# $L^p$ Räume und der Satz von Riesz-Fischer

Carsten Erdmann

Universität Rostock

08.05.2008

# 1.1. Definition: $N_p$

Sei $p > 0$, dann setzen wir $\infty^p := \infty, \ \infty^{-p} := 0$.

# 1.1. Definition: $N_p$

Sei $p > 0$, dann setzen wir $\infty^p := \infty, \ \infty^{-p} := 0$.

Sei $f : X \to \mathbb{K}$ meßbar, dann ist $|f| \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{A})$ und

$$N_p(f) := (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0)$$

ist sinnvoll definiert.

# 1.1. Definition: $N_p$

Sei $p > 0$, dann setzen wir $\infty^p := \infty$, $\infty^{-p} := 0$.
Sei $f : X \to \mathbb{K}$ meßbar, dann ist $|f| \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{A})$ und

$$N_p(f) := (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0)$$

ist sinnvoll definiert.

Weiterhin ist

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) \qquad (\alpha \in \mathbb{K}).$$

Für $p = \infty$ definieren wir

$$N_\infty(f) := \inf\{\alpha \in [0, \infty] : |f| \leq \alpha \quad \mu - f.ü.\}.$$

# 1.1. Definition: $N_p$

Sei $p > 0$, dann setzen wir $\infty^p := \infty, \ \ \infty^{-p} := 0$.
Sei $f : X \to \mathbb{K}$ meßbar, dann ist $|f| \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{A})$ und

$$N_p(f) := (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0)$$

ist sinnvoll definiert.
Weiterhin ist

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) \qquad (\alpha \in \mathbb{K}).$$

Für $p = \infty$ definieren wir

$$N_\infty(f) := \inf\{\alpha \in [0, \infty] : |f| \leq \alpha \quad \mu - f.ü.\}.$$

# 1.2. Definition: $\mathcal{L}^p$-Raum

Sei $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu),\ \ 0 < p \leq \infty$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $N_p(f) < \infty$, und weiterhin

$$\|f\|_p := N_p(f) \qquad f \in \mathcal{L}^p.$$

# 1.2. Definition: $\mathcal{L}^p$-Raum

Sei $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $0 < p \leq \infty$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $N_p(f) < \infty$, und weiterhin

$$\|f\|_p := N_p(f) \qquad f \in \mathcal{L}^p.$$

Falls $p > 0$, ist $\mathcal{L}^p$ also genau die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die $|f|^p$ $\mu$-integrierbar ist und

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}^p).$$

# 1.2. Definition: $\mathcal{L}^p$-Raum

Sei $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $0 < p \leq \infty$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $N_p(f) < \infty$, und weiterhin

$$\|f\|_p := N_p(f) \qquad f \in \mathcal{L}^p.$$

Falls $p > 0$, ist $\mathcal{L}^p$ also genau die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die $|f|^p$ $\mu$-integrierbar ist und

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}^p).$$

Falls $p = \infty$, ist $\mathcal{L}^p$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die gilt

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

# 1.2. Definition: $\mathcal{L}^p$-Raum

Sei $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $0 < p \leq \infty$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $N_p(f) < \infty$, und weiterhin

$$\|f\|_p := N_p(f) \qquad f \in \mathcal{L}^p.$$

Falls $p > 0$, ist $\mathcal{L}^p$ also genau die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die $|f|^p$ $\mu$-integrierbar ist und

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}^p).$$

Falls $p = \infty$, ist $\mathcal{L}^p$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die gilt

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

# 1.3. Satz: halbnormierter Vektorraum $\mathcal{L}^p$

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ ein halbnormierter Vektorraum bezüglich $\|\cdot\|_p$

# 1.3. Satz: halbnormierter Vektorraum $\mathcal{L}^p$

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ ein halbnormierter Vektorraum bezüglich $\|\cdot\|_p$ und für $0 < p < 1$ ist

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p \qquad (f, g \in \mathcal{L}^p)$$

eine Halbmetrik auf $\mathcal{L}^p$.

# 1.3. Satz: halbnormierter Vektorraum $\mathcal{L}^p$

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ ein halbnormierter Vektorraum bezüglich $\|\cdot\|_p$ und für $0 < p < 1$ ist

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p \qquad (f, g \in \mathcal{L}^p)$$

eine Halbmetrik auf $\mathcal{L}^p$.

# 1.4. Definition: $L^p$-Raum

Die Menge $\mathscr{N}$ aller meßbaren funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f = 0$ $\mu$-f.ü. ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$, also ist der Quotientenraum

$$L^p := L^p(\mu) := \mathcal{L}^p / \mathscr{N} \qquad (0 < p \leq \infty)$$

sinnvoll definiert.

# 1.4. Definition: $L^p$-Raum

Die Menge $\mathscr{N}$ aller meßbaren funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f = 0$ $\mu$-f.ü. ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$, also ist der Quotientenraum

$$L^p := L^p(\mu) := \mathcal{L}^p / \mathscr{N} \qquad (0 < p \leq \infty)$$

sinnvoll definiert.

# 1.5. Satz: Norm $L^p$-Norm

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum

# 1.5. Satz: Norm $L^p$-Norm

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum
und für $0 < p < 1$ ist

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p \qquad (f, g \in L^p)$$

eine Metrik auf $L^p$.

# 1.5. Satz: Norm $L^p$-Norm

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum und für $0 < p < 1$ ist

$$d_p(f,g) := \|f-g\|_p^p \qquad (f,g \in L^p)$$

eine Metrik auf $L^p$.

# 2.1. Definition: Konvergenz

Sei $0 < p \leq \infty$ und $f_n \in \mathcal{L}^p (n \in \mathbb{N})$. Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ heißt *im p-ten Mittel konvergent gegen* $f \in \mathcal{L}^p$, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, also wenn $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gegen $f \in \mathcal{L}^p$ konvergiert.

# 2.1. Definition: Konvergenz

Sei $0 < p \leq \infty$ und $f_n \in \mathcal{L}^p (n \in \mathbb{N})$. Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ heißt *im p-ten Mittel konvergent gegen* $f \in \mathcal{L}^p$, falls $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, also wenn $(f_n)_{n \geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gegen $f \in \mathcal{L}^p$ konvergiert.

Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ heißt eine *Cauchy-Folge* in $\mathcal{L}^p$ oder eine *Cauchy-Folge für die Konvergenz im p-ten Mittel*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$ für alle $m, n \geq n_o(\epsilon)$.

# 2.1. Definition: Konvergenz

Sei $0 < p \leq \infty$ und $f_n \in \mathcal{L}^p (n \in \mathbb{N})$. Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ heißt *im p-ten Mittel konvergent gegen* $f \in \mathcal{L}^p$, falls $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, also wenn $(f_n)_{n \geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gegen $f \in \mathcal{L}^p$ konvergiert.

Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ heißt eine *Cauchy-Folge* in $\mathcal{L}^p$ oder eine *Cauchy-Folge für die Konvergenz im p-ten Mittel*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$ für alle $m, n \geq n_o(\epsilon)$.

# 2.2. Definition: $\chi_A$

Sei $A \subset X$, dann verstehen wir unter der *charakteristischen* oder *Indikatorfunktion* von $A$ eine Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

# 2.2. Definition: $\chi_A$

Sei $A \subset X$, dann verstehen wir unter der *charakteristischen* oder *Indikatorfunktion* von $A$ eine Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

Für $A, B \subset X$ gilt $A \subset B$ genau dann, wenn $\chi_A \leq \chi_B$ ist. Daher ist eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen genau dann monoton wachsend (fallend), wenn die Folge $(\chi_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend (fallend) ist.

## 2.2. Definition: $\chi_A$

Sei $A \subset X$, dann verstehen wir unter der *charakteristischen* oder *Indikatorfunktion* von $A$ eine Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

Für $A, B \subset X$ gilt $A \subset B$ genau dann, wenn $\chi_A \leq \chi_B$ ist. Daher ist eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen genau dann monoton wachsend (fallend), wenn die Folge $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend (fallend) ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} \\ \chi_{A^c} &= 1 - \chi_A, \quad \chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B) \end{aligned}$$

# 2.2. Definition: $\chi_A$

Sei $A \subset X$, dann verstehen wir unter der *charakteristischen* oder *Indikatorfunktion* von $A$ eine Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

Für $A, B \subset X$ gilt $A \subset B$ genau dann, wenn $\chi_A \leq \chi_B$ ist. Daher ist eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen genau dann monoton wachsend (fallend), wenn die Folge $(\chi_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend (fallend) ist.Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A \cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} \\ \chi_{A^c} &= 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A (1 - \chi_B) \end{aligned}$$

# 2.3. Satz: $\lim \mathcal{T}^+$

Für jede wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{T}^+$ und jedes $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \leq \lim_{n\to\infty} u_n$ gilt

$$\int_X v d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu.$$

# 2.3. Satz: $\lim \mathcal{T}^+$

Für jede wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{T}^+$ und jedes $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \leq \lim_{n\to\infty} u_n$ gilt

$$\int_X v d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu.$$

# 2.4. Korollar

Für alle $f \in \mathcal{M}^+$ gilt

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X u d\mu : u \in \mathcal{T}^+, u \leq f\}.$$

# 2.4. Korollar

Für alle $f \in \mathcal{M}^+$ gilt

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X u d\mu : u \in \mathcal{T}^+, u \leq f\}.$$

# 2.5. Satz (monotone Konvergenz)

Für jede wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$ gilt

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

# 2.5. Satz (monotone Konvergenz)

Für jede wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$ gilt

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

# 2.6. Satz (Lemma von Fatou)

Für jede Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}^+ \quad (n \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

# 2.6. Satz (Lemma von Fatou)

Für jede Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}^+ \quad (n \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

# 2.7. Satz (majorisierte Konvergenz)

Die Funktionen $f, f_n : X \to \mathbb{K} \quad (n \in \mathbb{N})$ seien meßbar und es gelte $lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu$-f.ü.. Ferner gebe es eine integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n| \leq g \quad \mu$-f.ü..Dann sind $f$ und alle $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

# 2.7. Satz (majorisierte Konvergenz)

Die Funktionen $f, f_n : X \to \mathbb{K} \quad (n \in \mathbb{N})$ seien meßbar und es gelte $lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu$-f.ü.. Ferner gebe es eine integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n| \leq g \quad \mu$-f.ü..Dann sind $f$ und alle $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

# Satz von Riesz Fischer

Die Räume $\mathcal{L}^p$ $(0 < p \leq \infty)$ sind vollständig, das heißt: Zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p$, sodass $\|f_n - f\|_p \to 0 \ (n \to \infty)$.

# Satz von Riesz Fischer

Die Räume $\mathcal{L}^p$ $(0 < p \leq \infty)$ sind vollständig, das heißt: Zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p$, sodass $\|f_n - f\|_p \to 0 \;\; (n \to \infty)$.

# 2.9. Korrolar

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p$ ein Banach-Raum und für $0 < p < 1$ ist $L^p$ ein vollständiger metrischer Raum.

# 2.9. Korrolar

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p$ ein Banach-Raum und für $0 < p < 1$ ist $L^p$ ein vollständiger metrischer Raum.

# 2.10. Korrolar

Es sei $0 < p \leq \infty$.

# 2.10. Korrolar

Es sei $0 < p \leq \infty$.

(a) Zu jeder Cauchy-folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ und ein $f \in \mathcal{L}^p$ sodass $f_{n_k} \to f$ $\mu$-f.ü.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, die $\mu$-f.ü. gegen $f$ konvergiert.

# 2.10. Korrolar

Es sei $0 < p \leq \infty$.

(a) Zu jeder Cauchy-folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ und ein $f \in \mathcal{L}^p$ sodass $f_{n_k} \to f$ $\mu$-f.ü.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, die $\mu$-f.ü. gegen $f$ konvergiert.

# 2.11. Beispiel

Es seien $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}^1_X$, $\mu = \beta^1_X$. Wir zählen die Intervalle $[0,1], [0,\frac{1}{2}]$ , $[\frac{1}{2},1]$, $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}], [\frac{2}{3},1], [0,\frac{1}{4}], ..$ ab zu einer Folge von Intervallen $I_n$ $(n \geq 1)$.

# 2.11. Beispiel

Es seien $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}^1_X$, $\mu = \beta^1_X$. Wir zählen die Intervalle $[0,1], [0,\frac{1}{2}]$ , $[\frac{1}{2},1]$, $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}], [\frac{2}{3},1], [0,\frac{1}{4}], ..$ ab zu einer Folge von Intervallen $I_n$ $(n \geq 1)$.

Dann gibt es zu jedem $x \in X$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_n$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \notin I_n$. Die Folge der Funktionen $f_n := \chi_{I_n} (n \in \mathbb{N})$ divergiert daher in jedem Punkt $x \in X$.

# 2.11. Beispiel

Es seien $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}^1_X$, $\mu = \beta^1_X$. Wir zählen die Intervalle $[0,1], [0,\frac{1}{2}]\ , [\frac{1}{2},1], [0,\frac{1}{3}], [\frac{1}{3},\frac{2}{3}], [\frac{2}{3},1], [0,\frac{1}{4}], ..$ ab zu einer Folge von Intervallen $I_n$ $(n \geq 1)$.
Dann gibt es zu jedem $x \in X$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_n$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \notin I_n$. Die Folge der Funktionen $f_n := \chi_{I_n} (n \in \mathbb{N})$ divergiert daher in jedem Punkt $x \in X$.
Andererseits gilt für $0 < p < \infty$

$$\|f_n\|_p^p = \int_X |f_n|^p d\beta^1 = \beta^1(I_n) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

das heißt $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert in jedem $\mathcal{L}^p(\mu)(0 < p < \infty)$ gegen Null.

# 2.11. Beispiel

Es seien $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}^1_X$, $\mu = \beta^1_X$. Wir zählen die Intervalle $[0,1], [0,\frac{1}{2}]$ , $[\frac{1}{2},1]$, $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}], [\frac{2}{3},1], [0,\frac{1}{4}], ..$ ab zu einer Folge von Intervallen $I_n$ $(n \geq 1)$.
Dann gibt es zu jedem $x \in X$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_n$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \notin I_n$. Die Folge der Funktionen $f_n := \chi_{I_n}(n \in \mathbb{N})$ divergiert daher in jedem Punkt $x \in X$.
Andererseits gilt für $0 < p < \infty$

$$\|f_n\|_p^p = \int_X |f_n|^p d\beta^1 = \beta^1(I_n) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

das heißt $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert in jedem $\mathcal{L}^p(\mu)(0 < p < \infty)$ gegen Null.

# 2.12. Beispiel

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$.
Dann ist $\|f_n\|_p = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$.

# 2.12. Beispiel

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$. Dann ist $\|f_n\|_p = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$. Angenommen, es gebe eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \geq 1}$ natürlicher Zahlen und eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_{n_k} \to f$ f.ü..

## 2.12. Beispiel

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$. Dann ist $\|f_n\|_p = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$.Angenommen, es gebe eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen und eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_{n_k} \to f$ f.ü..Offenbar gilt

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 = 0 \qquad \forall k \geq 1,$$

# 2.12. Beispiel

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$. Dann ist $\|f_n\|_p = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$.Angenommen, es gebe eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen und eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_{n_k} \to f$ f.ü..Offenbar gilt

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 = 0 \qquad \forall k \geq 1,$$

und der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 \to \int_X |f|^2 d\beta^1 \qquad (k \to \infty).$$

# 2.12. Beispiel

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$. Dann ist $\|f_n\|_p = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$.Angenommen, es gebe eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen und eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_{n_k} \to f$ f.ü..Offenbar gilt

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 = 0 \qquad \forall k \geq 1,$$

und der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 \to \int_X |f|^2 d\beta^1 \qquad (k \to \infty).$$

Daher ist $f = 0$ f.ü. im Widerspruch zu $|f_{n_k}| = 1$.

# 2.12. Beispiel

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$. Dann ist $\|f_n\|_p = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$.Angenommen, es gebe eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen und eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_{n_k} \to f$ f.ü..Offenbar gilt

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 = 0 \qquad \forall k \geq 1,$$

und der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 \to \int_X |f|^2 d\beta^1 \qquad (k \to \infty).$$

Daher ist $f = 0$ f.ü. im Widerspruch zu $|f_{n_k}| = 1$.

# 2.13. Satz

Ist $0 < p < p' \leq \infty$ und $\mu(X) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^p$ und

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/p'} \|f\|_{p'} \qquad \forall f \in \mathcal{L}^p,$$

# 2.13. Satz

Ist $0 < p < p' \leq \infty$ und $\mu(X) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^p$ und

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p - 1/p'} \|f\|_{p'} \qquad \forall f \in \mathcal{L}^p,$$

das heißt Konvergenz in $\mathcal{L}^{p'}$ impliziert Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ (mit gleichem Limes).

# 2.13. Satz

Ist $0 < p < p' \leq \infty$ und $\mu(X) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^p$ und

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/p'} \|f\|_{p'} \qquad \forall f \in \mathcal{L}^p,$$

das heißt Konvergenz in $\mathcal{L}^{p'}$ impliziert Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ (mit gleichem Limes).

# 3.1. Definition: Banach-Algebra

Ein Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ heißt eine *Banach-Algebra*, wenn eine Multiplikation $\cdot : V \times V \to V$ erklärt ist, die V zu einer $\mathbb{K}$-Algebra macht, sodass

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (x, y \in V).$$

# 3.1. Definition: Banach-Algebra

Ein Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ heißt eine *Banach-Algebra*, wenn eine Multiplikation $\cdot : V \times V \to V$ erklärt ist, die V zu einer $\mathbb{K}$-Algebra macht, sodass

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (x, y \in V).$$

Eine Banach-Algebra mit kommutativer Multipliaktion heißt *kommutativ*.

# 3.1. Definition: Banach-Algebra

Ein Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ heißt eine *Banach-Algebra*, wenn eine Multiplikation $\cdot : V \times V \to V$ erklärt ist, die V zu einer $\mathbb{K}$-Algebra macht, sodass

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (x, y \in V).$$

Eine Banach-Algebra mit kommutativer Multipliaktion heißt *kommutativ*.

# 3.2. Beispiel: Banach-Algebra

Für jedes Kompaktum $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $C(X)$ der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

und den üblichen punktweisen Verknüpfungen eine kommutative Banach-Algebra mit Einselement.

# 3.2. Beispiel: Banach-Algebra

Für jedes Kompaktum $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $C(X)$ der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

und den üblichen punktweisen Verknüpfungen eine kommutative Banach-Algebra mit Einselement.

# 3.3. Definition: Faltung

Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$, ist die Funktion $f * g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$

$$f * g(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(x-y)g(y)d\beta^p(y) & x \in A^c \\ 0 & x \in A \end{cases}$$

# 3.3. Definition: Faltung

Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$, ist die Funktion $f * g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$

$$f * g(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(x-y)g(y)d\beta^p(y) & x \in A^c \\ 0 & x \in A \end{cases}$$

Diese Funktion ist Borel-meßbar und $f * g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$. Weiterhin ist sie kommutativ, assoziativ und distributiv.

# 3.3. Definition: Faltung

Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$, ist die Funktion $f * g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$

$$f * g(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(x-y)g(y)d\beta^p(y) & x \in A^c \\ 0 & x \in A \end{cases}$$

Diese Funktion ist Borel-meßbar und $f * g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$. Weiterhin ist sie kommutativ, assoziativ und distributiv.

# 3.4. Definition: Fourier-Transformation

Anstelle von $\beta^p$ verwenden wir nun

$$\mu_p := (2\pi)^{-p/2}\beta^p$$

als Maß. Für komplexwertiges $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$ heißt $\hat{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\langle t,x\rangle} f(x) d\mu_p(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^p)$$

die *Fourier-Transformierte* von $f$.

# 3.4. Definition: Fourier-Transformation

Anstelle von $\beta^p$ verwenden wir nun

$$\mu_p := (2\pi)^{-p/2}\beta^p$$

als Maß. Für komplexwertiges $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$ heißt $\hat{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\langle t,x\rangle} f(x) d\mu_p(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^p)$$

die *Fourier-Transformierte* von $f$.

Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$ seine Fourier-Transformierte $\hat{f}$ zuordnet, heißt *Fourier-Transformation*.

# 3.4. Definition: Fourier-Transformation

Anstelle von $\beta^p$ verwenden wir nun

$$\mu_p := (2\pi)^{-p/2}\beta^p$$

als Maß. Für komplexwertiges $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$ heißt $\hat{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\langle t,x\rangle} f(x) d\mu_p(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^p)$$

die *Fourier-Transformierte* von $f$.

Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$ seine Fourier-Transformierte $\hat{f}$ zuordnet, heißt *Fourier-Transformation*.

# 3.5. Satz

$L^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m, \beta^m)$ ist bezüglich der Faltung als Multiplikation eine kommutative Banach-Algebra ohne Einselement.

# 3.5. Satz

$L^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m, \beta^m)$ ist bezüglich der Faltung als Multiplikation eine kommutative Banach-Algebra ohne Einselement.

# 4.1. Definition Hilbert-Raum

Ein Banach-Raum$(H, \|\cdot\|)$ auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das vermöge $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \ (x \in H)$ die Norm von $H$ induziert, heißt *Hilbert-Raum*.

# 4.1. Definition Hilbert-Raum

Ein Banach-Raum$(H, \|\cdot\|)$ auf dem ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, das vermöge $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}\ \ (x \in H)$ die Norm von $H$ induziert, heißt *Hilbert-Raum*.

# 4.2. Satz

$L^2(\mu)$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu \qquad (f, g \in L^2(\mu)).$$

# 4.2. Satz

$L^2(\mu)$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} d\mu \qquad (f, g \in L^2(\mu)).$$

# 4.3. Bemerkung: Hilbertsche Folgenraum

Der *Hilbertsche Folgenraum*

$$l^2(I) := \left\{ x \in \mathbb{K}^I : \sum_{j \in I} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in I} x_j y_j \qquad (x, y \in l^2(I)).$$

# 4.3. Bemerkung: Hilbertsche Folgenraum

Der *Hilbertsche Folgenraum*

$$l^2(I) := \left\{ x \in \mathbb{K}^I : \sum_{j \in I} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in I} x_j y_j \qquad (x, y \in l^2(I)).$$

# 4.4. Definition Orthonormalsystem

Es sei $H$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Familie $(e_j)_{j \in I}$ $(I \subset \mathbb{Z})$ von Elementen von $H$ heißt ein *Orthonormalsystem*, falls $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ $\forall j, k \in I$.

# 4.4. Definition Orthonormalsystem

Es sei $H$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Familie $(e_j)_{j \in I}$ $(I \subset \mathbb{Z})$ von Elementen von $H$ heißt ein *Orthonormalsystem*, falls $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} \;\; \forall j, k \in I$.

Ein Orthonormalsystem $(e_j)_{j \in I}$ in $H$ heißt *vollständig*, falls $Span(e_j : j \in I)$ dicht in $H$ liegt.

# 4.4. Definition Orthonormalsystem

Es sei $H$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Familie $(e_j)_{j\in I}$ $(I \subset \mathbb{Z})$ von Elementen von $H$ heißt ein *Orthonormalsystem*, falls $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} \;\; \forall j, k \in I$.

Ein Orthonormalsystem $(e_j)_{j\in I}$ in $H$ heißt *vollständig*, falls $Span(e_j : j \in I)$ dicht in $H$ liegt.

# 4.5. Satz von der besten Approximation

Ist $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ ein Orthonormalsystem in $H$, so gibt es zu jedem $f \in H$ genau ein $g \in Span(e_1, \ldots, e_n)$ mit

$$\|f - g\| = \inf \left\{ \|f - h\| : h \in Span(e_1, \ldots, e_n) \right\},$$

und zwar

$$g = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

# 4.5. Satz von der besten Approximation

Ist $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ ein Orthonormalsystem in $H$, so gibt es zu jedem $f \in H$ genau ein $g \in Span(e_1, \ldots, e_n)$ mit

$$\|f - g\| = \inf \{\|f - h\| : h \in Span(e_1, \ldots, e_n)\},$$

und zwar

$$g = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Für dieses $g$ gilt:

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

# 4.5. Satz von der besten Approximation

Ist $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ ein Orthonormalsystem in $H$, so gibt es zu jedem $f \in H$ genau ein $g \in Span(e_1, \ldots, e_n)$ mit

$$\|f - g\| = \inf \{\|f - h\| : h \in Span(e_1, \ldots, e_n)\},$$

und zwar

$$g = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Für dieses $g$ gilt:

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

# 4.6. Besselsche Ungleichung

Sind $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $H$ und $f \in H$, so konvergiert $\sum_{j\in I} |\langle f, e_j\rangle|^2$, und es gilt

$$\sum_{j\in I} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq \|f\|^2 .$$

# 4.6. Besselsche Ungleichung

Sind $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $H$ und $f \in H$, so konvergiert $\sum_{j\in I} |\langle f, e_j\rangle|^2$, und es gilt

$$\sum_{j\in I} |\langle f, e_j\rangle|^2 \le \|f\|^2 .$$

# 4.7. Korollar

Sind $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $H$ und $\lambda_j \in \mathbb{K} \quad (j \in I)$, so gilt: Es gibt ein $f \in H$ mit $\langle f, e_j \rangle = \lambda_j (j \in I)$ genau dann, wenn $\sum_{j\in I} |\lambda_j|^2 < \infty$.

# 4.7. Korollar

Sind $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $H$ und $\lambda_j \in \mathbb{K} \quad (j \in I)$, so gilt: Es gibt ein $f \in H$ mit $\langle f, e_j \rangle = \lambda_j (j \in I)$ genau dann, wenn $\sum_{j\in I} |\lambda_j|^2 < \infty$.

# 4.8. Satz

Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in H, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $(e_j)_{j\in I}$ ist vollständig.
2. Für jedes $f \in H$ gilt der Entwicklungssatz
$$f = \sum_{f\in I} \langle f, e_j \rangle e_j$$
3. Für alle $f, g \in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung
$$\langle f, g \rangle = \sum_{j\in I} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, g \rangle.$$
4. Für alle $f \in H$ gilt die Vollständigkeitsrelation
$$\|f\|^2 = \sum_{j\in I} |\langle f, e_j \rangle|^2.$$
5. $(e_j)_{j\in I}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.
6. Ist $f \in H$ und $\langle f, e_j \rangle = 0$ für alle $j \in I$, so gilt $f = 0$.

# 4.8. Satz

Ist $(e_j)_{j \in I}$ ein Orthonormalsystem in H, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $(e_j)_{j \in I}$ ist vollständig.
2. Für jedes $f \in H$ gilt der Entwicklungssatz
$$f = \sum_{f \in I} \langle f, e_j \rangle e_j$$
3. Für alle $f, g \in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung
$$\langle f, g \rangle = \sum_{j \in I} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, g \rangle.$$
4. Für alle $f \in H$ gilt die Vollständigkeitsrelation
$$\|f\|^2 = \sum_{j \in I} |\langle f, e_j \rangle|^2.$$
5. $(e_j)_{j \in I}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.
6. Ist $f \in H$ und $\langle f, e_j \rangle = 0$ für alle $j \in I$, so gilt $f = 0$.

# 4.9. Satz (Riesz)

Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$ und $\alpha_j \in \mathbb{K}$ $(j \in I)$, so ist $\sum_{j\in I} |\alpha_j|^2 < \infty$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es ein $f \in L^2(\mu)$ gibt mit $\langle f, e_j\rangle = \alpha_j \;\; \forall j \in I$.

# 4.9. Satz (Riesz)

Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$ und $\alpha_j \in \mathbb{K}$ $(j \in I)$, so ist $\sum_{j\in I} |\alpha_j|^2 < \infty$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es ein $f \in L^2(\mu)$ gibt mit $\langle f, e_j\rangle = \alpha_j \;\; \forall j \in I$.

# 4.10. Definition Isometrie

Sind $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ zwei Hilbert-Räume, so heißt eine bijektive lineare Abbildung $\phi : H_1 \to H_2$ mit $\langle\phi(u), \phi(u)\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1 \;\; (u, v \in H_1)$ eine *Isometrie*.

# 4.10. Definition Isometrie

Sind $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ und $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ zwei Hilbert-Räume, so heißt eine bijektive lineare Abbildung $\phi : H_1 \to H_2$ mit $\langle \phi(u), \phi(u) \rangle_2 = \langle u, v \rangle_1 \ (u, v \in H_1)$ eine *Isometrie*.

# 4.11. Isomorphiesatz

Ist $(e_j)_{j \in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$, so ist die Abbildung $\phi : l^2(I) \to L^2(\mu)$, mit

$$\phi((\alpha_j)_{j \in I}) := \sum_{j \in I} \alpha_j e_j \qquad ((\alpha_j)_{j \in I} \in l^2(I))$$

ein Isomorphismus.

# 4.11. Isomorphiesatz

Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$, so ist die Abbildung $\phi : l^2(I) \to L^2(\mu)$, mit

$$\phi((\alpha_j)_{j\in I}) := \sum_{j\in I} \alpha_j e_j \qquad ((\alpha_j)_{j\in I} \in l^2(I))$$

ein Isomorphismus.

# 4.12. Vollständigkeit der trigonometrischen Systems

Gegeben sei der Maßraum $([0,1], \mathfrak{B}^1_{[0,1]}, \beta^1_{[0,1]})$ und die zugehörigen Räume $L^p([0,1])$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Es sei
$e_n(t) := \exp(2\pi int) \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in [0,1])$.

# 4.12. Vollständigkeit der trigonometrischen Systems

Gegeben sei der Maßraum $([0,1], \mathfrak{B}^1_{[0,1]}, \beta^1_{[0,1]})$ und die zugehörigen Räume $L^p([0,1])$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Es sei

$e_n(t) := \exp(2\pi i n t) \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in [0,1])$.

Dann ist $e_n \in L^\infty([0,1])$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$.

# 4.12. Vollständigkeit der trigonometrischen Systems

Gegeben sei der Maßraum $([0,1], \mathfrak{B}^1_{[0,1]}, \beta^1_{[0,1]})$ und die zugehörigen Räume $L^p([0,1])$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Es sei
$e_n(t) := \exp(2\pi int) \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in [0,1])$.
Dann ist $e_n \in L^\infty([0,1])$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$.
Dann ist das Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $L^2([0,1])$ vollständig.

# 4.12. Vollständigkeit der trigonometrischen Systems

Gegeben sei der Maßraum $([0,1], \mathfrak{B}^1_{[0,1]}, \beta^1_{[0,1]})$ und die zugehörigen Räume $L^p([0,1])$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Es sei
$e_n(t) := \exp(2\pi int) \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in [0,1])$.
Dann ist $e_n \in L^\infty([0,1])$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$.
Dann ist das Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $L^2([0,1])$ vollständig.

# 4.13. Korollar

Die Fourier-Transformation $\hat{}: L^2([0,1]) \to l^2(\mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus.

# 4.13. Korollar

Die Fourier-Transformation $\hat{}: L^2([0,1]) \to l^2(\mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus.

# 4.14. Korollar

Für jedes $f \in L^2([0,1])$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$ im quadratischen Mittel gegen $f$ und es gelten die Vollständigkeitsrelation

# 4.14. Korollar

Für jedes $f \in L^2([0,1])$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$ im quadratischen Mittel gegen $f$ und es gelten die Vollständigkeitsrelation

# 4.15. Bemerkung

Ist $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$, so existiert nach (2.8.) eine Teilfolge der Folge der Partialsummen $\sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e_k$ $(n \in \mathbb{N})$ der Fourier-Reihe von $f$, die punktweise f.ü. gegen $f$ konvergiert. Weiterhin konvergiert selbst die Folge der Teilsummen punktweise f.ü. gegen $f$.

# 4.15. Bemerkung

Ist $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$, so existiert nach (2.8.) eine Teilfolge der Folge der Partialsummen $\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e_k \ (n \in \mathbb{N})$ der Fourier-Reihe von $f$, die punktweise f.ü. gegen $f$ konvergiert. Weiterhin konvergiert selbst die Folge der Teilsummen punktweise f.ü. gegen $f$.

# Fragen

Noch Fragen?????

# Fragen

Noch Fragen?????