

Optionspreisberechnung

Stochastische Volatilitätsmodelle

CARSTEN ERDMANN
Lehrstuhl für Angewandte Analysis

Preisbestimmung von Derivaten

Europäische Option

Eine europäische Option ist ein Vertrag, der dem Käufer der Option das Recht, jedoch nicht die Pflicht gibt, eine Einheit eines zuvor festgelegten Finanztitels (Underlyings) zu einem vorher festgelegten Preis $K \in (0, \infty)$ zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T \in (0, \infty)$ zu (ver-)kaufen.

Beispiele

- rohstoffhandelnde Unternehmen (Landwirte, Minenbetreiber, ...)
- exportierende Unternehmen (Automobilhersteller, Maschinenbauer, ...)
- Spekulanten

Wie modellieren wir den Preis des Underlyings?

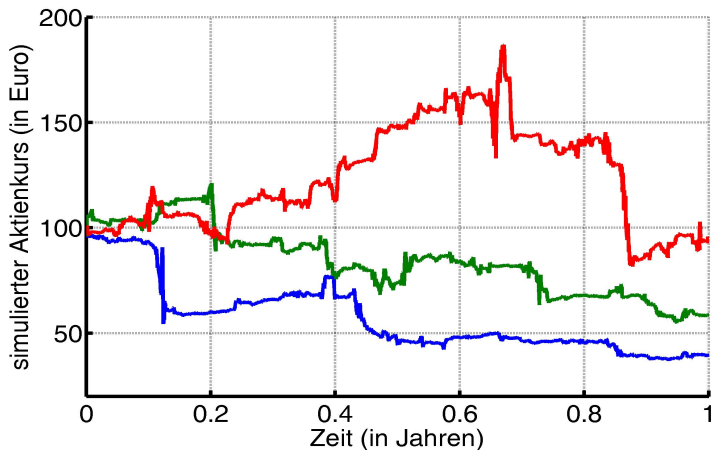
Wir betrachten zwei Finanztitel, ein risikoloses $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$ und ein risikoreiches $\{A_t\}_{t \in [0, T]}$. Diese sollen den folgenden stochastischen Differentialgleichungen genügen

$$dB_t = r \cdot B_t dt,$$

$$dA_t = \mu \cdot A_t dt + f(\sigma_t) \cdot A_t dW_t^{(1)}$$

$$d\sigma_t = \alpha \cdot (m - \sigma_t) dt + \beta \cdot \left(\rho(t) dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2(t)} dW_t^{(2)} \right)$$

Beispiele für simulierte Kursverläufe



Ziel

Berechnung des Preises $V(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ einer (europäischen) Option in diesem Modell. Dabei sind wir vor allem an einer expliziten Lösung oder an schnellen Lösungsverfahren interessiert.

Möglichkeiten

- stochastischer Ansatz
- analytischer Ansatz
- (stochastisch oder analytisch) numerischer Ansatz



Parabolische partielle Differentialgleichung

Man kann zeigen, dass die Bestimmung einer Preisfunktion $P(t, x)$ äquivalent zu der Lösung eines linearen parabolischen Endwertproblems in zwei Dimensionen auf unbeschränktem Gebiet ist:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(t, x)}{\partial t} + L(t, x, D_x)P(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^2 \\ P(T, x) = P_T(x) & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

mit

$$L(t, x, D_x) = - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t, x).$$



Ergebnisse der Diplomarbeit

- mathematisch exakte und allgemeine Herleitung der partiellen DGL
- Beweis der Existenz, Eindeutigkeit, Regularität sowie Analytizität der Lösung
- Anwendung und Vergleich numerischer Methoden (stochastisch und numerisch)

Aktuelle Forschungsarbeit

- stärkere Anpassung der Modelle an reale Marktgegebenheiten, Verschmelzung verschiedener Ansätze
 - Berücksichtigung von Transaktionskosten, Marktliquidität, Einfluss der Marktteilnehmer
 - **Ergebnis:** vollständig nichtlineare parabolische Integro-DGLen
- Beweis der Existenz, Eindeutigkeit sowie Regularität der Lösung



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!