Das Stochastische Integral

Carsten Erdmann

29.04.2010

grundlegende Definitionen

Sei $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für $s < t$, $s, t \in [0, \infty)$. Die Familie $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ bezeichnet man als **Filtration**.

Ein stochastischer Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ist **messbar**, wenn für jedes $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ die Menge $\{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\}$ zur Produkt σ-Algebra $\mathscr{B}([0, \infty)) \otimes \mathscr{F}$ gehört. Das heißt, dass die Abbildung

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega) : ([0, \infty) \times \Omega, \mathscr{B}([0, \infty)) \otimes \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^N))$$

messbar ist.

grundlegende Definitionen

Sei $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für $s < t$, $s, t \in [0,\infty)$. Die Familie $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ bezeichnet man als **Filtration**.

Ein stochastischer Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ist **messbar**, wenn für jedes $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ die Menge $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in A\}$ zur Produkt σ-Algebra $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$ gehört. Das heißt, dass die Abbildung

$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega) : ([0,\infty) \times \Omega, \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^N))$$

messbar ist.

grundlegende Definitionen

Ein stochastischer Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t \in [0,\infty)}$ ist **progressiv messbar** bezüglich der Filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, wenn für jedes $t \geq 0$ und $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ die Menge $\{(s, \omega) : 0 \leq s \leq t,\ \ \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in A\}$ zur Produkt σ-Algebra $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ gehört. Das heißt die Abbildung

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega) : ([0,t] \times \Omega, \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t) \to (\mathbb{R}^N, \mathscr{B}(\mathbb{R}^N))$$

ist für jedes $t \geq 0$ messbar.

Ein stochastischer Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t \in [0,\infty)}$ ist **adaptiert** zu der Filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, wenn für jedes $t \geq 0$ X_t eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable ist.

grundlegende Definitionen

Ein stochastischer Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ist **progressiv messbar** bezüglich der Filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, wenn für jedes $t \geq 0$ und $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ die Menge $\{(s,\omega) : 0 \leq s \leq t,\ \ \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in A\}$ zur Produkt σ-Algebra $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ gehört. Das heißt die Abbildung

$$(s,\omega) \mapsto X_s(\omega) : ([0,t] \times \Omega, \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t) \to (\mathbb{R}^N, \mathscr{B}(\mathbb{R}^N))$$

ist für jedes $t \geq 0$ messbar.

Ein stochastischer Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ist **adaptiert** zu der Filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, wenn für jedes $t \geq 0$ X_t eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable ist.

grundlegende Definitionen

Die **kanonische** oder **natürliche Filtration** von $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ist die Menge

$$\mathscr{F}_t \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}_t^X \overset{\text{def}}{=} \sigma\{X_s : s \leq t, s \in [0,\infty)\}.$$

Seien $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ zwei stochastische Prozesse. Y wird als **Modifikation** von X bezeichnet, wenn für alle $t \geq 0$ gilt, dass

$$P\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1.$$

grundlegende Definitionen

Die **kanonische** oder **natürliche Filtration** von $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ist die Menge

$$\mathscr{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{F}_t^X \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left\{X_s : s \leq t, s \in [0,\infty)\right\}.$$

Seien $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ zwei stochastische Prozesse. Y wird als **Modifikation** von X bezeichnet, wenn für alle $t \geq 0$ gilt, dass

$$P\left\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\right\} = 1.$$

Seien $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ zwei stochastische Prozesse. X und Y werden als **ununterscheidbar** bezeichnet, wenn

$$P\left\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ für alle } t \in [0,\infty)\right\} = 1.$$

grundlegende Definitionen

Die **kanonische** oder **natürliche Filtration** von $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ist die Menge

$$\mathscr{F}_t \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}_t^X \overset{\text{def}}{=} \sigma\left\{X_s : s \leq t, s \in [0,\infty)\right\}.$$

Seien $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ zwei stochastische Prozesse. Y wird als **Modifikation** von X bezeichnet, wenn für alle $t \geq 0$ gilt, dass

$$P\left\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\right\} = 1.$$

Seien $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ zwei stochastische Prozesse. X und Y werden als **ununterscheidbar** bezeichnet, wenn

$$P\left\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ für alle } t \in [0,\infty)\right\} = 1.$$

Brownsche Bewegung

Eine **ein-dimenionale Brownsche Bewegung** ist ein reell-wertiger Prozess mit stetigen Pfaden, $t \to W_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, für den gilt, dass

(B1) $W_0 = 0$ P-f.s.

(B2) $\mathcal{L}(W_t - W_s | P) = \mathcal{N}(0, t-s)$ für $0 \leq s < t$

(B3) $W_t - W_s$ ist unabhängig von $W_u - W_r$ für $0 \leq r \leq u \leq s < t$.

Eine N-**dimensionale Brownsche Bewegung** ist ein $\mathbb{R}^N$-wertiger Prozess

$$W(t) = (W_1(t), ..., W_N(t))$$

dessen Komponenten W_i, $(i = 1, ..., N)$ unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind.

Brownsche Bewegung

Eine **ein-dimenionale Brownsche Bewegung** ist ein reell-wertiger Prozess mit stetigen Pfaden, $t \to W_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, für den gilt, dass

(B1) $W_0 = 0$ P-f.s.

(B2) $\mathcal{L}(W_t - W_s|P) = \mathcal{N}(0, t-s)$ für $0 \leq s < t$

(B3) $W_t - W_s$ ist unabhängig von $W_u - W_r$ für $0 \leq r \leq u \leq s < t$.

Eine N-**dimensionale Brownsche Bewegung** ist ein $\mathbb{R}^N$-wertiger Prozess

$$W(t) = (W_1(t), ..., W_N(t))$$

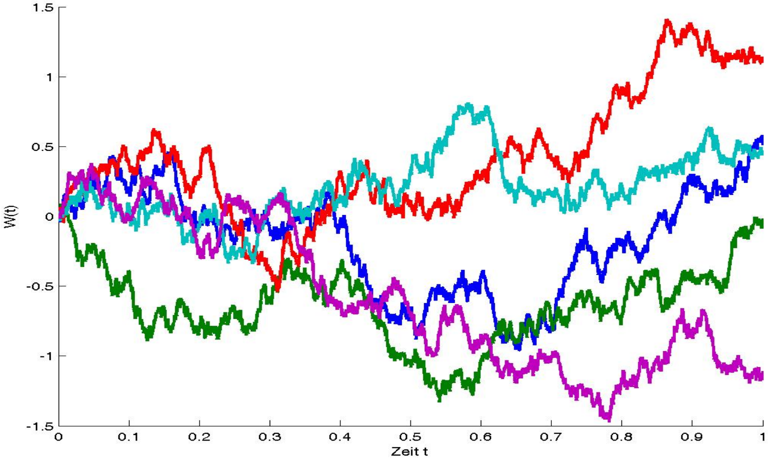
dessen Komponenten W_i, $(i = 1, ..., N)$ unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind.

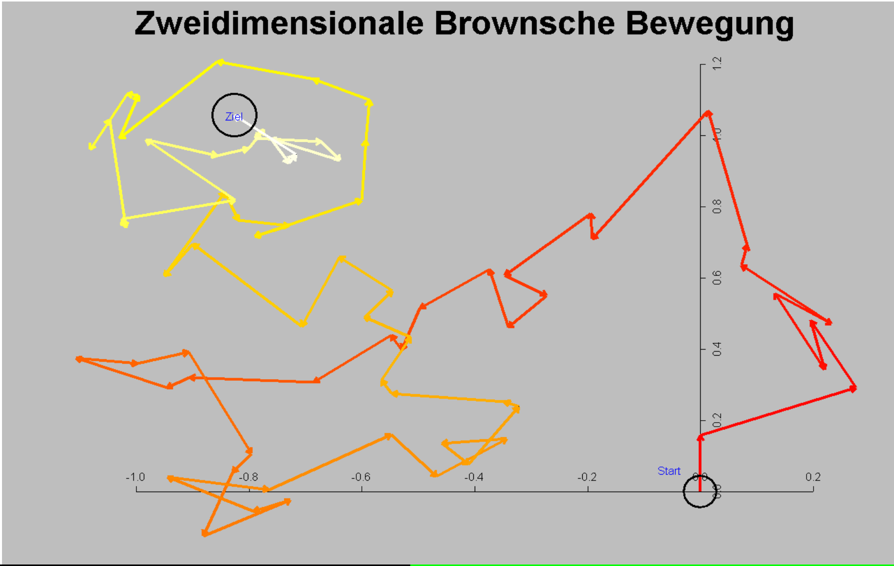
Brownsche Bewegung

Die Brownsche Filtration ist definiert durch

$$\mathscr{F}_t \overset{\text{def}}{=} \sigma\left\{\mathscr{F}_t^W \cup N : N \in \mathscr{F}, P(N) = 0\right\}, \qquad t \in [0, \infty).$$

Beispiel: eindimensionale Brownsche Bewegung




Zweidimensionale Brownsche Bewegung
Ziel
Start
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2

Sätze zur Brownschen Bewegung

Die Brownsche Filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ ist links- und rechtsseitig stetig, genauer gilt

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\epsilon>0} \mathscr{F}_{t+\epsilon} \quad \text{und } \mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t-} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s\right).$$

Wenn alle Pfade des stochastischen Prozesses $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ rechtsseitig stetig sind, dann ist der Prozess progressiv messbar. Insbesondere ist eine Brownsche Bewegung progressiv messbar.

Sätze zur Brownschen Bewegung

Die Brownsche Filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ ist links- und rechtsseitig stetig, genauer gilt

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\epsilon>0} \mathscr{F}_{t+\epsilon} \quad \text{und } \mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t-} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s\right).$$

Wenn alle Pfade des stochastischen Prozesses $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ rechtsseitig stetig sind, dann ist der Prozess progressiv messbar. Insbesondere ist eine Brownsche Bewegung progressiv messbar.

Definition: gewöhnlichen Bedingungen

Eine Filtration $\{\mathscr{G}_t\}_{t\geq 0}$ erfüllt die **gewöhnlichen Bedingungen**, wenn sie rechtsseitig stetig ist und $\mathscr{G}_0$ alle P-Nullmengen von $\mathscr{F}$ enthält.

Definition: Martingal

Ein reell-wertiger Prozess $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$\mathbb{E}\left(|X_t|\right) < \infty$$

für alle $t \in [0\infty)$, wird bezeichnet als

1. ein **Super-Martingal**, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$ gilt, dass
$$\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s) \leq X_s \qquad P\text{-f.s.}$$
2. ein **Sub-Martingal**, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$ gilt, dass
$$\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s) \geq X_s \qquad P\text{-f.s.}$$
3. ein **Martingal**, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$ gilt, dass
$$\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s \qquad P\text{-f.s.}$$

wichtige Sätze: Martingal

Eine eindimensionale Brownsche Bewegung W_t ist ein Martingal.

Sei $\{(X_t, \mathcal{G})\}_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal, wobei die Filtration $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ die gewöhnlichen Bedingungen erfüllt. Dann existiert eine rechtsseitig stetige Modifikation $\{(Y_t, \mathcal{G})\}_{t\in[0,\infty)}$ von X_t so dass $\{(Y_t, \mathcal{G})\}_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal ist.

wichtige Sätze: Martingal

Eine eindimensionale Brownsche Bewegung W_t ist ein Martingal.

Sei $\{(X_t, \mathcal{G})\}_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal, wobei die Filtration $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ die gewöhnlichen Bedingungen erfüllt. Dann existiert eine rechtsseitig stetige Modifikation $\{(Y_t, \mathcal{G})\}_{t\in[0,\infty)}$ von X_t so dass $\{(Y_t, \mathcal{G})\}_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal ist.

Definition: Stoppzeit

Eine **Stoppzeit** in Bezug auf die Filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ist eine $\mathscr{F}$ messbare Zufallsvariable

$$\tau : \Omega \to [0, \infty]$$

mit $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in [0, \infty)$.

Sei $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann ist der dazugehörige **Stopp-Prozess** definiert durch

$$X_{t\wedge\tau}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X_t(\omega) & \text{wenn } t \leq \tau(\omega), \\ X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{wenn } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Definition: Stoppzeit

Eine **Stoppzeit** in Bezug auf die Filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ist eine $\mathscr{F}$ messbare Zufallsvariable

$$\tau : \Omega \to [0, \infty]$$

mit $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in [0, \infty)$.

Sei $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann ist der dazugehörige **Stopp-Prozess** definiert durch

$$X_{t\wedge\tau}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X_t(\omega) & \text{wenn } t \leq \tau(\omega), \\ X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{wenn } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Satz: Stoppzeiten

Sind τ_1 und τ_2 beides Stoppzeiten, dann sind auch

$$\tau_1 \wedge \tau_2 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\tau_1, \tau_2\}, \quad \tau_1 \vee \tau_2 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\tau_1, \tau_2\},$$

Stoppzeiten.

Definitionen: σ-Algebra eines Stopp-Prozesses

Sei τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Dann wird die σ-Algebra $\mathscr{F}_\tau$ der **Ereignisse vor dem Stoppzeitpunkt** τ definiert durch

$$\mathscr{F}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \in [0,\infty)\}\,.$$

Somit ist τ $\mathscr{F}_\tau$-messbar.

Mesbarkeit, Martingal

Sei τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Wenn der stochastische Prozess $\{(X_t,\mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ progressiv messbar ist, so gilt dies auch für den Stopp-Prozess $\{(X_{t\wedge\tau},\mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Es gilt sogar, dass $X_{t\wedge\tau}$ $\mathscr{G}$- und $\mathscr{G}_{t\wedge\tau}$-messbar ist.

Sei $\{(X_t,\mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal.

1. Seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2$. Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$
$$\mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_2}|\mathscr{F}_{t\wedge\tau_1}\right) = X_{t\wedge\tau_1} \quad P\text{-f.s.}$$
2. Sei τ eine Stoppzeit und $\{(X_t,\mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal. Dann ist der Stopp-Prozess $\{(X_{t\wedge\tau},\mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ auch ein Martingal.

Mesbarkeit, Martingal

Sei τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Wenn der stochastische Prozess $\{(X_t, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ progressiv messbar ist, so gilt dies auch für den Stopp-Prozess $\{(X_{t\wedge\tau}, \mathscr{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Es gilt sogar, dass $X_{t\wedge\tau}$ $\mathscr{G}$- und $\mathscr{G}_{t\wedge\tau}$-messbar ist.

Sei $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal.

1. Seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2$. Dann gilt für alle $t \in [0, \infty)$
$$\mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_2} | \mathscr{F}_{t\wedge\tau_1}\right) = X_{t\wedge\tau_1} \quad P\text{-f.s.}$$
2. Sei τ eine Stoppzeit und $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal. Dann ist der Stopp-Prozess $\{(X_{t\wedge\tau}, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ auch ein Martingal.

Satz: Martingal

Sei $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein rechtsseitig stetiger Prozess. Dann ist X_t genau dann ein Martingal, wenn für alle beschränkten Stoppzeiten τ gilt, dass

$$\mathbb{E}\left(X_\tau\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right).$$

Satz: Martingal

Sei $\{(X_t, \mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein stochastischer Prozess mit $X_0 = 0$. Wenn eine nichtfallende Folge $\{\tau\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty\right) = 1$$

so dass

$$\left\{\left(X_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} X_{t\wedge\tau_n}, \mathscr{F}_t\right)\right\}_{t\in[0,\infty)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist, dann ist X ein **lokales Martingal**. Die Folge $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wird als **eingrenzende Folge** bezüglich X bezeichnet.

Doob's Ungleichung

Sei $\{M_t\}_{t\geq 0}$ ein Martingal mit rechtsseitig stetigen Pfaden und $\mathbb{E}\left(M_T^2\right) < \infty$ für alle $T > 0$. Dann gilt für $p > 1$

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot \mathbb{E}\left(M_T^p\right).$$

Differenzierbarkeit: Brownsche Bewegung

P-fast alle Pfade der Brownschen Bewegung $\{W_t\}_{t\in[0,\infty)}$ sind nirgends differenzierbar.

einfacher stochastischer Prozess

Ein **stochastischer Prozess** $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ist **einfach**, wenn eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m_\pi} = T$, $m_\pi \in \mathbb{N}$, und beschränkte Zufallsvariablen $\Phi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Φ_i, $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-messbar $(i = 0, ..., m_\pi)$ existieren, so dass $X_t(\omega)$ die folgende Darstellung besitzt

$$X_t(\omega) = X(t,\omega) = \Phi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{m_\pi} \Phi_i(\omega) \cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$$

für alle $w \in \Omega$.

einfaches stochastisches Integral

Für einen einfachen Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ist das **stochastische Integral** $I_.(X)$ für $t \in (t_k, t_{k+1}]$ definiert durch

$$I_t(X) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s dW_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1\leq i\leq k} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

Alternativ lässt sich dies für $t \in [0, T]$ auch schreiben als

$$I_t(X) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s dW_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1\leq i\leq m_\pi} \Phi_i(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}).$$

Eigenschaften von stochastischen Integralen

Sei $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ein einfacher Prozess. Dann gilt

(I1) $\{I_t(X)\}_{t\in[0,T]}$ ist ein stetiges Martingal bezüglich $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$.

(I2) $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$ für $t \in [0,T]$

(I3) $\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t X_s dW_s\right|\right)^2\right) \le 4 \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^2 ds\right)$.

(I4) $\int_0^T X_s dW_s = \int_0^t X_s dW_s + \int_t^T X_s dW_s$ für $t \le T$.

(I5) Sei Y ein weiterer einfacher Prozess und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt, dass

$$I_t(aX + bY) = a \cdot I_t(X) + b \cdot I_t(Y).$$

Beweis: zu I1

Da Φ_i $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-messbar und W_{t_k} $\mathscr{F}_t$-messbar für $t_k \leq t$ ist, folgt die $\mathscr{F}_t$-Messbarkeit von $I_t(X)$.

Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Pfade einer Brownschen Bewegung.

Beweis: zu I1

Da Φ_i $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-messbar und W_{t_k} $\mathscr{F}_t$-messbar für $t_k \leq t$ ist, folgt die $\mathscr{F}_t$-Messbarkeit von $I_t(X)$.

Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Pfade einer Brownschen Bewegung.

Beweis: zu I1

Seien $t \in (t_{k-1}, t_k], s \in (t_{l-1}, t_l]$ mit $s < t$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $k > l$. Da Φ_i, $i = 1, ..., l$ und W_r, $r < s$ $\mathscr{F}_s$-messbar sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{l-1}\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right. \\ &\quad +\Phi_l(W_{t_l} - W_s + W_s - W_{t_{l-1}}) + \\ &\quad \left. + \sum_{i=l+1}^{k-1}\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}})|\mathscr{F}_s\right) \end{aligned}$$

Beweis: zu I1

Seien $t \in (t_{k-1}, t_k], s \in (t_{l-1}, t_l]$ mit $s < t$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $k > l$. Da Φ_i, $i = 1, ..., l$ und W_r, $r < s$ $\mathscr{F}_s$-messbar sind, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right. \\
&\quad +\Phi_l(W_{t_l} - W_s + W_s - W_{t_{l-1}}) + \\
&\quad \left. + \sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}})|\mathscr{F}_s\right)
\end{aligned}
$$

Beweis: zu I1

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left(\sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_l (W_s - W_{t_{l-1}}) \right) + \\
& + \mathbb{E} \left(\Phi_l (W_{t_l} - W_s) | \mathscr{F}_s \right) + \\
& + \mathbb{E} \left(\sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k (W_t - W_{t_{k-1}}) | \mathscr{F}_s \right) \\
= \quad & I_s(X) + A + B.
\end{aligned}
$$

Beweis: zu I1

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left(\sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_l (W_s - W_{t_{l-1}}) \right) + \\
& + \mathbb{E} \left(\Phi_l (W_{t_l} - W_s) | \mathscr{F}_s \right) + \\
& + \mathbb{E} \left(\sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k (W_t - W_{t_{k-1}}) | \mathscr{F}_s \right) \\
= \quad & I_s(X) + A + B.
\end{aligned}
$$

Beweis: zu I1

Für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1}$ gilt (man bemerke, dass dann $t_{i-1} \geq s$)

$$\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right)|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right) \overset{\text{(Fubini)}}{=}$$

Beweis: zu I1

Für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1}$ gilt (man bemerke, dass dann $t_{i-1} \geq s$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right)|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right) \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right)
\end{aligned}$$

Beweis: zu I1

Für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1}$ gilt (man bemerke, dass dann $t_{i-1} \geq s$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right)|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right) \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&=
\end{aligned}$$

Beweis: zu I1

Für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1}$ gilt (man bemerke, dass dann $t_{i-1} \geq s$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right)|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right) \\
&\overset{(\text{Fubini})}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\Phi_i \cdot \mathbb{E}\left(W_u - W_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&\overset{(\text{B2})}{=}
\end{aligned}$$

Beweis: zu I1

Für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1}$ gilt (man bemerke, dass dann $t_{i-1} \geq s$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right)|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right) \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\Phi_i \cdot \mathbb{E}\left(W_u - W_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&\overset{\text{(B2)}}{=} 0
\end{aligned}$$

Beweis: zu I1

Für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1}$ gilt (man bemerke, dass dann $t_{i-1} \geq s$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_s\right)|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right) \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\Phi_i \cdot \mathbb{E}\left(W_u - W_{t_{i-1}}\right)|\mathscr{F}_s\right) \\
&\overset{\text{(B2)}}{=} 0
\end{aligned}$$

Beweis: zu I1

Außerdem ist Φ_l $\mathscr{F}_s$-messbar, $W_{t_l} - W_s$ unabhängig von $\mathscr{F}_s$ und hat Erwartungswert Null. Daher verschwinden die beiden Terme A und B in obiger Gleichung. Dies impliziert $\mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathscr{F}_s\right) = I_s(X)$. Der Fall $s = 0$ kann fast analog gezeigt werden.

Beweis: zu I2

Es gilt

$$\mathbb{E}\left(I_t(X)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right).$$

Beweis: zu I2

Betrachten wir als Erstes den Fall $i \neq j$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $i > j$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \middle| \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) \\
= \; &
\end{aligned}
$$

Beweis: zu I2

Betrachten wir als Erstes den Fall $i \neq j$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $i > j$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\Phi_j \cdot (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \cdot \Phi_i \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)}_{=0, \text{ wegen (B2)}}\right) \\
= \; &
\end{aligned}
$$

Beweis: zu I2

Betrachten wir als Erstes den Fall $i \neq j$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $i > j$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\Phi_j \cdot (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \cdot \Phi_i \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)}_{=0, \text{ wegen (B2)}}\right) \\
= \; & 0.
\end{aligned}
$$

Beweis: zu I2

Betrachten wir als Erstes den Fall $i \neq j$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $i > j$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\Phi_j \cdot (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \cdot \Phi_i \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)}_{=0,\text{ wegen (B2)}}\right) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Beweis: zu I2

Im Falle $i = j$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\Phi_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) = \mathbb{E}\left(\Phi_i^2 \cdot \mathbb{E}\left((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right)$$
$$=$$

Beweis: zu I2

Im Falle $i = j$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\Phi_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) &= \mathbb{E}\left(\Phi_i^2 \cdot \mathbb{E}\left((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\Phi_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1})\right)\end{aligned}$$

aufgrund der Eigenschaften der Brownschen Bewegung.

Beweis: zu I2

Im Falle $i = j$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\Phi_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) &= \mathbb{E}\left(\Phi_i^2 \cdot \mathbb{E}\left((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 | \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\Phi_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1})\right)\end{aligned}$$

aufgrund der Eigenschaften der Brownschen Bewegung.

Beweis: zu I2

Demnach also

$$\mathbb{E}\left(I_t(X)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \Phi_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1})\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right).$$

Beweis: zu I3

Folgt unmittelbar aus (I1) und (I2), sowie der Ungleichung von Doob für $p = 2$.

Der Vektorraum $L^2[0, T]$

$$
\begin{aligned}
L^2[0,T] &\overset{\text{def}}{=} L^2\left([0,T],\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},P\right) \\
&\overset{\text{def}}{=} \Big\{\{(X_t,\mathscr{F}_t)\}_{t\in[0,T]} \text{ reell-wertiger stochastischer Prozess } | \\
&\qquad \{X_t\}_{t\in[0,T]} \text{ progressiv messbar }, \mathbb{E}\left(\int_0^T X_t^2 dt\right) < \infty\Big\}
\end{aligned}
$$

T-Norm

Durch

$$||X||_T^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^T X_t^2 dt\right)$$

wird eine Norm auf $L^2[0, T]$ definiert.

It-Isometrie

Für einen einfachen Prozess X induziert die Abbildung $X \rightarrow I.(X)$ eine Norm auf dem Raum der stochastischen Integrale durch

$$||I.(X)||_{L_T}^2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T X_s dW_s\right)^2\right) \overset{(I2)}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) = ||X||_T^2.$$

Also ist die Abbildung $I.(X)$ linear und normerhaltend und daher eine Isometrie. Diese Isometrie wird auch als **It-Isometrie** bezeichnet.

It-Isometrie

Für einen einfachen Prozess X induziert die Abbildung $X \to I.(X)$ eine Norm auf dem Raum der stochastischen Integrale durch

$$||I.(X)||_{L_T}^2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T X_s dW_s\right)^2\right) \overset{(\text{I2})}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) = ||X||_T^2.$$

Also ist die Abbildung $I.(X)$ linear und normerhaltend und daher eine Isometrie. Diese Isometrie wird auch als **It-Isometrie** bezeichnet.

Approximation durch einfache Prozesse

Ein beliebiges $X \in L^2[0, T]$ kann durch eine Folge von einfachen Prozessen $X^{(n)}$ approximiert werden. Es existiert also eine Folge $X^{(n)}$ von einfachen Prozessen mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_s - X_s^{(n)}\right)^2 ds\right) = 0.$$

Beweis:

Sei $X \in L^2[0, T]$ stetig und beschränkt. Setze

$$X_t^{(n)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{kT}{2^n}}(\omega) \cdot 1_{\left(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right]}(t).$$

Beweis:

Sei $X \in L^2[0,T]$ stetig und beschränkt. Setze

$$X_t^{(n)}(\omega) \overset{\text{def}}{=} X_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{kT}{2^n}}(\omega) \cdot 1_{\left(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right]}(t).$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_s - X_s^{(n)}\right)^2 ds\right) = 0,$$

aufgrund des Satzes ber dominierte Konvergenz.

Beweis:

Sei $X \in L^2[0,T]$ stetig und beschränkt. Setze

$$X_t^{(n)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{kT}{2^n}}(\omega) \cdot 1_{\left(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right]}(t).$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_s - X_s^{(n)}\right)^2 ds\right) = 0,$$

aufgrund des Satzes ber dominierte Konvergenz.

Beweis:

Sei $X \in L^2[0, T]$ beschränkt. Sei weiterhin

$$G_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s(\omega) ds.$$

Dann setze für $m \in \mathbb{N}$, m so groß, dass $t - \frac{1}{m} \geq 0$, den Prozess

$$\hat{X}_t^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G_t(\omega) - G_{t-\frac{1}{m}}(\omega)}{\frac{1}{m}}.$$

Beweis:

Sei $X \in L^2[0, T]$ beschränkt. Sei weiterhin

$$G_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s(\omega) ds.$$

Dann setze für $m \in \mathbb{N}$, m so groß, dass $t - \frac{1}{m} \geq 0$, den Prozess

$$\hat{X}_t^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G_t(\omega) - G_{t-\frac{1}{m}}(\omega)}{\frac{1}{m}}.$$

Dieser ist stetig, beschränkt und $\mathscr{F}_t$-messbar.

Beweis:

Sei $X \in L^2[0,T]$ beschränkt. Sei weiterhin

$$G_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s(\omega) ds.$$

Dann setze für $m \in \mathbb{N}$, m so groß, dass $t - \frac{1}{m} \geq 0$, den Prozess

$$\hat{X}_t^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G_t(\omega) - G_{t-\frac{1}{m}}(\omega)}{\frac{1}{m}}.$$

Dieser ist stetig, beschränkt und $\mathscr{F}_t$-messbar.

Beweis:

Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung impliziert dann

$$\lim_{m\to\infty} \hat{X}_t^{(m)}(\omega) = X_t(\omega)$$

für $(\lambda \otimes P)$-fast alle $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Weiterhin führt eine Anwendung des Satzes der dominierten Konvergenz auf

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\hat{X}_t^{(m)} - X_t\right)^2 dt\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis:

Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung impliziert dann

$$\lim_{m\to\infty} \hat{X}_t^{(m)}(\omega) = X_t(\omega)$$

für $(\lambda \otimes P)$-fast alle $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$. Weiterhin führt eine Anwendung des Satzes der dominierten Konvergenz auf

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\hat{X}_t^{(m)} - X_t\right)^2 dt\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen (i) können wir nun eine Teilfolge $X^{(n)} \overset{\text{def}}{=} \hat{X}^{(m_n)}$ von einfachen Prozessen wählen, so dass

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_t^{(n)} - X_t\right)^2 dt\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis:

Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung impliziert dann

$$\lim_{m\to\infty} \hat{X}_t^{(m)}(\omega) = X_t(\omega)$$

für $(\lambda \otimes P)$-fast alle $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Weiterhin führt eine Anwendung des Satzes der dominierten Konvergenz auf

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\hat{X}_t^{(m)} - X_t\right)^2 dt\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen (i) können wir nun eine Teilfolge $X^{(n)} \overset{\text{def}}{=} \hat{X}^{(m_n)}$ von einfachen Prozessen wählen, so dass

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_t^{(n)} - X_t\right)^2 dt\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis:

Sei nun $X \in L^2[0, T]$ beliebig. Setze

$$\hat{X}_t^{(m)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_t(\omega) \cdot 1_{\{|X_t(\omega)| \leq m\}}(\omega).$$

Dieser Prozess ist beschränkt und erfüllt

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|\hat{X}_t^{(m)} - X_t\right|^2 dt\right) \stackrel{m \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

aufgrund des Satzes über dominierte Konvergenz, da $|\hat{X}_t^{(m)}| \leq |X_t|$.

Beweis:

Sei nun $X \in L^2[0, T]$ beliebig. Setze

$$\hat{X}_t^{(m)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_t(\omega) \cdot 1_{\{|X_t(\omega)| \leq m\}}(\omega).$$

Dieser Prozess ist beschränkt und erfüllt

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|\hat{X}_t^{(m)} - X_t\right|^2 dt\right) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

aufgrund des Satzes über dominierte Konvergenz, da $|\hat{X}_t^{(m)}| \leq |X_t|$.

Wegen (i) und (ii) existiert nun eine Diagonalfolge $X^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} X^{(m_n)}$ mit

$$E\left(\int_0^T \left|X_t^{(n)} - X_t\right|^2 dt\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis:

Sei nun $X \in L^2[0, T]$ beliebig. Setze

$$\hat{X}_t^{(m)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_t(\omega) \cdot 1_{\{|X_t(\omega)| \leq m\}}(\omega).$$

Dieser Prozess ist beschränkt und erfüllt

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|\hat{X}_t^{(m)} - X_t\right|^2 dt\right) \stackrel{m \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

aufgrund des Satzes über dominierte Konvergenz, da $|\hat{X}_t^{(m)}| \leq |X_t|$.

Wegen (i) und (ii) existiert nun eine Diagonalfolge $X^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} X^{(m_n)}$ mit

$$E\left(\int_0^T \left|X_t^{(n)} - X_t\right|^2 dt\right) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Satz: stochastisches Integral

Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung J von $L^2[0, T]$ in den Raum der stetigen Martingale in $[0, T]$ bezüglich $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Für diese gilt, dass wenn $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ein einfacher Prozess ist, dann ist

$$P\left(J_t(X) = I_t(X) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) = 1.$$

Weiterhin gilt, dass

$$\mathbb{E}\left(J_t(X)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right).$$

Stochastisches Integral

Für $X \in L^2[0, T]$ und J wie im obigen Satz setzt man

$$\int_0^t X(s)dW(s) \stackrel{\text{def}}{=} J_t(X)$$

und nennt dies das **stochastische Integral** oder das **It Integral** von X bezüglich W.

Beweis:

Für $X \in L^2[0,T]$ eine Folge von einfachen Prozessen $X^{(m)} \in L^2[0,T]$ mit

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_s - X_s^{(m)}\right)^2 ds\right) = 0.$$

Die Folge $X^{(m)}$ ist aber auch eine Cauchy-Folge bezüglich $||\cdot||_{L^2[0,T]}$.

Beweis:

Für $X \in L^2[0,T]$ eine Folge von einfachen Prozessen $X^{(m)} \in L^2[0,T]$ mit

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(X_s - X_s^{(m)} \right)^2 ds \right) = 0.$$

Die Folge $X^{(m)}$ ist aber auch eine Cauchy-Folge bezüglich $|| \cdot ||_{L^2[0,T]}$.

Beweis:

Aufgrund der Linearität von stochastischen Integralen (I5) von einfachen Prozessen und der It-Isometrie (I2) gilt für $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)}\right) - I_t\left(X^{(m)}\right)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)\right)^2\right)$$

Beweis:

Aufgrund der Linearität von stochastischen Integralen (I5) von einfachen Prozessen und der It-Isometrie (I2) gilt für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)}\right) - I_t\left(X^{(m)}\right)\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)^2 ds\right)\right)\end{aligned}$$

Beweis:

Aufgrund der Linearität von stochastischen Integralen (I5) von einfachen Prozessen und der It-Isometrie (I2) gilt für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)}\right) - I_t\left(X^{(m)}\right)\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)^2 ds\right)\right) \\
&\overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Beweis:

Aufgrund der Linearität von stochastischen Integralen (I5) von einfachen Prozessen und der It-Isometrie (I2) gilt für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)}\right) - I_t\left(X^{(m)}\right)\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(I_t\left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \left(X^{(n)} - X^{(m)}\right)^2 ds\right)\right) \\
&\overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Beweis:

Daher ist die Folge $I_t(X^{(m)})$ eine Cauchy Folge in $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ mit einem $\mathscr{F}_t$-messbaren, quadratintegrierbaren L^2-Limes, den wir mit $I_t(X)$ bezeichnen.

Da die quadratische Konvergenz sofort die stochastische Konvergenz bezüglich P induziert, erhalten wir für jedes $\epsilon > 0$.

$$P\left(\left|I_t\left(X^{(m)}\right) - I_t(X)\right| > \epsilon\right) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis:

Daher ist die Folge $I_t(X^{(m)})$ eine Cauchy Folge in $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ mit einem $\mathscr{F}_t$-messbaren, quadratintegrierbaren L^2-Limes, den wir mit $I_t(X)$ bezeichnen.

Da die quadratische Konvergenz sofort die stochastische Konvergenz bezüglich P induziert, erhalten wir für jedes $\epsilon > 0$.

$$P\left(\left|I_t\left(X^{(m)}\right) - I_t(X)\right| > \epsilon\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indem wir eine entsprechende Teilfolge $X^{(m_k)}$ wählen, bekommen wir P-fast überall sicher die Konvergenz zum Limes $I_t(X)$.

Beweis:

Daher ist die Folge $I_t(X^{(m)})$ eine Cauchy Folge in $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ mit einem $\mathscr{F}_t$-messbaren, quadratintegrierbaren L^2-Limes, den wir mit $I_t(X)$ bezeichnen.

Da die quadratische Konvergenz sofort die stochastische Konvergenz bezüglich P induziert, erhalten wir für jedes $\epsilon > 0$.

$$P\left(\left|I_t\left(X^{(m)}\right) - I_t(X)\right| > \epsilon\right) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indem wir eine entsprechende Teilfolge $X^{(m_k)}$ wählen, bekommen wir P-fast überall sicher die Konvergenz zum Limes $I_t(X)$.

Beweis:

Wir zeigen jetzt, dass der Prozess $I(X)$ wie sein Limes, die Martingal-Eigenschaft besitzt.

Dazu sei $t, s \in [0, T], t > s$. Da das stochastische Integral für einfache Prozesse ein Martingal (I1) ist, folgt dass

$$\mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(m)}\right)|\mathscr{F}_s\right) = I_s\left(X^{(m)}\right)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wir zeigen jetzt, dass der Prozess $I(X)$ wie sein Limes, die Martingal-Eigenschaft besitzt.

Dazu sei $t, s \in [0, T], t > s$. Da das stochastische Integral für einfache Prozesse ein Martingal (I1) ist, folgt dass

$$\mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(m)}\right)|\mathscr{F}_s\right) = I_s\left(X^{(m)}\right)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Die Definition des bedingten Erwartungswertes führt auf

$$\int_A I_t\left(X^{(m)}\right) dP = \int_A I_s\left(X^{(m)}\right) dP$$

für alle $A \in \mathscr{F}_s$ und alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wir zeigen jetzt, dass der Prozess $I(X)$ wie sein Limes, die Martingal-Eigenschaft besitzt.

Dazu sei $t, s \in [0, T], t > s$. Da das stochastische Integral für einfache Prozesse ein Martingal (I1) ist, folgt dass

$$\mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(m)}\right)|\mathscr{F}_s\right) = I_s\left(X^{(m)}\right)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Die Definition des bedingten Erwartungswertes führt auf

$$\int_A I_t\left(X^{(m)}\right) dP = \int_A I_s\left(X^{(m)}\right) dP$$

für alle $A \in \mathscr{F}_s$ und alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wegen (i) folgt weiter

$$\int_A I_t\left(X^{(m)}\right) dP \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_t(X) dP$$

und

$$\int_A I_s\left(X^{(m)}\right) dP \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_s(X) dP.$$

Beweis:

Wegen (i) folgt weiter

$$\int_A I_t\left(X^{(m)}\right)dP \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_t(X)dP$$

und

$$\int_A I_s\left(X^{(m)}\right)dP \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_s(X)dP.$$

Nehmen wir dies alles zusammen, so impliziert dies

$$\int_A I_t\left(X\right)dP = \int_A I_s(X)dP$$

für alle $A \in \mathscr{F}_s$.

Beweis:

Wegen (i) folgt weiter

$$\int_A I_t\left(X^{(m)}\right) dP \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_t(X)dP$$

und

$$\int_A I_s\left(X^{(m)}\right) dP \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_s(X)dP.$$

Nehmen wir dies alles zusammen, so impliziert dies

$$\int_A I_t\left(X\right) dP = \int_A I_s(X)dP$$

für alle $A \in \mathscr{F}_s$.

Weil $I_s(X)$ $\mathscr{F}_t$-messbar ist, erhalten wir die Martingal-Eigenschaft

$$\mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathscr{F}_s\right) = I_s(X) \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:

Wegen (i) folgt weiter

$$\int_A I_t\left(X^{(m)}\right) dP \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_t(X)dP$$

und

$$\int_A I_s\left(X^{(m)}\right) dP \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A I_s(X)dP.$$

Nehmen wir dies alles zusammen, so impliziert dies

$$\int_A I_t\left(X\right) dP = \int_A I_s(X)dP$$

für alle $A \in \mathscr{F}_s$.

Weil $I_s(X)$ $\mathscr{F}_t$-messbar ist, erhalten wir die Martingal-Eigenschaft

$$\mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathscr{F}_s\right) = I_s(X) \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:

Nun konstruieren wir die Abbildung J mit Hilfe des L^2-Limes $I_t(X)$. Da die Filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ die gewöhnlichen Bedingungen erfüllt und $\{I_t(X)\}_{t\in[0,T]}$ ein Martingal ist, können wir $I_t(X)$ für jedes t auf einer P-Nullmenge so setzen, dass wir einen rechtsseitig stetigen Prozess $\{J_t(X),\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ erhalten, der ebenfalls ein Martingal ist. Man bemerke noch, dass $J_t(X)$ quadratintegrierbar ist.

Beweis:

Nun zeigen wir die Stetigkeit von $J(X)$. Das soeben konstruierte Martingal $J(X)$ ist immernoch ein L^2-Limes von der Folge $I_t(X^{(m)})$. Wenden wir nun Doob's Ungleichung für $p = 2$ an, so erhalten wir

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|I_t\left(X^{(m)}\right) - J_t(X)\right|\right)^2\right)$$

$$\leq \quad 4 \cdot \mathbb{E}\left(\left(I_T\left(X^{(m)}\right) - J_T(X)\right)^2\right)$$

Beweis:

Nun zeigen wir die Stetigkeit von $J(X)$. Das soeben konstruierte Martingal $J(X)$ ist immernoch ein L^2-Limes von der Folge $I_t(X^{(m)})$. Wenden wir nun Doob's Ungleichung für $p = 2$ an, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|I_t\left(X^{(m)}\right) - J_t(X)\right|\right)^2\right) \\
\leq\;\; & 4\cdot\mathbb{E}\left(\left(I_T\left(X^{(m)}\right) - J_T(X)\right)^2\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Beweis:

Nun zeigen wir die Stetigkeit von $J(X)$. Das soeben konstruierte Martingal $J(X)$ ist immernoch ein L^2-Limes von der Folge $I_t(X^{(m)})$. Wenden wir nun Doob's Ungleichung für $p = 2$ an, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|I_t\left(X^{(m)}\right)-J_t(X)\right|\right)^2\right)\\
\leq\quad & 4\cdot\mathbb{E}\left(\left(I_T\left(X^{(m)}\right)-J_T(X)\right)^2\right)\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}
$$

Beweis:

Deshalb existiert eine Teilfole $X^{(m_k)}$ mit

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|I_t\left(X^{(m_k)}\right)-J_t(X)\right|^2\right)\le\frac{1}{2^k\cdot k^2}.$$

Wenden wir nun die Ungleichung von Tschebyscheff an, dann erhalten wir

$$P\left(\sup_{0\le t\le T}\left|I_t\left(X^{(m_k)}\right)-J_t(X)\right|\ge\frac{1}{k}\right)\le k^2\cdot\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\ldots\right|^2\right)\le\frac{1}{2^k}.$$

Beweis:

Deshalb existiert eine Teilfole $X^{(m_k)}$ mit

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|I_t\left(X^{(m_k)}\right)-J_t(X)\right|^2\right)\leq\frac{1}{2^k\cdot k^2}.$$

Wenden wir nun die Ungleichung von Tschebyscheff an, dann erhalten wir

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|I_t\left(X^{(m_k)}\right)-J_t(X)\right|\geq\frac{1}{k}\right)\leq k^2\cdot\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\ldots\right|^2\right)\leq\frac{1}{2^k}.$$

Beweis:

Daher konvergiert nach dem Lemma von Borel-Cantelli die Folge der stetigen Prozesse $\left\{I_t(X^{(m_k)})\right\}_{t\in[0,T]}$ P-f.s. gleichmäßig gegen den rechtsseitig stetigen Prozess $J(X)$ für $k \to \infty$.

Da wir gleichmäßige Konvergenz für fast alle $\omega \in \Omega$ haben, hat der Prozess $J(X)$ stetige Pfade für fast alle $\omega \in \Omega$. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $J(X)$ über stetige Pfade verfügt.

Beweis:

Daher konvergiert nach dem Lemma von Borel-Cantelli die Folge der stetigen Prozesse $\left\{I_t(X^{(m_k)})\right\}_{t\in[0,T]}$ P-f.s. gleichmäßig gegen den rechtsseitig stetigen Prozess $J(X)$ für $k \to \infty$.

Da wir gleichmäßige Konvergenz für fast alle $\omega \in \Omega$ haben, hat der Prozess $J(X)$ stetige Pfade für fast alle $\omega \in \Omega$. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $J(X)$ über stetige Pfade verfügt.

Beweis:

Nun zeigen wir die Unabhängigkeit von $J_t(X)$ von der approximierenden Folge $X^{(m)}$ für X. Seien $X^{(m)}, Y^{(m)} \in L^2[0,T]$ zwei approximierende Folgen für $X \in L^2[0,T]$ mit $I\left(X^{(m)}\right), I\left(Y^{(m)}\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} I(X) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Beweis:

Dann setze

$$Z^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X^{(m)} & m \text{ gerade,} \\ Y^{(m)} & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Offenbar ist $\lim_{m\to\infty} Z^{(m)} = X$ und $I_t(Z^{(m)})$ konvergiert in $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ gegen $I_t(X)$ und $I'_t(X)$. Deshalb müssen $I_t(X)$ und $I'_t(X)$ für alle $t \in [0, T]$ P-f.s. gleich sein. Weiterhin müssen sie wegen (iv) P-f.s. mit $J_t(X)$ übereinstimmen.

Beweis:

Dann setze

$$Z^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X^{(m)} & m \text{ gerade}, \\ Y^{(m)} & m \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Offenbar ist $\lim_{m\to\infty} Z^{(m)} = X$ und $I_t(Z^{(m)})$ konvergiert in $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ gegen $I_t(X)$ und $I'_t(X)$. Deshalb müssen $I_t(X)$ und $I'_t(X)$ für alle $t \in [0, T]$ P-f.s. gleich sein. Weiterhin müssen sie wegen (iv) P-f.s. mit $J_t(X)$ übereinstimmen.

Beweis:

Weiterhin gilt

$$\mathbb{E}\left(J_t(X)^2\right) \overset{\text{(iv)}}{=} \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(n)}\right)^2\right)$$

$$\overset{\text{(I2)}}{=}$$

Beweis:

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(J_t(X)^2\right) &\overset{(iv)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(n)}\right)^2\right) \\
&\overset{(I2)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(X_s^{(n)}\right)^2 ds\right) \\
&=
\end{aligned}$$

Beweis:

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(J_t(X)^2\right) &\overset{(\mathrm{iv})}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(n)}\right)^2\right)\\ &\overset{(\mathrm{I2})}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(X_s^{(n)}\right)^2 ds\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right).\end{aligned}$$

Wobei die letzte Identität aus der Tatsache folgt, dass der Prozess X der $L^2[0, T]$-Limes von $X^{(n)}$ ist.

Beweis:

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(J_t(X)^2\right) &\overset{\text{(iv)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_t\left(X^{(n)}\right)^2\right) \\
&\overset{\text{(I2)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(X_s^{(n)}\right)^2 ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Wobei die letzte Identität aus der Tatsache folgt, dass der Prozess X der $L^2[0, T]$-Limes von $X^{(n)}$ ist.

Beweis:

Die Linearität von J folgt aus der Linearität des stochastischen Integrals (I5) und einer ähnlichen Grenzwertbetrachtung von einfachen Prozessen wie in (vi).

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Abbildung J. Sei J' eine weitere lineare Abbildung, die die selben geforderten Eigenschaften (i) bis (vii) hat. Dann folgt wegen der Stetigkeit von linearen Abbildungen

$$J'_t(X) = J'_t\left(\lim_{k\to\infty} X^{(m_k)}\right) =$$

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Abbildung J. Sei J' eine weitere lineare Abbildung, die die selben geforderten Eigenschaften (i) bis (vii) hat. Dann folgt wegen der Stetigkeit von linearen Abbildungen

$$J'_t(X) = J'_t\left(\lim_{k\to\infty} X^{(m_k)}\right) = \lim_{k\to\infty} J'_t\left(X^{(m_k)}\right)$$

$$=$$

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Abbildung J. Sei J' eine weitere lineare Abbildung, die die selben geforderten Eigenschaften (i) bis (vii) hat. Dann folgt wegen der Stetigkeit von linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} J'_t(X) = J'_t\left(\lim_{k\to\infty} X^{(m_k)}\right) &= \lim_{k\to\infty} J'_t\left(X^{(m_k)}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} I_t\left(X^{(m_k)}\right) = \end{aligned}$$

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Abbildung J. Sei J' eine weitere lineare Abbildung, die die selben geforderten Eigenschaften (i) bis (vii) hat. Dann folgt wegen der Stetigkeit von linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} J'_t(X) = J'_t\left(\lim_{k\to\infty} X^{(m_k)}\right) &= \lim_{k\to\infty} J'_t\left(X^{(m_k)}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} I_t\left(X^{(m_k)}\right) = J_t(X) \end{aligned}$$

P-f.s. für alle $t \in [0, T]$.

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Abbildung J. Sei J' eine weitere lineare Abbildung, die die selben geforderten Eigenschaften (i) bis (vii) hat. Dann folgt wegen der Stetigkeit von linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} J'_t(X) = J'_t\left(\lim_{k\to\infty} X^{(m_k)}\right) &= \lim_{k\to\infty} J'_t\left(X^{(m_k)}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} I_t\left(X^{(m_k)}\right) = J_t(X) \end{aligned}$$

P-f.s. für alle $t \in [0, T]$.

Da $J_t(X)$ und $J'_t(X)$ beides stetige Prozesse sind, sind sie somit ununterscheidbar.

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Abbildung J. Sei J' eine weitere lineare Abbildung, die die selben geforderten Eigenschaften (i) bis (vii) hat. Dann folgt wegen der Stetigkeit von linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} J'_t(X) = J'_t\left(\lim_{k\to\infty} X^{(m_k)}\right) &= \lim_{k\to\infty} J'_t\left(X^{(m_k)}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} I_t\left(X^{(m_k)}\right) = J_t(X) \end{aligned}$$

P-f.s. für alle $t \in [0, T]$.

Da $J_t(X)$ und $J'_t(X)$ beides stetige Prozesse sind, sind sie somit ununterscheidbar.

mehrdimensionales Stochastisches Integral

Seien $\{(W(t), \mathscr{F}_t)\}_t$ mit $W(t) = (W_1(t), ..., W_m(t))$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung und $\{(W(t), \mathscr{F}_t)\}_t$ ein $\mathbb{R}^{n,m}$-wertiger progressiver messbarer Prozess, so dass für jede Komponente $X_{ij} \in L^2[0, T]$ gilt. Dann ist das **It-Integral** bezüglich W definiert durch

$$\int_0^t X(s)dW(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \int_0^t X_{1j}(s)dW_j(s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \int_0^t X_{nj}(s)dW_j(s) \end{pmatrix}$$

für $t \in [0, T]$.

Der Vektorraum $H^2[0, T]$

$$\begin{aligned} H^2[0,T] &\stackrel{\text{def}}{=} H^2([0,T],\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},P) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Big\{(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]} \text{ reell-wertige stochastische Prozesse}\Big| \\ &\quad \{X_t\}_t \text{ progressiv messbar, } \int_0^T X_t^2 dt < \infty P\text{-f.s.}\Big\} \end{aligned}$$

Problem

Dabei besteht nun das Problem, dass Prozesse $X \in H^2[0, T]$ nicht notwendigerweise eine endliche $|| \cdot ||_T$ besitzen müssen. Deshalb können sie auch nicht durch einfache Prozesse angenähert werden.

Ausweg

Jedoch können wir einen Prozess $X \in H^2[0,T]$ mit Hilfe von entsprechenden Folgen von Stoppzeiten näher festlegen. Seien τ_n $(n \in \mathbb{N})$ Stoppzeiten, die durch

$$\tau_n(\omega) \overset{\text{def}}{=} T \wedge \inf \left\{ 0 \leq t \leq T \middle| \int_0^t X_s^2(\omega) ds \geq n \right\}.$$

definiert sind.

Dann definieren wir die Folge $X^{(n)}$ von Stopp-Prozessen durch

$$X_t^{(n)}(\omega) \overset{\text{def}}{=} X_t(\omega) \cdot 1_{\{\tau_n(\omega) \geq t\}}.$$

Ausweg

Jedoch können wir einen Prozess $X \in H^2[0, T]$ mit Hilfe von entsprechenden Folgen von Stoppzeiten näher festlegen. Seien τ_n ($n \in \mathbb{N}$) Stoppzeiten, die durch

$$\tau_n(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} T \wedge \inf \left\{ 0 \leq t \leq T \middle| \int_0^t X_s^2(\omega) ds \geq n \right\}.$$

definiert sind.

Dann definieren wir die Folge $X^{(n)}$ von Stopp-Prozessen durch

$$X_t^{(n)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_t(\omega) \cdot 1_{\{\tau_n(\omega) \geq t\}}.$$

Ausweg

Der so erhaltene Prozess $X^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist in $L^2[0, T]$. Also können wir die Definition des stochastischen Integrals anwenden. Dann definieren wir das stochastische Integral $I(X)$ durch

$$I_t(X) \stackrel{\text{def}}{=} I_t\left(X^{(n)}\right) \qquad \text{für } 0 \leq t \leq \tau_n.$$

Ausweg

Weiterhin haben wir die Konsistenz-Eigenschaft

$$I_t(X) = I_t\left(X^{(m)}\right) \quad \text{für } 0 \le t \le \tau_n (\le \tau_m), \quad m \ge n.$$

Somit ist $I_t(X)$ für $X \in H^2[0,T]$ wohldefiniert. Weiterhin gilt für $X \in H^2[0,T]$, dass

$$\tau_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty \quad P\text{-f.s.}$$

Ausweg

Weiterhin haben wir die Konsistenz-Eigenschaft

$$I_t(X) = I_t\left(X^{(m)}\right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq \tau_n (\leq \tau_m), \quad m \geq n.$$

Somit ist $I_t(X)$ für $X \in H^2[0, T]$ wohldefiniert. Weiterhin gilt für $X \in H^2[0, T]$, dass

$$\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad P\text{-f.s.}$$

Fragen?

noch Fragen?