil $L^q(\mathbb{R}^n)\supset L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $1\leq q\leq\infty$ folgt

Korollar 3.8. *Für alle $y\in\Gamma$ ist $\mathscr{P}(\cdot,y)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $1\leq q\leq\infty$.*

Es folgt, dass wenn $f\in L^p(\mathbb{R}^n), 1\leq p\leq\infty$, dann ist

$$u(x+iy) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\mathscr{P}(t,y)dt$$

für alle $z=x+iy\in T_\Gamma$. Weiterhin lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{y\to 0, y\in\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+iy)-f(x)|^p dx = 0. \tag{11}$$

Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Tatsache, dass der Kern $\mathscr{P}$ eine Approximation der Identität ist. Dabei meinen wir, dass $\mathscr{P}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $\mathscr{P}(x,y)\geq 0$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n}\mathscr{P}(x,y)dx = 1 \quad \forall y\in\Gamma$

(iii) wenn $\delta>0$, dann $\int_{|x|>\delta}\mathscr{P}(x,y)dx\to 0$ für $y\to 0$

Die erste Bedingung (i) ist offensichtlich. Die zweite (ii) folgt unmittelbar aus (10), nachdem man beide Seiten mit $K(2iy)$ dividiert hat. Um (iii) zu beweisen müssen wir eine Funktion ψ finden, sodass

(a) ψ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$

(b) $\lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\mathscr{P}(x,y)\psi(x)dx = 1$

(c) $|\psi(x)|<1$ für $x\neq 0$ und $\psi(x)\to 0$, wenn $|x|\to\infty$.

Angenommen eine solche Funktion existiert, dann folgt aus (b), dass

$$1 = \lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{\int_{|x|\leq\delta}\psi(x)\mathscr{P}(x,y)dx + \int_{|x|>\delta}\psi(x)\mathscr{P}(x,y)dx\right\}.$$

Aus (a) und (c) wissen wir, dass ein $\epsilon > 0$ existiert sodass $|\psi(x)| \leq 1 - \varepsilon$ für $|x| > \delta$. Deshalb und unter Ausnutzung von (i) und (ii) folgt

$$\begin{aligned}
1 &\leq \lim_{y\in\Gamma, y\to 0} \left\{ \int_{|x|\leq\delta} \mathscr{P}(x,y)dx + (1-\epsilon) \int_{|x|>\delta} \mathscr{P}(x,y)dx \right\} \\
&= \lim_{y\in\Gamma, y\to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{P}(x,y)dx - \epsilon \int_{|x|>\delta} \mathscr{P}(x,y)dx \right\} \\
&= \lim_{y\in\Gamma, y\to 0} \left\{ 1 - \epsilon \int_{|x|>\delta} \mathscr{P}(x,y)dx \right\},
\end{aligned}$$

dies impliziert (iii). Die Existenz von ψ folgt aus

Satz 3.9. *Wenn* $F \in H^2(T_\Gamma)$ *dann ist*

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{P}(x-t,y)F(t)dt$$

für alle $z = x + iy$ *in* T_Γ.

Beweis. Sei $w = u + iv$ ein Punkt auf T_Γ. Dann gilt für $z \in T_\Gamma$, dass

$$|K(z+w)| = |\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+u)\cdot t} e^{-2\pi(y+v)\cdot t} dt| \leq \int_{\Gamma^*} e^{-2\pi v\cdot t} dt = M_v < \infty.$$

Deshalb gehört $F(z)K(z+w)$, als eine Funktion von z, zu $H^2(T_\Gamma)$ mit Norm kleiner gleich $\|F\|\, M_v$. Nun können wir Satz 3.6 anwenden und erhalten

$$F(z)K(z+w) = \int_{\mathbb{R}^n} K(z-t)F(t)K(t+w)dt, \tag{12}$$

für alle $z \in T_\Gamma$. Für $w = -x + iy$ folgt $K(z-t)K(t+w) = |K(z-t)|^2$ und $K(z+w) = K(2iy)$. Daher ist (12) äquivalent mit

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} F(t) \frac{|K(z-t)|^2}{K(2iy)} dt = \int_{\mathbb{R}^n} F(t)\mathscr{P}(x-t,y)dt,$$

was den Satz beweist. □

Jetzt konstruieren wir ψ. Dazu sei $\phi \geq 0$ stetig und kompakten Träger in Γ^*, sowie $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)dt = 1$ (dies ist möglich, weil Γ regulär ist). Wir behaupten, dass

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot t}\phi(t)dt = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i x\cdot t}\phi(t)dt$$

(a), (b) und (c) erfüllt. Weil $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt (a). Die Tatsache, dass $\psi(x) \to 0$ wenn $|x| \to \infty$ ist ein Spezialfall des Satzes von Riemann-Lebesgue. Wenn $|\psi(x)| = 1$, so z.B. $\psi(x) = e^{2\pi i\Theta}$, dann ist

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i[(x\cdot t)-\Theta]}\phi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)\cos 2\pi[(x\cdot t) - \Theta]dt.$$

Wenn $x \neq 0$ dann muss $\cos 2\pi[(x \cdot t) - \Theta]$, als eine Funktion von t, echt kleiner als 1 in einer Teilmenge des Trägers von ϕ mit positiven Mass sein. Dies zusammen mit der Annahme, dass ϕ nicht negativ ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)dt = 1$$

impliziert dass $|\psi(x)| < 1$ für $x \neq 0$. Um (b) zu zeigen, setzen wir

$$F(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot t} \phi(t)dt$$

für $z \in T_\Gamma$. Nach Satz 3.3 gehört F zu $H^2(T_\Gamma)$ und es folgt, dass

$$F(x) = \lim_{y \in \Gamma, y \to 0} F(x+iy) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i x \cdot t} \phi(t)dt = \psi(x)$$

mit der L^2-Norm. Weiterhin folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$F(0) = \lim_{y \in \Gamma, y \to 0} F(0+iy) = \psi(0) = 1. \tag{13}$$

Eine Anwendung von Satz 3.9 ergibt

$$F(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{P}(x-t,y)F(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{P}(x-t,y)\psi(t)dt. \tag{14}$$

Weil $\mathscr{P}(-t,y) = \mathscr{P}(t,y)$, zusammen mit (14) und (13) ergibt (b).

4 Satz von Paley Wiener

Definition 4.1. *Eine Funktion F des $\mathbb{C}_1$ ist von Exponentieller Ordnung $\sigma > 0$, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine Konstante A_ϵ existiert, sodass*

$$|F(z)| \leq A_\epsilon e^{(\sigma+\epsilon)|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{C}_1$.

Beispiel. Sei $f \in L^2(-\tau, \tau)$, wir definieren eine ganze Funktion, F, durch

$$F(z) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t) e^{2\pi i z t} dt.$$

Dann ist

$$|F(z)| = |F(x+iy)| \leq \sqrt{2\tau} \Big(\int_{-\tau}^{\tau} |f(t)|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi\tau|y|} \leq A e^{2\pi\tau|z|}$$

und F vom Exponentieller Ordnung $\sigma = 2\pi\tau$.

Satz 4.2 (Paley-Wiener)**.** *Sei $F \in L^2(-\infty, \infty)$. Dann ist die Fouriertransformierte von F eine Funktion die außerhalb von $[-(\frac{\sigma}{2\pi}), \frac{\sigma}{2\pi}] = [-\tau, \tau]$ genau dann verschwindet, wenn F auf der reellen Achse die Begrenzung einer ganzen Funktion mit Exponentieller Ordnung σ ist.*

Lemma 4.3. *Sei S ein Gebiet in $\mathbb{C}_1$, welches durch 2 Geraden, die sich im Ursprung mit dem Winkel π/α schneiden, begrenzt wird. Weiterhin sei f analytisch auf $\overline{S}$ und $|f(z)| \leq A\exp(|z|^\beta), 0 \leq \beta < \alpha, z \in S$. Dann folgt aus $|f(z)| \leq M$ auf den 2 begrenzenden Geraden, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in S$.*

Beweis. OBdA kann man annehmen, dass die beiden Geraden die reelle Achse im Winkel $\pi/2\alpha$ und $-\pi/2\alpha$ schneiden. Sei $F(z) = f(z)\exp(-\epsilon z^\gamma)$ mit $\beta < \gamma < \alpha$ und $\epsilon > 0$. Es folgt unmittelbar, dass $|F(z)| \leq |f(z)| \leq M$ auf den beiden Geraden. Weiterhin gilt auf dem Kreisbogen $R = |z| = |re^{i\Theta}|$, $-(\pi/2\alpha) \leq \Theta \leq \pi/2\alpha$, $|F(z)| \leq A\exp(R^\beta - \epsilon R^\gamma \cos(\gamma\pi/2\alpha))$. Betrachtet man den letzten Ausdruck genauer, so geht dieser gegen 0 für $R \to \infty$. Daher ist $|F(z)| \leq M$ auf dem Kreisbogen (vorausgesetzt R ist groß genug). Aus dem Maximum-Modulo Prinzip folgt $|F(z)| \leq M \quad \forall z \in \overline{S}$ mit $|z| \in \overline{S}$. Daher ist $|f(z)| \leq M\exp(\epsilon r^\gamma \cos(\gamma\Theta))$ für alle $z = re^{i\Theta} \in \overline{S}$. Die Behauptung folgt für $\epsilon \to 0$. □

Lemma 4.4. *Sei F von exponentieller Ordnung σ und $|F(z)| \leq 1$ für reelles x dann ist $|F(x+iy)| \leq \exp(\sigma|y|)$ für komplexes z.*

Beweis. Für $\epsilon > 0$ setzen wir $F_\epsilon(z) = F(z)e^{i(\sigma+\epsilon)z}$. Weil F von exponentieller Ordnung σ ist, folgt

$$|F_\epsilon(iy)| = |F(iy)|e^{-(\sigma+\epsilon)y} \leq A_\epsilon$$

für $y \geq 0$. Außerdem ist $|F_\epsilon(x)| \leq 1$ für reelles x. Dies gibt uns eine Begrenzung für F auf der reellen x und y-Achse. Außerdem können wir ein B finden, sodass

$$|F_\epsilon(z)| \leq A_\epsilon e^{(\sigma+\epsilon)(|z|-y)} \leq A_\epsilon e^{2(\sigma+\epsilon)|z|} \leq B e^{|z|^{3/2}}.$$

Eine Anwendung des Lemmas 4.3 mit $\beta = \frac{3}{2} < 2 = \alpha$ liefert

$$|F_\epsilon(z)| \leq \max(A_\epsilon, 1) = A$$

für $z = x + iy$ und $x, y \geq 0$. Wenn wir dieses Argument für den zweiten Quadranten wiederholen, können wir wiederum das Lemma **??** auf F_ϵ anwenden, welches dann durch die obere Halbebene begrenzt wird mit $\beta = 0 < 1 = \alpha$, dadurch $F_\epsilon(x+iy)| \leq 1$ für $y \geq 0$. Für $\epsilon \to 0$ erhalten wir $|F(z)| = |F(x+iy) \leq \exp(\sigma y)$, $y \geq 0$. Die Behauptung folgt für $G(z) = F(-z)$.

□

Lemma 4.5. *Sei F von exponentieller Ordnung σ und seine Majorante bzgl. der x-Achse hat L^2-Norm ≤ 1. Dann gilt*

$$(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx)^{1/2} \leq e^{\sigma|y|}$$

für alle reellen y.

Beweis. Sei ϕ eine beschränkte Funktion einer reellen Variablen mit kompakten Träger und $\|\phi\|_2 \leq 1$. Sei weiterhin $G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z+t)\phi(t)dt$. G ist analytisch und für $\epsilon > 0$ gilt

$$|G(z)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} A_\epsilon e^{(\sigma+\epsilon)|z|} e^{(\sigma+\epsilon)|t|} |\phi(t)| dt = B_\epsilon e^{(\sigma+\epsilon)|z|}.$$

Also ist G von exponentieller Ordnung σ. Eine Anwendung der Schwartz'schen Ungleichung liefert

$$|G(x)| \leq (\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx)^{1/2} (\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx)^{1/2} \leq 1.$$

Eine Anwendung des Lemmas 4.4 liefert

$$|\int_{-\infty}^{\infty} F(z+t)\phi(t)dt| = |G(z)| = |G(x+iy)| \leq e^{\sigma|y|} \tag{15}$$

für reelles y. Wenn wir das Supremum über alle ϕ nehmen, erhalten wir die Behauptung.

□

Beweis.[Paley-Wiener] Sei F von exponentieller Ordnung σ und seine Begrenzung bzgl. der reellen Achse gehört zu $L^2(-\infty, \infty)$. Wir zeigen, dass die inverse Fouriertransformation dieser Begrenzung außerhalb des Intervalls $[-(\sigma/2\pi), \sigma/2\pi] = [-\tau, \tau]$ verschwindet. Sei OBdA $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx \leq 1$ und $G_+(z) = e^{i\sigma z} F(z)$. Dann gilt wegen Lemma 4.5 für $y \geq 0$

$$\begin{aligned}(\int_{-\infty}^{\infty} |G_+(x+iy)|^2 dx)^{1/2} &= e^{-\sigma y} (\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx)^{1/2} \\ &\leq e^{-\sigma y} e^{\sigma y} = 1.\end{aligned}$$

Daher gehört G_+ zu $H^2(\mathbb{R}^2_+)$. Also existiert ein $g \in L^2(-\infty, \infty)$, welches auf der negativen Achse verschwindet, sodass

$$G_+(x + iy) = G_+(z) = \int_0^\infty g(t) e^{2\pi izt} dt$$

für $y > 0$. Für $f(s) = g(\tau - s) = g[(\sigma/2\pi) - s]$ ist dies äquivalent mit

$$F(z) = F(x + iy) = \int_{-\infty}^{\tau} f(s) e^{-2\pi izs} ds$$

für $y > 0$. Beim Grenzübergang $y \to 0$, erkennt man, dass die inverse Fouriertransformierte von $F(x)$ für $s \leq \tau$ fast überall verschwindet. Wendet man dieses Argument auf $F(-z)$ an so sieht man, dass es für fast alle $s \leq -\tau$ verschwindet. $\square$

Definition 4.6. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, dann ist durch $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n | x \cdot y \leq 1 \quad \forall x \in K\}$ die Polarmenge von K definiert. Weiterhin ist durch*

$$\|y\|^* = \sup_{x \in K} |x \cdot y|$$

die Dualnorm definiert.

Beispiel. Sei $p \geq 1$ und $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$. Dann ist $K^* = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1|^q + |y_2|^q \leq 1\}$ mit $1 = 1/p + 1/q$.

Lemma 4.7. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und $0 \in K$. Dann ist $K^{**} = (K^*)^* = K$.*

Beweis. Offenbar ist $K \subset K^{**}$, daher genügt es zu zeigen, dass wenn $x_0 \notin K$ dann auch $x_0 \notin K^{**}$. Sei x_0 solch ein Punkt. Wir wählen $y \in K$ so, dass $|y - x_0|$ minimal ist. Dann partitioniern wir den $\mathbb{R}^n$ in 2 Teilmengen $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot (x_0 - y) > y \cdot (x_0 - y)\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot (x_0 - y) \leq y \cdot (x_0 - y)\}$. Weil $x_0 \cdot (x_0 - y) - y \cdot (x_0 - y) = |x_0 - y|^2 > 0$ gehört x_0 zum ersteren.
Wir nehmen an, dass K zum Letzteren gehört, denn wäre dem nicht so, dann würde ein $y_1 \in K$ existieren, sodass $(y_1 - y) \cdot (x_0 - y) > 0$. Sei $\alpha < 1$ sodass $0 < \alpha < 2(y_1 - y)/|y_1 - y|^2$. Weil K konvex ist, ist $w = (1 - \alpha)y + \alpha y_1 \in K$ und wir haben

$$|w - x_0|^2 = \alpha \left\{\alpha |y_1 - y|^2 - 2(y_1 - y) \cdot (x_0 - y)\right\} + |y - x_0|^2 < |y - x_0|^2$$

im Widerspruch dazu, dass $|y - x_0|$ minimal ist. Weil $0 \in K$ folgt $y \cdot (x_0 - y) \geq 0$. Also können wir eine positive Konstante ϵ finden, sodass $x_0 \cdot (x_0 - y) > \epsilon$ und $x \cdot (x_0 - y) \leq \epsilon$ für alle $x \in K$ (wenn $y \cdot (x_0 - y) > 0$ können wir $\epsilon = y \cdot (x_0 - y)$ wählen, weil jedes positives $\epsilon < x_0 \cdot (x_0 - y)$ gewählt werden kann, wenn $y \cdot (x_0 - y) = 0$).
Sei $v = (x_0 - y)/\epsilon$, also

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n | x \cdot v \leq 1\} \quad \text{und} \quad x_0 \cdot v > 1.$$

Dies bedeutet jedoch, dass $v \in K^*$ und das x_0 nicht zu K^{**} gehört. $\square$

Definition 4.8. *Eine ganze Funktion F auf $\mathbb{C}_n$ ist von exponentieller Ordnung K, wobei K ein symmetrischer Körper, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Konstante A_ϵ existiert, sodasss*

$$|F(z)| \leq A_\epsilon e^{2\pi(1+\epsilon)||z||}$$

für alle $z \in \mathbb{C}_n$. Die Klasse aller Funktionen mit exponentieller Ordnung K wird im Folgenden mit $\mathscr{E}(K)$ bezeichnet.

Satz 4.9 (Paley-Wiener)**.** *Sei $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist F genau dann die Fouriertransformierte einer Funktion, die außerhalb eines symmetrischen Körpers K verschwindet, wenn F im $\mathbb{R}^n$ die Majorante einer Funktion in $\mathscr{E}(K^*)$ ist.*

Beweis. Wenn F die Fouriertransformierte einer Funktion f ist, die außerhalb von K verschwindet, dann erweitert

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iz\cdot t} f(t)dt = \int_K e^{-2\pi ix\cdot t} e^{2\pi y\cdot t} f(t)dt$$

F zu einer Funktion in $\mathscr{E}(K^*)$. Es folgt, dass

$$|F(z)| = |F(x+iy)| \leq Ae^{2\pi||y||^*}.$$

□

Lemma 4.10. *Sei $F \in \mathscr{E}(K^*)$, dann gilt*

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 dx)^{1/2} \leq e^{2\pi||y||^*}(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^2 dx)^{1/2}.$$

Beweis. Wir reduzieren die Ungleichung auf den 1-dimensionalen Fall. Sei $y \in \mathbb{R}^n/\{0\}$ fest und e_1 ein Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ in Richtung von y. Wir bilden eine Orthonormalbasis $\{e_1, ..., e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$. Dazu fixieren wir $(n-1)$ reelle Zahlen $u_2, ..., u_n$, setzen $\alpha = \sum_{j=2}^n u_j e_j$ und definieren

$$\phi(w_1) := F(w_1 e_1 + \alpha).$$

Offensichtlich ist ϕ eine ganze Funktion der komplexen Variablen $w_1 = u_1 + iv_1$. Weiterhin ist ϕ von exponentieller Ordnung $2\pi \left\|e_1\right\|^*$. Sei $\epsilon > 0$, dann folgt aus $F \in \mathscr{E}(K^*)$ die Existenz einer Konstante A_ϵ, so dass

$$\begin{aligned} |\phi(w_1)| &\leq A_\epsilon \exp(2\pi \left\|w_1 e_1 + \alpha\right\|^* (1+\epsilon)) \\ &\leq [A_\epsilon \exp(2\pi(1+\epsilon) \left\|\alpha\right\|^*)] e^{2\pi\|e_1\|^*(1+\epsilon)|w_1|} \\ &= A'_\epsilon e^{2\pi\|e_1\|^*(1+\epsilon)|w_1|}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.5 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u_1+iv_1)|^2 du_1 \leq e^{4\pi\|e_1\|^*|v_1|} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u_1)|^2 du_1$$

für alle $v_1 \in (-\infty, \infty)$. Sei v_1 so gewählt, dass $y = v_1 e_1$, es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(iy + \sum_{j=1}^n u_j e_j)|^2 du_1 \leq e^{4\pi\|y\|^*} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sum_{j=1}^n u_j e_j)|^2 du_1.$$

Integration beider Seiten ergibt die Behauptung. □

Beweis.[Paley Wiener] Sei F die Majorante im $\mathbb{R}^n$ einer Funktion in $\mathscr{E}(K^*)$. Nach dem Lemma folgt, dass $F \in H^2(T_B)$ für alle abgeschlossenen Basen B. Daher existiert nach Satz 2.1 ein f, sodass

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z \cdot t} f(t) dt$$

für alle $z = x + iy \in T_B$. Wir können annehmen dass $0 \in B$, denn der Satz von Plancherel garantiert ein $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^2 dx$. Also ist F die Fourierinverse von f. Es fehlt noch zu zeigen, dass f außerhalb K verschwindet. Um dies zu beweisen, halten wir erst einmal fest, dass die Fouriertransformation impliziert, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi y \cdot t} |f(t)|^2 dt$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Deshalb und wegen Lemma 4.10 erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \leq e^{4\pi \|y\|^*} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 dt \tag{16}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Wir behaupten weiterhin, dass diese Ungleichung nur gilt, wenn f fast überall außerhalb K verschwindet. Angenommen $t_0 \notin K$, dann garantiert Lemma 4.7 die Existenz eines $y_0 \in K^*$, sodass $(t_0 \cdot y_0) < -1$ (K^* ist symmetrisch). Also können wir ein $\delta > 0$ und eine Umgebung $N = N(t_0)$ von t_0 finden, sodass $(t \cdot y_0) < -(1+\delta) \quad \forall t \in N$. Also erhalten wir für $y = \rho y_0 (\rho > 0)$ und (16)

$$\int_N |f(t)|^2 e^{4\pi\rho(1+\delta)} dt \leq \int_N |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \leq \|f\|_2^2 \, e^{4\pi\rho\|y_0\|^*}.$$

Weil $y_0 \in K^*$ muss $\|y_0\|^* \leq 1$ sein. Wir erhalten

$$\left(\int_N |f(t)|^2 dt\right) e^{4\pi\rho(1+\delta)} \leq \|f\|_2^2 \, e^{4\pi\rho}$$

für alle $\rho > 0$. Wenn $\int_N |f(t)|^2 dt$ nicht Null sein soll, impliziert dies

$$e^{4\pi\rho\delta} \leq \frac{\|f\|_2^2}{\int_N |f(t)|^2 dt},$$

was offensichtlich für große ρ unmöglich ist. Daher $f(t) = 0$ für fast alle $t \in N$. Die Behauptung folgt. □

Literatur

[1] Elias M. Stein and Guido Weiss, *“Introduction to FOURIER ANALYSIS ON EUCLIDEAN SPACES”*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1990

[2] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *“Taschenbuch der Mathematik”*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2003